文章编号：1000-4750(2013)10-0005-09

混凝土二维参数化骨料模型的创建方法

宋来忠，沈　涛，余　波

(三峡大学理学院，湖北，宜昌 443002)

摘　要：基于参数化骨料的特点，在混凝土二维参数化骨料模型的创建中，提出了让覆盖椭圆可以相互有重叠，骨料却相互分离的创建方法。该方法降低了骨料之间的相互排斥性，可以在创建的试件中缩小骨料之间的空隙，从而增加试件中骨料的含量，提高模型创建的速度。同时，在模型的创建中采用了按级配分级随机投放的方式，保证了骨料分布的合理性。实验表明：使用该方法能够比较快的按三级配生成含骨料 75%以上的几何模型试件，可以满足大体积、全级配、高强度混凝土的骨料投放模拟要求。最后给出了力学分析实例，以说明该算法的有效性。

关键词：混凝土；骨料；随机投放；覆盖椭圆；级配

中图分类号：TU528.04　**文献标志码：**A　doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.05.0390

THE APPROACH TO ESTABLISHING A TWO-DIMENSIONAL PARAMETERIZED AGGREGATE MODEL FOR CONCRERE SIMULATION

SONG Lai-zhong , SHEN Tao , YU Bo

(College of Science, China Three Gorges University, Hubei, Yichang 443002, China)

Abstract: To establish a two-dimensional parameterized aggregate model for concrete simulation, we propose one method, which is based on the characteristics of the parameterized aggregate, such that the coverage ellipses can be overlapped while the corresponding aggregates are separated from each other. This method reduces the mutual repulsion between different aggregates. Therefore, the specimen generated with the proposed method have narrower gap between different aggregates and contain more content of aggregates. Furthermore, the computation speed for generating the model is also improved. Meanwhile, the aggregates are put in randomly in each grading with different gradations, which guarantees the rationality of the aggregates distribution in the specimen. Numerical experiments show that, with this method, the geometrical model of specimen with the property that the aggregates content is up to 75% according to three gradations can be generated in a relatively short time. Thusly, this method can be used to simulate aggregates putting-in model to generate concretes which are in a great mass, fully-graded and high-strength. Finally, the mechanical analysis of examples is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: concrete; aggregate; random packing; coverage elliptic; grading

在混凝土细观结构试件的创建中，如何缩小骨料之间的空隙、提高骨料的含量、加快生成速度，是主要的研究课题。从 1984 年开始[1]，就有许多学者对此进行了研究，已经得到了一些二维、三维的多种形状骨料的投放算法。例如：Wang 等[2]提出的方法：先按级配要求生成各种尺寸的骨料，再将骨

收稿日期：2012-05-30；修改日期：2012-10-06
基金项目：国家自然科学基金项目(11171181)
通讯作者：宋来忠(1962－)，男，湖北南漳人，教授，学士，从事计算力学、计算辅助几何设计等研究(E-mail: slz@ctgu.edu.cn).
作者简介：沈　涛(1988－)，男，湖北随州人，硕士生，从事计算力学研究(E-mail: 872000938@qq.com)；
余　波(1979－)，男，湖北长阳人，副教授，博士，从事图形图像处理研究(E-mail: changyangyubo@ctgu.edu.cn).

料逐个随机投放到一个给定的区域中，接着判断该骨料是否满足条件，若不满足，则重新投放该骨料。沿用文献[2]的方法，高政国、刘光廷[3−4]、郑建军[5]、张剑[6]、高巧红[7]等讨论了各种形状骨料的投放情况。但该种方法会使骨料的影响区域过大，所以在投放后期，会因为大量空间已经被骨料的影响区域占据，新骨料的投入比较困难，达不到实际骨料的含量。为了改进文献[2]的方法，孙立国、杜成斌等[8−9]提出了先生成较松散的骨料，然后再对骨料进行随机凸延拓的方法。如此，的确是提高了骨料的投放效率，但对高含量试件的创建仍然很困难。同样为了提高投放效率，覃伟平等[10]则将投放区域划分成若干个小区域，先直接在小区域内投放骨料，然后，再进行一定的转动或平移，如此投放的效率也比较高，但由于事先划分了区域，使得骨料之间的孔隙仍然较大，因而填充率仍然较低，也难以达到实际混凝土的骨料含量。

实际上，在二维情形，大体积全级配混凝土的粗骨料含量一般高达 70%~80%(面积比)，按上述这些文献的方法，难以生成骨料含量如此之高的试件的问题在于：在这些文献中所生成的骨料没有给出方便使用的数学描述(比如一般方程、参数方程等)，因而只能用“多边形侵入判别准则”来判断骨料间的相互位置关系，而不能直接根据骨料本身的特性来判别，使得骨料之间的孔隙过大，难以生成高含量的骨料模型。

为了使骨料具有方便使用的数学描述，许多研究者在二维的情形将骨料的形状假设为圆或椭圆；在三维的情形，假设骨料的形状为球或椭球。例如：文献[11－13]假设骨料为圆(二维)或球(三维)，这样就可以利用圆或球的方程，比较容易的按级配生成高含量的试件。又如：文献[14－16]假设骨料为椭圆(二维)或椭球(三维)，但由于研究者没有充分利用骨料的方程来确定骨料间的位置关系，使得骨料的含量很低，达不到应用的要求。在[17－18]等文献中，假设骨料为广义椭圆(球)，创建了具有较高骨料含量的混凝土细观模型。但无论是圆(球)、椭圆(椭球)还是广义椭圆(球)，与实际骨料的形状的差异都比较大。

另外，有研究表明[4]，骨料的尺寸、形状和分布直接影响混凝土强度特性，所以在混凝土试件的模拟中，有三个值得注意的问题：1) 所生成的骨料的形状是否更接近实际，是否有(参数)方程表示(这对于进一步研究有至关重要的作用，比如有限元网格划分等)；2) 所生成试件的骨料含量、级配等是否在统计意义上与实际相符；3) 创建试件的速度是否能让人接受。针对这些问题，受上述文献的启发，作者在文献[19]中，基于(椭)圆覆盖，使用自由曲线变形技术，给出了不规则骨料颗粒的参数方程，并提出了生成试件的算法。解决了对不规则骨料颗粒的参数方程表达问题。但基于文献[14]的这个算法有一个缺陷：由于覆盖(椭)圆相互分离，且骨料在覆盖(椭)圆的内部，所以每颗骨料的影响区域过大，这仍然是没有充分利用骨料的参数方程所导致的。为了克服这一缺陷，在此提出如下解决方法：1) 每生成一个覆盖椭圆，随即变形成为一颗具有参数方程的不规则骨料；2) 改进文献[14]的算法，把判断椭圆之间的位置关系，换成判断点与椭圆的位置关系，让欲生成的覆盖椭圆的中心，都在已生成骨料的覆盖椭圆的外部产生；3) 利用已生成的骨料的参数方程，直接计算点与已生成骨料的距离。这样：第一，可降低判断平面上一点，是否在所有已生成的骨料的外面的难度，从而不明显减慢生成速度；第二，覆盖椭圆可能有重叠，骨料却相互分离，减小了骨料的影响区域，可以提高生成试件中骨料的含量。

1　平面上点与椭圆的位置关系判别

假设平面上椭圆的中心在 $O(x_0, y_0)$，长半轴长为 a，短半轴长为 b $(a > b)$，椭圆的长轴与 x 轴正向的夹角为 α ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$)，若记：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

那么椭圆参数方程和一般方程可分别表示为：

$$\varGamma : \boldsymbol{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$(x - x_0, y - y_0) A \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 1 \tag{2}$$

考虑函数：

$$\varphi(x, y) = (x - x_0, y - y_0) A \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} - 1 \tag{3}$$

则有如下判别准则。

准则：设 $P(x,y)\in R^2$，那么:若 $\varphi(x,y)>0$，则 $P(x,y)$ 在椭圆的外部;若 $\varphi(x,y)=0$ 则 $P(x,y)$ 在椭圆上；若 $\varphi(x,y)<0$，则 $P(x,y)$ 在椭圆的内部。

2　单颗骨料的生成

为了使每颗骨料的轮廓线具有参数方程，要用椭圆变形得到不规则骨料的轮廓线，这需要使用作者在文献[19]中给出的伸缩因子函数，为了叙述方便，现表述如下。

2.1　伸缩因子

设 $[a_0-r_1,a_0+r_1]$ 和 $[a_0-r_2,a_0+r_2]$ 是 R^1 上关于 a_0 对称的两个区间，其中 $0\leqslant r_1<r_2$，令 $t=(x-a_0)^2$，作 R^1 上的 C^∞ 函数：

$$g(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{(t-r_1^2)(t-r_2^2)}} & 0\leqslant r_1^2<t<r_2^2\\ 0 & t\leqslant r_1^2,\ t\geqslant r_2^2\end{cases}\tag{4}$$

令：

$$B(x)=\int_t^{+\infty}g(s)\mathrm{d}s\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\mathrm{d}s\tag{5}$$

则 $B(x)$ 称为 R^1 上的基本伸缩因子。$[a_0-r_2,a_0+r_2]$ 为支区间，$[a_0-r_1,a_0+r_1]$ 为峰值区间。基本伸缩因子函数的性质，以及在变形过程中，对变形的控制主要方式、方法可参见文献[19]。

2.2　单颗卵石骨料的参数化描述

卵石是在自然环境中，由水对石块的冲刷使其滚动摩擦而形成的，随着时间的增长，所有的棱角都会逐渐被磨去，故其几何外型以球面为极限，再加上人工的筛选，所以，二维的情形可以考虑用椭圆作为覆盖。然后控制覆盖椭圆向内伸缩，随机生成卵石形骨料及其粘结带的轮廓线。

设覆盖椭圆的中心在 $O(x_0,y_0)$，长半轴长为 a，短半轴长为 $b\,(a\geqslant b)$，椭圆的长轴与 x 轴正向的夹角为 α ($0\leqslant\alpha\leqslant\pi$)，参数方程为式(1)。那么，由椭圆式(1)变形得到的卵石形骨料参数方程的参数选取有如下规律：1) 支区域：随机地把 $I=[0,2\pi]$ 分成 2~5 个子区间作为支区域 I_i；2) 峰值区域：取单点，即支区域的中点；3) 变形中心都选覆盖椭圆的中心，即 $O_i'=O$；4) 伸缩系数阵 $D_i=\mathrm{diag}(\alpha_{1_i},\alpha_{2_i})$ 的伸缩系数宜在[–0.16, –0.10]内随机取得；5) 丰满指数宜取奇数。逐次在每一个 I_i 上作伸缩得到的粘结界面的外轮廓线与骨料轮廓线，分别为：

$$\boldsymbol{P}_d(t)=(x_d(t)\quad y_d(t))'=\sum_{i=1}^{n}\{(D_iB(t,a_{0_i},r_i)+E)(\boldsymbol{P}(t)-O)+O\}\tag{6}$$

$$\boldsymbol{P}_g(t)=\boldsymbol{P}_d(t)-\gamma(\boldsymbol{P}_d(t)-\boldsymbol{O})/\|\boldsymbol{P}_d(t)-\boldsymbol{O}\|\tag{7}$$

其中：$t\in[0,2\pi]$；γ 可取 0.003(粘结界面的厚度)。式(6)、式(7)表示的轮廓线所围的面积公式分别为：

$$S_d=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\|\boldsymbol{P}_d(t)-\boldsymbol{O}\|^2\mathrm{d}t,\ S_g=\int_0^{2\pi}\|\boldsymbol{P}_g(t)-\boldsymbol{O}\|^2\mathrm{d}t\tag{8}$$

而周长分别为：

$$L_d=\int_0^{2\pi}\|\boldsymbol{P}_d'(t)\|\mathrm{d}t,\ L_g=\int_0^{2\pi}\|\boldsymbol{P}_g'(t)\|\mathrm{d}t\tag{9}$$

对应参数 $[t_i,t_j]\subset[0,2\pi]$ 的弧长:

$$L_d(t_i,t_j)=\int_{t_i}^{t_j}\|\boldsymbol{P}_d'(t)\|\mathrm{d}t,\ L_g(t_i,t_j)=\int_{t_i}^{t_j}\|\boldsymbol{P}_g'(t)\|\mathrm{d}t\tag{10}$$

其中：$i=1,\cdots n,\mathrm{mod}(n)$。

求平面任意点 $P_0(x_0,y_0)$ 到卵石骨料 Ω 边界的距离可由求解如下优化问题得到：

$$\begin{cases}\min d(P_0,\Omega)=\|\boldsymbol{P}_d(t)-\boldsymbol{P}_0\|\\ \mathrm{s.t.}\boldsymbol{P}_d(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\{(D_iB(t,t_{0_i},r_{1_i},r_{2_i})^{k_i}(\boldsymbol{P}(t)-O_i')\}+\boldsymbol{P}(t)\end{cases}\tag{11}$$

2.3　单颗碎石骨料的参数化描述

仍设覆盖椭圆为式(1)，用椭圆覆盖在变形区间沿向量场收缩变形得到碎石骨料及其粘结界面的轮廓。可选取覆盖椭圆上待变形弧段中点的单位法向量，作为该弧段的变形向量场(注：也可取其它向量场)。收缩系数是与弧长参数有关的，为了使其成为近似多边形，在编程实现时，应避免出现非常极端的情况：出现过长或过短的“边”，也就是说要控制所划分的小区间 $I_i=[a_{0_i}-r_i,a_{0_i}+r_{ii}]$，不出现过长或过短。否则，对有限元网格的生成会带来麻烦。碎石骨料的粘结界面的外轮廓线可表示为：

$$\boldsymbol{P}_d(t)=\boldsymbol{P}(t)+\sum_{i=1}^{n}D_iB(t,a_{0_i},r_i)^{k_i}\boldsymbol{S}_i(t)\tag{12}$$

其中 $t\in[0,2\pi]$，$\boldsymbol{S}_i(t)$ 为变形单位向量场，系数选取可按如下规律：1) 支区域：随机的把 $I=[0,2\pi]$ 分成 4~7 个子区间作为支区域；2) 而丰满指数取 1；3) 伸缩矩阵 $D_i=-\mathrm{diag}(\alpha_{1_i},\alpha_{2_i})$ 中的伸缩系数取法：取 α_{1_i}=min{“椭圆中心与待变形弧段端点所成的两向量之和的二分之一与变形单位向量场的内积”，0.2}，α_{2_i} 取 α_{1_i} 的 0.6 倍~0.8 倍。骨料轮廓线的参数方程为：

$$\boldsymbol{P}_g(t)=O+\delta(\boldsymbol{P}_d(t)-O)\tag{13}$$

其中，$0.994 \leqslant \delta \leqslant 0.9985$，与颗粒经有关(要使粘结界面的厚度约为 0.003)；面积仍然用式(8)计算，周长用式(9)计算，弧长用式(10)计算。

求平面上任意点 $P_0(x_0, y_0)$ 到碎石骨料 Ω 边界的距离可由求解如下优化问题得到：

$$\begin{cases} \min d(P_0, \Omega) = \|\boldsymbol{P}_d(t) - \boldsymbol{P}_0\| \\ \text{s.t. } \boldsymbol{P}_d(t) = \boldsymbol{P}(t) + \sum_{i=1}^{n} D_i B(t, a_{0_i}, r_i)^{k_i} \boldsymbol{S}_i(t) \end{cases} \tag{14}$$

3 求点到骨料距离的搜索算法

求点到骨料距离，即求解式(11)和式(14)，可以用下面简单的搜索方法求近似解：

算法 1. 求点到骨料距离的搜索法

第 1 步：给一个适当(为控制精度)大的自然数 m, 取 $t_{j+1} = 2j\pi / m, j = 0, \cdots, m-1$，再将上述变形中的所有支区域的端点参数加上，重新依次排列得到 n 个参数点：$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 2\pi$；

第 2 步：由式(6)或式(12)计算边界上对应的 n 个点：$\boldsymbol{P}_d(t_i), i = 0, \cdots, n-1$；

第 3 步：计算 n 个值：$d_i = \|\overline{P_0 P_d(t_i)}\|$，$i = 0, \cdots, n-1$；

第 4 步：取 $d = \min(d_i, i = 0, \cdots, n-1)$ 作为所求距离的近似值。

4 距离的误差估计

假设 $P_d(\bar{t})$ 是颗粒边界(无论式(6)还是式(12))上一点，使得骨料外一点 P_0 到颗粒的距离 $d = P_0 P_d(\bar{t})$，如果 $P_d(\bar{t})$ 是算法一中边界的分点，则所得的结果没有误差。若 $P_d(\bar{t})$ 是介于上述颗粒边界分法的两个分点 $P_d(t_i)$ 与 $P_d(t_{i+1})$ 之间的，由于上述变形得到的 $P_d(t_i)$ 与 $P_d(t_{i+1})$ 之间的曲线弧是光滑的，所以 $P_0 P_d(\bar{t})$ 为颗粒边界在 $P_d(\bar{t})$ 处的法线，从而，可让 n 充分大，使 $\overset{\frown}{P_d(t_i) P_d(t_{i+1})}$ 是向外凸的弧(如图 1)，

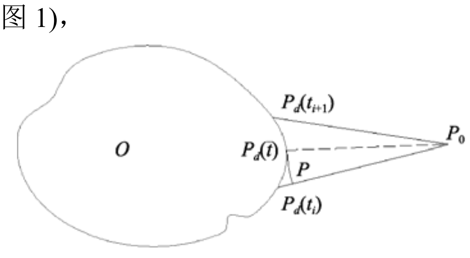

图 1 误差分析图

Fig.1 Error analysis

又设 $\overset{\frown}{PP_d(\bar{t})}$ 是以 P_0 为圆心的圆弧，那么按算法 1 所求的距离的误差 $\delta = \|\overline{PP_d(t_i)}\|$，由于：

$$\overset{\frown}{P_d(t_i) P_d(t_{i+})} \approx \overset{\frown}{PP_d(\bar{t})}, \quad n \to \infty$$

所以：

$$\delta = \|\overline{PP_d(t_i)}\| \leqslant \overset{\frown}{P_d(t_i) P_d(t_{i+1})} + \overset{\frown}{PP_d(\bar{t})} \approx 2\overset{\frown}{P_d(t_i) P_d(t_{i+1})}, \quad n \to \infty$$

但对算法 1 有：$\overset{\frown}{P_d(t_i) P_d(t_{i+1})} \leqslant 2\pi a / n, (n \to \infty)$，故：

$$\delta \leqslant 4\pi a / n, \quad n \to \infty \tag{15}$$

5 不规则颗粒随机分布区域的模拟

混凝土试件可归结为有大量不规则颗粒随机分布区域。在工程计算中，首先是对材料的组成和形状进行统计得到各种概率分布，然后根据这些分布用计算机模拟。按照这样思路，为了简便起见，作如下假设：

1) 模拟材料的区域不妨设为矩形区域(单位：cm，下同)；

2) 每一颗粒由椭圆控制伸缩变形得到；

3) 椭圆的中心 $O(x_0, y_0)$以及生成颗粒区域边界的各个参数都属于某一确定的概率分布(不失一般性，这里假定都是属于某一区域内均匀分布)。

这样，可以得到针对矩形区域产生大量具有随机分布颗粒的快速算法，基本思想是：相对于已生成的颗粒区域，在模拟区域中随机生成一点 P，判断它是否在所有已生成颗粒的覆盖椭圆的外部，若是，则计算它与所有已生成颗粒的距离；若这些距离中的最小者大于欲新生成的颗粒径的一半 a，则先以 a 为长半轴，P 为中心生成新的覆盖椭圆，再将其变形得到新的颗粒(变形时应注意保持颗粒径)。从而，得到如下算法 2。

算法 2. 产生随机颗粒区域的快速随机投放算法

以颗粒最大总数 N、或颗粒的总面积 S、或拒绝总数 K 来控制停止；用 k 表示连续产生颗粒而被拒绝的次数；n 表示已生成的合适的颗粒数；s 表示已生成的合适的颗粒的面积总数。产生随机颗粒区域的快速随机投放算法的主要步骤：

第 1 步：输入产生随机颗粒的各种参数及其分布区域、骨料最大总数 N、骨料的总面积 S 以及拒绝总数 K，令 n=1，k=0，s=0;

第 2 步：在颗粒径大小的二分之一范围内随机产生一个 a；

第 3 步：在模拟区域内随机生成一点 (x_0, y_0)，

判断它是否在所有已生成的颗粒的覆盖椭圆的外部；否，令 k=k+1，转第 4 步；若是，由算法 1 计算与所有已生成颗粒的距离，判断最小的距离 d 是否≥a(注意误差)；否，令 k=k+1，转第 4 步；是，取椭圆的中心 O 坐标为 (x_0, y_0)，长半轴为 a 生成椭圆，再随机变形得到骨料颗粒，并计算面积 s_0，s=s+s_0，n=n+1，到第 4 步；

第 4 步：如果 $n>N$，或 $k>K$，或 $s>S$，结束；否则，转第 2 步。

注：当 (x_0, y_0) 在所有已生成颗粒的外部，计算 (x_0, y_0) 与已生成颗粒距离时，可分两步，先计算 (x_0, y_0) 与已生成颗粒中心距离 dd，如果 $dd>a$+已生成颗粒覆盖椭圆的长半轴长，可令 $d=dd-a$，否则，再计算距离。这样需要用搜索算法计算距离的仅是与 (x_0, y_0) 最近的颗粒，故而可以提高速度。

6　混凝土数值模拟实例

6.1　几何模型的建立

由于用判断点与颗粒覆盖椭圆的关系代替判断点与颗粒的关系，降低了计算的复杂性；直接计算点到颗粒的距离，降低了骨料之间的排挤性。从而，使得试件中骨料的影响区域缩小，分布更加合理，密度增加，而且可更加快速生成试件。值得注意的是，由于误差估计式(15)中，n 必须充分大，但取得太大，又影响计算速度，所以，在模拟时，要注意检验。以下的几何模型，都是在配置为：AMD Phenom(tm) 9500 Quad Core CPU 2.20GHz，2.0GB 内存的台式 PC 机上，采用 MATLAB 编程完成。按级配、颗粒径的大小范围，从大到小、依次投放。

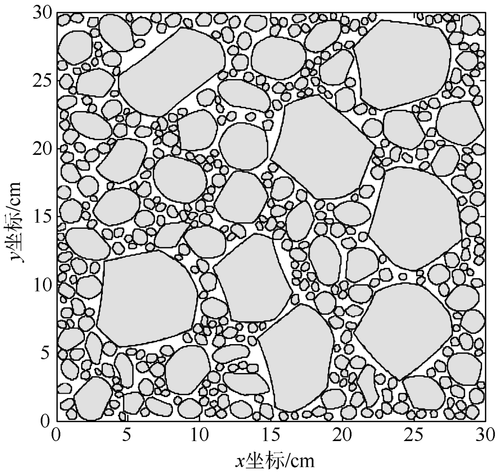

图 2　三级配碎石骨料混凝土试件(75.71%)

Fig.2　Three grading gravel aggregates specimen of concrete (75.71%)

图 2 的模拟区域为 $[0,30]\times[0,30]$；碎石型骨料，骨料颗粒的直径分三级。颗粒经分别为：2~4、1~2、0.5~1；伸缩系数按上述 2.3 节的方法取值。变形向量场取与端点所形成的向量垂直的单位向量；骨料的最大形变区间数目 $I_{\max}=7$，最小形变区间数目 $I_{\min}=4$。假设随机变量都为均匀分布。模拟结果：三种骨料的数目分别为 8、35、408，总数为 451；骨料面积分别为 275.8067、202.9114、202.9114，比例为 0.3065∶0.2255∶0.2255(约为 4∶3∶3)，总面积为 681.3740，占试件总面积的 0.7571；粘结界面的总面积为 4.1067，占试件总面积的 0.0046；界面与骨料总面积为 685.4807，占总面积的 0.7616。生成时间 8.6039min。

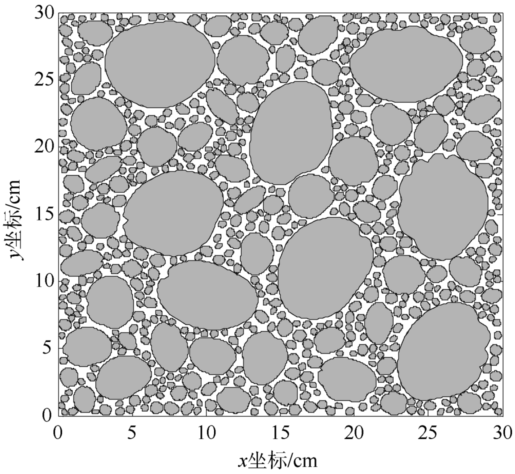

图 3　三级配卵石骨料混凝土试件(76.64%)

Fig.3　3 grading cobble aggregates specimen of concrete (76.64%)

图 3 的模拟区域为 $[0,30]\times[0,30]$；卵石型骨料，骨料颗粒的直径分三级。颗粒经分别为：2~4、1~2、0.5~1；取伸缩系数取值的上界 $\alpha_{\max}=-0.1$ 与下界 $\alpha_{\min}=-0.16$；骨料的最大形变区间数目 $I_{\max}=5$，最小形变区间数目 $I_{\min}=2$；随机变量都为均匀分布。模拟结果：三种骨料数目分别为 8、34、583，总数为 625；骨料面积分别为 279.0628、203.3560、202.5624，比例为 0.3101∶ 0.2260∶ 0.2251(约为 4∶3∶3)，总面积为 684.9812，占试件总面积的 0.7611；粘结界面的总面积为 4.7844，占试件总面积的 0.0053；界面与骨料总面积为 689.7657，占总面积的 0.7664。生成时间 8.9012min。

当然，与其他随机投放算法一样，虽然每颗骨料的影响区域减小，但由于所生成的骨料之间的相互排斥性存在，每次循环只投入一个颗粒，当骨料含量达到 75%以后，由于大量空间被骨料占据，如

果再想投入一个颗粒就很困难了，投放速度会迅速减慢，而要达到很高的含量(80%以上)，就很难实现。但图 4 是作者一次成功实验的模拟图。

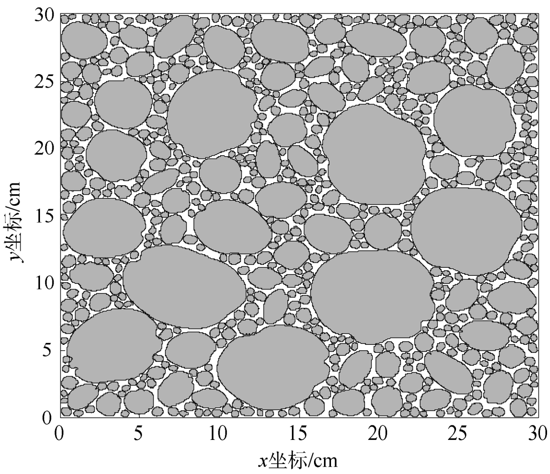

图 4 三级配卵石骨料混凝土试件(80.56%)

Fig.4 Three grading cobble aggregates specimen of concrete (80.56%)

图 4 的模拟区域为[0,30]×[0,30]；骨料颗粒的直径分三级。颗粒经分别为：2~4、1~2、0.5~1；取伸缩系数取值的上界 $\alpha_{\max} = -0.1$ 与下界 $\alpha_{\min} = -0.16$；骨料的最大变形区间数目 $I_{\max} = 5$，最小变形区间数目 $I_{\min} = 2$。假设随机变量都为均匀分布。模拟结果：三种骨料数目分别为 10、43、550，总数为 603；骨料面积分别为 295.3003、212.1317、212.6497，比例为 0.3281∶0.2357∶0.2363(约为 4∶3∶3)，总面积为 720.0817，占试件总面积的 0.8001；粘结界面的总面积为 4.9245，占试件总面积的 0.0055；界面与骨料总面积为 725.0050，占总面积的 0.8056。时间 28.5007h，几乎所有的时间都用在最后 1%左右的骨料生成上。虽然有些耗时(还是在可以接受的范围内)，但其含量超过最新的文献[20]中报道的 80%。

6.2 有限元力学分析试算

为了说明上述方法，在混凝土数值模拟研究中的有效性，按照作者文献[19]中提到的方法，对图 2、图 3 所表示的试件进行了细观混凝土线性有限元分析试算。首先将 MATLAB 生成的边界数据导入 AutoCAD 中生成混凝土试件的几何模型：形成面域，作差集、分解等处理；将骨料、粘结界面以及砂浆分别做成 3 个图形，都输出为扩展名为.sat 的 3 个文件，再导入 ANSYS 中，作布尔运算—粘连。然后，将单元种类选为 Plane42，分别取：骨料的弹性模量为 55GPa、泊松比为 0.16；粘结界面弹性模量为 25GPa、泊松比为 0.16；砂浆基质弹性模量为 26GPa、泊松比为 0.22。

图 5 是使用 ANSYS 软件对图 2 所示的碎石试件进行的有限元网格划分图。划分网格时，是先划分砂浆区域，控制单元大小为 1.5mm，进行三角形自由网格划分(Free Mesh)，再划分介质层单元，控制单元大小为 0.06mm，进行四边形自由网格划分，然后对骨料进行网格划分，控制单元大小为 6mm，进行自由网格划分。生成的碎石骨料混凝土试件有限元网格，包含 934089 个节点，651477 个砂浆单元，689680 个骨料单元和 267564 个粘结单元。

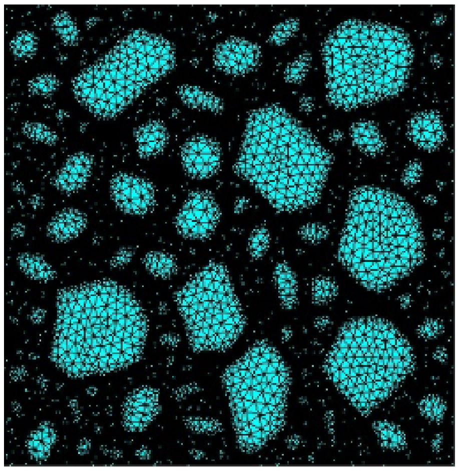

图 5 碎石骨料模型网格划分

Fig.5 The finite element mesh of the gravel aggregates model

图 6 是使用 ANSYS 软件对图 3 所示的卵石试件进行的有限元网格划分图。划分网格时，先划分介质层单元，再对骨料进行划分，然后在对砂浆单元进行划分。生成的卵石骨料混凝土试件有限元网格，包含有 1063252 个节点，738419 个砂浆单元，761769 个骨料单元和 313557 个粘结界面单元。

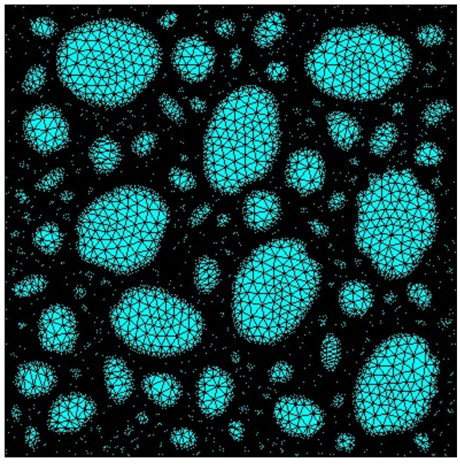

图 6 卵石骨料模型网格划分

Fig.6 The finite element mesh of the cobble aggregates model

由于模型中骨料含量较高，且介质层厚度仅为0.03mm，导致数据量非常大，划分网格时十分困难。如果对网格划分设置的单元大小和三种材料的划分顺序不合理，会导致划分失败。当单元设置过大时，会导致三种材料单元不容易衔接过渡好，计算精度误差较大；单元设置过小时，节点和单元数量过大，后续的施加荷载、力学分析就无法进行下去，需要反复调试。为了检验有限元网格的划分是否成功，对图 5、图 6 所示的碎石和卵石骨料的数值模型进行拉伸数值试验，约束底端，对顶端都施加1.6MPa 的均布荷载，得到的第一主应力图和 y 方向应力图分别如图 7、图 8、图 9、图 10。

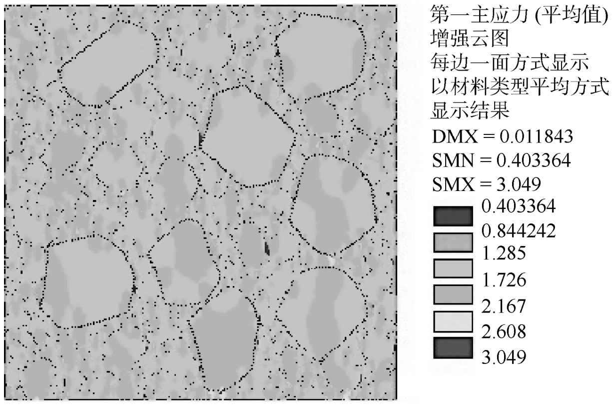

图 7　碎石骨料混凝土第一主应力分布

Fig.7　The first principal stress nephogram of the gravel aggregates model

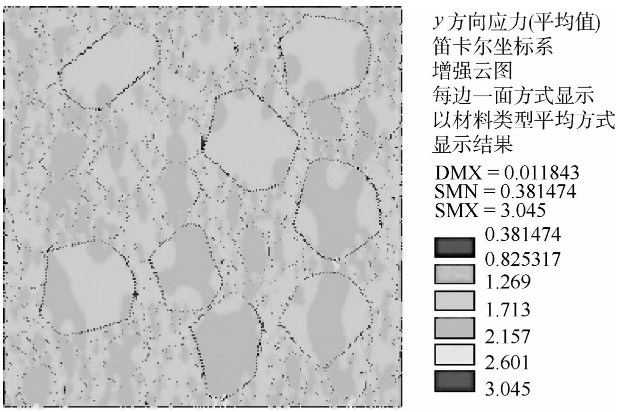

图 8　碎石骨料混凝土 y 方向上的应力分布

Fig.8　The y-stress nephogram of the gravel aggregates model

从图 7、图 8 可以看出：碎石骨料模型应力较大值分布在碎石棱角部位，碎石平直边的应力则相对小些。在 y 方向上的应力集中多出现在骨料的上下端，在水平方向上出现压应力，试件大部分区域的应力处于 1.5MPa~2MPa。

从图 9、图 10 可以看出：在第一主应力的分布区域上，卵石骨料模型的应力较大值分布在骨料密集且粒径相差较大的骨料相邻的区域。试件在 y 方向上的应力，集中出现在骨料的上下端，在水平方向上出现压应力，试件大部分区域的应力处于1.5MPa~2MPa。

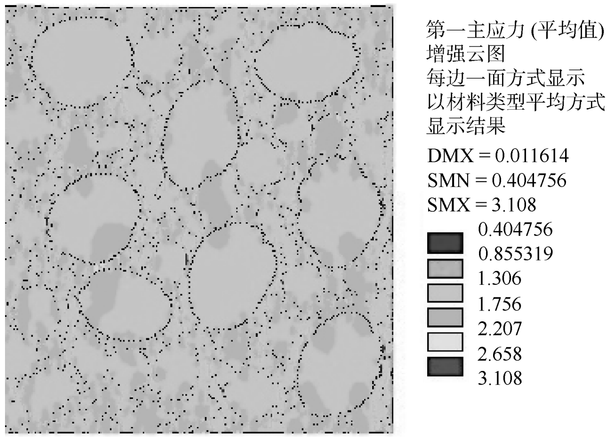

图 9　卵石骨料混凝土第一主应力分布云图

Fig.9　The first principal stress nephogram of the cobble aggregates model

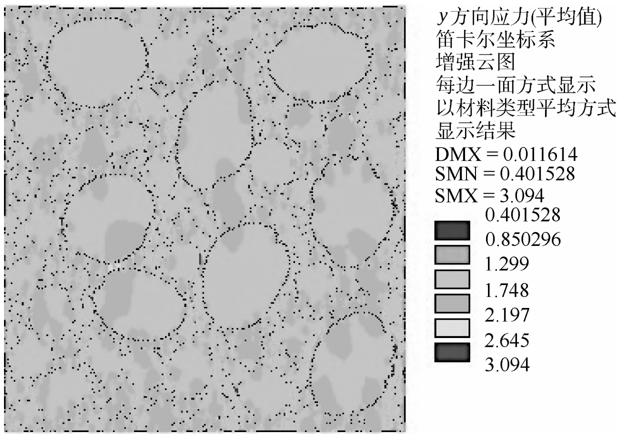

图 10　卵石骨料混凝土 y 方向上的应力分布

Fig.10　The y-stress nephogram of the cobble aggregates model

可以发现，在均匀分布的相同的材料参数及拉伸荷载条件下时，卵石形混凝土随机骨料试件应力分布较碎石形骨料试件更为均匀，在骨料含尖角及尖锐凸起处出现应力集中现象，试件更容易在这种地方首先发生破坏，而在平直或圆滑的骨料边缘应力分布均匀。这些都符合力学实验现象与规律，说明所建的模型能满足力学实验的仿真要求。

7　结论

由于瓦拉文(Walaraven J C)公式[21]将三维富勒(Fuller)骨料级配曲线转化为二维平面骨料级配问题，这样可以基于瓦拉文公式生成二维随机骨料模型，避免了三维试件计算上的困难，所以研究二维

随机骨料模型非常有意义。

上述实验表明，本文提出的混凝土试件的模拟算法，是一个有效的算法。与以往的算法相比大致有如下优点：

(1) 在混凝土材料的模拟中，按三级配可以生成含骨料 75%以上的试件，根据相关文献[9]的记述，模拟如此高含量的试件，可以满足大体积、全级配、高强度混凝土的骨料投放模拟；

(2) 该算法充分利用了骨料边界的代数方程，判断平面上的点与覆盖椭圆的位置关系，以及快速计算点到骨料的距离，不仅计算的复杂性大大降低，也使生成的骨料之间的相互排斥性大大降低；

(3) 可控制生成较小的试件，以便使用 ANSYS、ABAQUS 等应用软件作力学分析实验；

(4) 该算法易于推广到三维。

参考文献：

[1] Wittmann F H, Roelfstra P E, Sadouki H. Simulation and analysis of composite structures [J]. Materials Science and Engineering, 1985, 68(2): 239－248.

[2] Wang Z M, Kwan A K H, Chan H C. Mesoscopic study of concrete I: Generation of random aggregate structure and finite element mesh [J]. Computers and Structures, 1999,70: 533－544.

[3] 高政国, 刘光廷. 二维混凝土随机骨料模型研究[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(5): 710－714.
Gao Zhengguo, Liu Guangting. Two-dimensional random aggregate structure for concrete [J]. Journal of Tsinghua University (Science & Technology), 2003, 43(5): 710－714. (in Chinese)

[4] 刘光廷, 高政国. 三维凸型混凝土骨料随机投放算法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(8): 1120－1123.
Liu Guangting, Gao Zhengguo. Random 3-D aggregate structure for concrete [J]. Journal of Tsinghua University (Science & Technology), 2003, 43(8): 1120－1123. (in Chinese)

[5] 郑建军, 周欣竹, 刘彦青. 混凝土骨料二维分布的模拟和应用[J]. 水利学报, 2003, 34(7): 80－84.
Zheng Jianjun, Zhou Xinzhu, Liu Yanqing. Simulation of 2-D distribution of concrete aggregates and its application [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003, 34(7): 80－84. (in Chinese)

[6] 张剑, 金南国, 金贤玉. 混凝土多边形骨料分布的数值模拟方法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2004, 38(5): 581－585.
Zhang Jian, Jin Nanguo, Jin Xianyu. Numerical simulation method for polygonal aggregate distribution in concrete [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2004, 38(5): 581－585. (in Chinese)

[7] 高巧红, 关振群, 顾元宪. 混凝土骨料有限元模型自动生成方法[J]. 大连理工大学学报, 2006, 46(5): 641－646.
Gao Qiaohong, Guan Zhenqun, Gu Yuanxian. Automatic generation of finite element model for concrete aggregate [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2006, 46(5): 641－646. (in Chinese)

[8] 孙立国, 杜成斌, 戴春霞. 大体积混凝土随机骨料数值模拟[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2005, 33(3): 291－295.
Sun Liguo, Du Chengbin, Dai Chunxia. Numerical simulation of random aggregate model for mass concrete [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2005, 33(3): 291－295. (in Chinese)

[9] 杜成斌, 孙立国. 任意形状混凝土骨料的数值模拟及其应用[J]. 水利学报, 2006, 37(6): 662－667,673.
Du Chengbin, Sun Liguo. Numerical simulation of concrete aggregates with arbitrary shapes and its application [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2006, 37(6): 662－667, 673. (in Chinese)

[10] 覃伟平, 杨新华, 陈传尧. 一种快速的三维凸型混凝土骨料随机投放算法[J]. 水电能源科学, 2006, 24(3): 39－42.
Qin Weiping, Yang Xinhua, Chen Chuanyao. Fast random 3-D aggregate packing algorithm for concrete [J]. Water Resources and Power, 2006, 24(3): 39－42. (in Chinese)

[11] van Mier JGM, van Vliet MRA. Influence of microstructure of concrete on size/scale effects in tensile fracture [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70: 2281－2306.

[12] Leite J P B, Slowik V, Mihashi H. Computer simulation of fracture processes of concrete using mesolevel models of lattice structures [J]. Cement and Concrete Research, 2004, 34(6): 1025－1033.

[13] 宋晓刚, 杨智春. 一种新的混凝土圆形骨料投放数值模拟方法[J]. 工程力学, 2010, 27(1): 154－159.
Song Xiaogang, Yang Zhichun. A new method to simulate round concrete aggregate generation [J], Engineering Mechanics, 2010, 27(1): 154－159. (in Chinese)

[14] 李友云, 崔俊芝. 具有大量椭圆颗粒/空洞随机分布区域的计算机模拟及其改进三角形自动网格生成算法[J]. 计算力学学报，2004, 21(5): 540－545.
Li Youyun, Cui Junzhi. Computer simulation method for the domain With large numbers of random ellipse grains/cavities and the improving automatic triangle mesh generation algorithm [J]. Chinese Journal of computational Mechanics, 2004, 21(5): 540－545. (in Chinese)

[15] 李友云, 何长洲, 崔俊芝, 龙述尧. 大量椭球颗粒随机分布三维区域的模拟及其四面体网格快速生成算法[J]. 计算力学学报，2008, 25(3): 318－325.
Li Youyun, He Changzhou, Cui Junzhi, Long Shuyao. Numerical simulation on three-dimensional domains with large numbers of grains randomly distributed and fast algorithm to generate tetrahedron meshes [J]. Chinese Journal of computational Mechanics, 2008, 25(3): 318－325. (in Chinese)

[16] Yu Y, Cui J Z, Han F, An effective computer generation method for the composites with random distribution of large numbers of heterogeneous grains [J]. Composites

Science Technology, 2008, 68: 2543－2550.
[17] Zohdi T I. Computational optimization of the vortex manufacturing of advanced materials [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(46/47): 6231－56.
[18] Häfner S, Eckardt S, Luther T, Könke C. Mesoscale modeling of concrete: geometry and numerics [J]. Computers & Structures, 2006, 84: 450－61.
[19] 宋来忠, 姜袁, 彭刚. 混凝土随机参数化骨料模型及加载的数值模拟[J]. 水利学报, 2010，41(9): 93－100.
Song Laizhong, Jiang Yuan, Peng Gang. Numerical simulation of concrete random parameterized aggregate model and load test [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2010, 41(9): 93－100. (in Chinese)
[20] 秦川, 郭长青, 张楚汉. 基于背景网格的混凝土细观力学预处理方法[J]. 水利学报，2011, 42(8)：841－948.
Qin Chuan, Guo Changqing, Zhang Chuhan. A pre-processing scheme based on background grid approach for meso-concrete mechanics [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2011, 42(8): 841－948. (in Chinese)
[21] Walaraven J C, Reinhardt H W. Theory and experiments on the mechanical behavior of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading [J]. HERON, 1991, 26(1A): 26－35.
[22] 方秦, 张锦华, 还毅, 张亚栋. 全级配混凝土三维细观模型的建模方法研究[J]. 工程力学, 2013, 30(1): 14－21, 30.
Fang Qin, Zhang Jinhua, Huan Yi, Zhang Yadong. The investigation into three-dimension mesoscale modelling of fully-graded concrete [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(1): 14－21, 30. (in Chinese)
[23] 杜修力, 金浏. 混凝土材料细观单元弹模非均匀统计特性研究[J]. 工程力学, 2012, 29(10): 106－115.
Du Xiuli, Jin Liu. Research on the heterogeneous statistic properties of elasyic modulus of a concrete meso-scale unit [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(10): 106－115. (in Chinese)
[24] 王娟, 李庆斌, 卿龙邦, 管俊峰. 基于细观结构统计特征的混凝土几何代表体尺寸研究[J]. 工程力学, 2012, 29(12): 1－6.
Wang Juan, Li Qingbin, Qing Longbang, Guan Junfeng. Syudies on representative volume element size of concrete based on meso-stucture statics [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(12): 1－6. (in Chinese)

(上接第 4 页)

参考文献：

[1] Narayanan S, Balamurugan V. Finite element modeling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262(3): 529－562.
[2] Giovanni Caruso, Sergio Galeani, Laura Menini. Active vibration control of an elastic plate using multiple piezoelectric sensors and actuators [J]. Simulation Modeling Practice and Theory, 2003, 11(5/6): 403－419.
[3] Xu Yalan, Chen Jianjun. Modal-based model reduction and vibration control for uncertain piezoelectric flexible structures [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2008, 29(5): 489－504.
[4] 张京军, 曹丽雅, 袁伟泽. 压电智能结构振动的模糊控制及仿真实现[J]. 工程力学, 2009, 26(10): 228－232.
Zhang Jingjun, Cao Liya, Yuan Weize. Fuzzy control and simulation of piezoelectric intelligent structure vibration [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(10): 228－232. (in Chinese)
[5] Friswell M I, Garvey S D, Penny J E T. Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques [J]. Journal of sound and Vibration, 1995, 186(2): 311－323.
[6] 张建华, 刘建军, 张庆国. 基于平衡降阶法的结构振动模态预测控制[J]. 工程力学, 2006, 23(5): 20－23.
Zhang Jianhua, Liu Jianjun, Zhang Qingguo. Modal predictive control of structural vibration based on balanced reduction [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(5): 20－23. (in Chinese)
[7] Moheimani S O R. Minimizing the out-of bandwidth dynamics in the model of reverberant system: Implication on Spatial H_∞ control [J]. Automatica, 2000, 36(7): 1023－1033.
[8] Xie Yong, Zhao Tong, Cai Guoping. Model reduction and active control for a flexible plate [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2011, 24(5): 467－476.
[9] 徐亚兰, 陈建军. 模型不确定柔性结构的多目标振动控制[J]. 应用力学学报, 2006, 3(23): 377－382.
Xu Yalan, Chen Jianjun. Multiobjective vibration control for uncertain flexible structures [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006, 3(23): 377－382. (in Chinese)
[10] Samuel da silva, Vicente lopes junio. Design of a control system using linear matrix inequalities for the active vibration control of a plate [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2006, 17(1): 81－93.
[11] 徐洋, 姜洪洲, 叶正茂. H_∞ 控制在 AMD Benchmark 结构主动控制中的应用研究[J]. 振动与冲击, 2005, 24(5): 15－22.
Xu Yang, Jiang Hongzhou, Ye Zhengmao. Research on the application of H_∞ control in the AMD active structure control Benchmark problem [J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24(5): 15－22. (in Chinese)