

文章编号: 1000-4750(2010)Sup.I-0020- 03

结构随机振动分析的等效激励法

*孙作玉, 王 晖

(广州大学土木工程学院, 广东, 广州 510006)

摘 要: 提出了结构随机振动分析的等效激励法, 基于结构所受随机荷载的功率谱密度构造了等效激励荷载, 以此作为该结构的确定性荷载输入, 采用常规的结构动力分析方法计算出结构的响应, 然后对响应进行 Fourier 分解, 求得单个虚拟激励对应的响应, 再进一步求出结构响应的功率谱密度。分析了单点激励下非平稳随机响应的问题, 讨论了非线性系统随机响应情况。

关键词: 随机振动分析; 虚拟激励; 等效激励; 功率谱; 非平稳随机激励

中图分类号: O324 **文献标识码:** A

EQUIVALENT EXCITATION METHOD FOR RANDOM STRUCTURAL VIBRATION ANALYSIS

*SUN Zuo-yu, WANG Hui

(College of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou, Guangdong 510006, China)

Abstract: An equivalent excitation method for random structural vibration analysis is proposed. Based on the power spectral density of input excitation, an equivalent excitation is constructed, which is adopted as a determinate input load to calculate the responses of the structure, then these responses are decomposed to special responses corresponding to their specific pseudo-excitations, and the power spectral density of the responses is derived using the specific responses. The random vibration of a linear structure under one point non-stationary excitation is studied, and a case for a nonlinear structure is discussed.

Key words: random vibration analysis; pseudo-excitation; equivalent excitation; power spectral density; non-stationary excitation

随机振动分析是研究建筑结构在随机荷载作用下安全性和可靠性的重要基础, 其核心内容主要涉及在已知随机激励功率谱密度的条件下计算结构响应的功率谱密度及响应的方差等问题。近几十年来, 国内外学者在理论上进行了多方面的探讨, 取得了一系列的研究成果^[1-2], 但是由于理论的复杂性和计算方面的困难, 这些成果在大型工程问题中的应用尚不多见。林家浩教授提出的虚拟激励法^[3], 解决了随机响应分析面临的计算精度和计算效率问题, 通过假设虚拟激励, 将原来的随机振动

分析问题, 转化为计算结构在一系列虚拟激励作用下的确定性动力学计算问题, 其计算结果与传统的 CQC(complete quadratic combination, 完全二次组合)方法具有相同的精度, 计算效率却有极大的提高, 这为随机振动分析在工程中的广泛应用打下了坚实的基础^[4-10]。本文在分析虚拟激励法原理的基础上提出了随机振动分析的等效激励法, 即将假设的各个频率对应的虚拟激励叠加在一起作为等效激励荷载, 然后计算结构在此确定性荷载激励下的动力响应, 显然该响应可以看作是前面假设的各个

收稿日期: 2009-03-15; 修改日期: 2009-12-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(50678039)

作者简介: *孙作玉(1963—), 男, 山东人, 教授, 博士, 主要从事结构振动控制研究(E-mail: sunzuoyu@163.com);

王 晖(1963—), 女, 山东人, 副教授, 学士, 主要从事结构动力分析研究(E-mail: wanghui_sunyu@163.com).

虚拟激励单独作用时对应响应的叠加,因此可以通过Fourier分解计算出各个虚拟激励单独作用时的响应,据此可以求得响应的功率谱密度及响应的方差等。这种方法仅需进行一次结构的动力响应计算,因此具有更高的计算效率。

1 等效激励法原理

1.1 随机振动的虚拟激励法^[3]

以线性系统受到自谱密度为 $S_{xx}(\omega)$ 的单点平稳随机激励 $x(t)$ 为例,按照随机振动分析理论,其响应 $y(t)$ 的自功率谱 $S_{yy}(\omega)$ 应为:

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1)$$

式中 $H(\omega)$ 为结构的传递函数,反映了结构的动力特性,其关系如下式所示:

$$S_{xx}(\omega) \rightarrow H(\omega) \rightarrow S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (2)$$

按照传递函数 $H(\omega)$ 的定义,输入激励 $x(t)$ 与结构响应 $y(t)$ 的关系为:

$$x = e^{i\omega t} \rightarrow H(\omega) \rightarrow y = H(\omega)e^{i\omega t} \quad (3)$$

若构造一个虚拟激励: $\tilde{x} = \sqrt{S_{xx}(\omega)}e^{i\omega t}$, 显然其对应的响应量应为 $\tilde{y} = \sqrt{S_{xx}(\omega)}H(\omega)e^{i\omega t}$, 即:

$$\tilde{x} = \sqrt{S_{xx}(\omega)}e^{i\omega t} \rightarrow H(\omega) \rightarrow \tilde{y} = \sqrt{S_{xx}(\omega)}H(\omega)e^{i\omega t} \quad (4)$$

将该虚拟响应量 \tilde{y} 与其共轭 \tilde{y}^* 相乘,可得:

$$\tilde{y}^* \tilde{y} = |\tilde{y}|^2 = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) = S_{yy}(\omega) \quad (5)$$

这说明通过计算虚拟响应量的自乘,就可求得输出 $y(t)$ 的自谱密度。

如果有两个虚拟响应,可以分别计算:

$$\tilde{x} = \sqrt{S_{xx}(\omega)}e^{i\omega t} \rightarrow H(\omega) \Rightarrow \tilde{y}_1 = \sqrt{S_{xx}(\omega)}H_1(\omega)e^{i\omega t}, \quad \tilde{y}_2 = \sqrt{S_{xx}(\omega)}H_2(\omega)e^{i\omega t} \quad (6)$$

则 \tilde{y}_1 与 \tilde{y}_2 的互谱为:

$$\tilde{y}_1^* \tilde{y}_2 = H_1^*(\omega)\sqrt{S_{xx}(\omega)}e^{-i\omega t}H_2(\omega)\sqrt{S_{xx}(\omega)} \cdot e^{i\omega t} = H_1^* S_{xx} H_2 = S_{y_1 y_2}(\omega) \quad (7)$$

类似地可以得到功率谱矩阵的下列算式:

$$[S_{yy}] = \{\tilde{y}\}^* \cdot \{\tilde{y}\}^T, \quad [S_{xy}] = \{\tilde{x}\}^* \cdot \{\tilde{y}\}^T, \quad [S_{yx}] = \{\tilde{y}\}^* \cdot \{\tilde{x}\}^T \quad (8)$$

若对结构的特定响应量感兴趣,如关心某一内力 f ,可施加虚拟激励 $\tilde{x} = \sqrt{S_{xx}(\omega)}e^{i\omega t}$,计算出 f 的虚拟响应 \tilde{f} ,则其自谱密度为 $[S_{ff}(\omega)] = \{\tilde{f}\}^* \cdot$

$\{\tilde{f}\}^T$,进一步可以计算其方差:

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega \quad (9)$$

与传统的结构随机振动计算方法相比,林家浩教授提出的虚拟激励法^[3],原理简明,易于应用,不但可以显著地提高计算效率,而且得到的是精确结果,克服了随机振动分析面临的计算困难,这是我国学者对这一研究领域的杰出贡献。目前相关的研究成果已经在地震工程^[4-5]和其它领域^[6-8]得到了广泛的应用。

1.2 随机振动的等效激励法

应用虚拟激励法进行结构随机振动分析,一般是在所关心的频域范围内 $\omega \in [\omega_a, \omega_b]$ 离散为 $N+1$

个频点, $\omega_k = \omega_a + \frac{k}{N}(\omega_b - \omega_a)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$,

对于每一个频点按照上述方法设定虚拟激励,计算结构的响应,然后再按照式(8)计算响应的功率谱,进而按照式(9)计算响应量的方差。可以看出对于每一个虚拟激励,都需要进行结构的动力分析,若是一个大型复杂的结构,则需要进行 $N+1$ 次计算,这一工作量依然是相当巨大。对于线性结构而言,可以应用叠加原理,即当输入是单频激励的线性叠加时,其响应也必为单频激励各自响应的线性叠加,因此可以构造一个等效激励:

$$\tilde{x}_e = \sum_{k=0}^N \sqrt{S_{xx}(\omega_k)} \cdot e^{i\omega_k t} = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \sqrt{S_{xx}(\omega)} \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (10)$$

计算结构在此等效激励作用下的响应,则有:

$$\tilde{y}_e = \sum_{k=0}^N \sqrt{S_{xx}(\omega_k)} H(\omega_k) \cdot e^{i\omega_k t} \quad (11)$$

将 \tilde{y}_e 进行 Fourier 分解,可以求得:

$$\tilde{y}_k = \sqrt{S_{xx}(\omega_k)} H(\omega_k) \cdot e^{i\omega_k t} \quad (12)$$

显然这是与虚拟激励 $\sqrt{S_{xx}(\omega_k)} \exp(i\omega_k t)$ 对应的响应,可见经过一次动力分析计算,即可求得 \tilde{y}_e ,再对 \tilde{y}_e 进行 Fourier 分解,就可以得到 \tilde{y}_k ,与前述虚拟激励法计算结果完全相同,并且由式(12)可以看出, Fourier 变换系数的平方等于其自谱密度。因此用该方法进行随机振动分析,计算工作量可以显著降低,计算精度并无任何损失。

1.3 均匀调制单点激励非平稳随机响应的等效激励法

对于线性结构受到均匀调制单点激励的情况,若演变随机外荷载激励 $f(t) = g(t)x(t)$,其中 $x(t)$ 是一平稳随机过程,调制函数 $g(t)$ 为慢变时间函

数, 已经证明^[3], 通过假设“调制的”虚拟激励:

$$\tilde{x} = g(t)\sqrt{S_{xx}(\omega)}e^{i\omega t} \quad (13)$$

可以求得与之相应的响应:

$$\tilde{y} = \sqrt{S_{xx}(\omega)} \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

式中, $h(t-\tau)$ 是单位脉冲响应函数, 仍然可以应用式(8)、式(9)进行后续的计算。

与前述分析类似, 对于线性结构, 同样假设一个“调制的”等效激励:

$$\tilde{x}_e = \sum_{k=0}^N g(t)\sqrt{S_{xx}(\omega_k)}e^{i\omega_k t} \quad (15)$$

根据线性系统的叠加原理, 可以求得与之相应的响应为:

$$\tilde{y}_e = \sum_{k=0}^N \sqrt{S_{xx}(\omega_k)} \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)e^{i\omega_k\tau} d\tau \quad (16)$$

若设 $\tilde{h}(t-\tau) = h(t-\tau)g(\tau)$, $\tilde{H}(\omega)$ 为与 $\tilde{h}(t-\tau)$ 对应的传递函数, 则有:

$$\tilde{y}_e = \sum_{k=0}^N \sqrt{S_{xx}(\omega_k)} \tilde{H}(\omega_k) \exp(i\omega_k t) \quad (17)$$

同样可以对此进行 Fourier 级数展开, 求得:

$$\tilde{y}_k = \sqrt{S_{xx}(\omega_k)} \tilde{H}(\omega_k) \exp(i\omega_k t) \quad (18)$$

进而可以计算响应量的功率谱、方差等。

1.4 基于等效激励法分析非线性结构的等效线性系统

若 n 自由度非线性系统 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{G}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}) = \mathbf{F}(t)$ 可以表示为 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} + \mathbf{Q}(t) = \mathbf{F}(t)$, 其中 $\mathbf{Q}(t) = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n\}^T$ 为非线性项向量, $\mathbf{F}(t)$ 为零均值平稳随机过程, 则该非线性系统可以用等效线性系统代替^[3]:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_e)\ddot{\mathbf{Y}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_e)\dot{\mathbf{Y}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_e)\mathbf{Y} = \mathbf{F}(t) \quad (19)$$

式中, $\mathbf{M}_e(i, j) = E \left[\frac{\partial q_i}{\partial \ddot{Y}_j} \right]$, $\mathbf{C}_e(i, j) = E \left[\frac{\partial q_i}{\partial \dot{Y}_j} \right]$,

$\mathbf{K}_e(i, j) = E \left[\frac{\partial q_i}{\partial Y_j} \right]$ 。这些计算公式中含有等效线性

系统的响应方差矩阵的元素, 因此用等效线性化法求解时需要迭代计算, 即构造虚拟激励, 按照等效线性化准则计算系统的等效参数矩阵, 计算系统的响应, 再修改系统的等效参数矩阵, 再计算系统的响应, 如此迭代进行, 直至达到精度要求, 就可以确定等效线性系统的相关参数矩阵和响应的统计量。

对于非线性结构, 输入等效激励荷载, 求解非线性系统的响应, 将之作为该非线性系统对应的“等效线性系统”在此等效激励荷载作用下的响应, 显然本文提出的等效激励法对此等效线性系统是适用的, 可以求出所关心输出量的功率谱密度和方差, 进而可以直接应用该等效线性系统的方差计算其等效参数矩阵 \mathbf{M}_e 、矩阵 \mathbf{C}_e 、矩阵 \mathbf{K}_e , 从而避免了上述等效线性化方法所需迭代计算的巨大工作量。

2 结论

(1) 提出了结构随机振动分析的等效激励法, 通过假设等效激励, 可以一次计算出结构在多种频率激励下的总响应, 再通过 Fourier 级数分解, 可以求出结构在特定频率激励下的响应, 进而可以计算出响应量的功率谱和方差。这种方法仅需要进行一次结构的动力分析, 计算效率高。

(2) 该方法可用于线性结构非平稳随机激励分析, 计算公式和步骤与平稳随机激励的相似。

(3) 应用等效激励法, 可以计算非线性结构对应的等效线性系统的随机响应。并可以根据输入和输出时程, 识别该等效线性系统的动力参数。

参考文献:

- [1] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
Ou Jinping, Wang Guangyuan. Structural random vibration [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998. (in Chinese)
- [2] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制—Hamilton 理论体系框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
Zhu Weiqiu. Nonlinear random dynamics & control-Hamilton theoretical frame [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)
- [3] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
Lin Jiahao, Zhang Yahui. Pseudo-excitation method for random vibration [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [4] 林家浩, 李建俊, 张文首. 结构受多点非平稳随机地震激励的响应[J]. 力学学报, 1995, 27(5): 567—576.
Lin Jiahao, Li Jianjun, Zhang Wenshou. Structural responses to non-stationary multi-point random seismic excitations [J]. Acta Mechanica Sinica, 1995, 27(5): 567—576. (in Chinese)

- methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229—256.
- [3] Moes N, Dolbow J, Belytshko T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46: 131—150.
- [4] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1999, 45: 601—620.
- [5] Daux C, Moes N, Dolbow J, Sukumar N, Belytshko T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 48: 1741—1760.
- [6] Ben Dhia H. Multiscale mechanical problems: the arlequin method [J]. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie Iib*, 1998, 326: 899—904.
- [7] Ben Dhia H. Numerical modeling of multiscale problems: the arlequin method [C]. *Proceedings of ECCM'99*, Munchen, 1999.
- [8] Ben Dhia H, Rateau G. The arlequin method as a flexible engineering design tool [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 62: 1442—1462.
- [9] Dolbow J, Nicolas Moes N, Belytshko T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000, 36: 235—260.
- [10] 徐芝纶. 弹性力学(上册)[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
Xu Zhilun. *Elastic mechanics (Volume 1)* [M]. Version 4. Beijing: High Education Press, 2006. (in Chinese)

(上接第 22 页)

- [5] 林家浩, 张文首, 钟万勰. 大跨度结构随机地震响应 [J]. *固体力学学报*, 1991, 12(4): 319—328.
Lin Jiahao, Zhang Wenshou, Zhong Wanxie. Random seismic responses of large span structure [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1991, 12(4): 319—328. (in Chinese)
- [6] Lin Jiahao, Sun Dongke, Sun Yong. Structural responses to non-uniformly modulated evolutionary random seismic excitations [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1997, 13: 605—616.
- [7] 刘元芳, 林家浩. 考虑流体和土壤耦合效应的桩基平台非线性随机地震响应分析[J]. *计算结构力学及其应用*, 1991, 8(1): 42—50.
Liu Yuanfang, Lin Jiahao. Nonlinear random seismic responses analysis of pile based platform considering couple affection of fluid and soil [J]. *Computational Structural Mechanics and Its Application*, 1991, 8(1): 42—50. (in Chinese)
- [8] 郑浩哲. 随机路面行驶车辆振动响应的快速虚拟激励法[J]. *汽车工程*, 1993, 15(5): 268—275.
Zheng Haozhe. Rapid pseudo-excitation method for vibration responses of a vehicle running on stochastic road [J]. *Automotive Engineering*, 1993, 15(5): 268—275. (in Chinese)
- [9] Xu Yulin, Zhang Wenshou, Ko Jianming, Lin Jiahao. Pseudo-excitation method for vibration analysis of wind-excited structures [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1999, 83(3): 443—454.
- [10] Lin Jiahao, Zhang Yahui, Li Qiusheng, Williams F W. Seismic spatial effects for long-span bridges, using the pseudo excitation method [J]. *Engineering Structures*, 2004, 26(9): 1207—1216.