文章编号：1000-4750(2010)09-0012-05

实时耦联动力试验的时滞稳定性分析

迟福东，王进廷，*金 峰
(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室，北京 100084)

摘 要：介绍了实时耦联动力试验的基本原理和研究进展。基于传递体系的纯时滞假定建立单自由度实时耦联动力试验的数学模型。利用基于 Padé 逼近时滞项的根轨迹分析方法求取单自由度实时耦联试验的时滞稳定条件。结果表明：质量、阻尼和刚度的单个稳定上限都随结构自振频率和时滞的增大而呈现拟周期性的变化趋势；在低频部分，稳定上限随结构自振频率和时滞的增大而减小；对于物理子结构中同时包含质量、阻尼和刚度的复合稳定条件，质量上限和下限可能同时存在。最后利用数值模拟验证理论分析得出的稳定条件。

关键词：结构试验技术；实时耦联动力试验；时滞；根轨迹分析；Padé 逼近；稳定条件
中图分类号：TU317 **文献标识码**：A

DELAY-DEPENDENT STABILITY ANALYSIS OF REAL-TIME DYNAMIC HYBRID TESTING

CHI Fu-dong , WANG Jin-ting , *JIN Feng
(State Key Laboratory of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The basic principle and research progress of real-time dynamic hybrid testing (RTDHT) are presented. The mathematical model of SDOF RTDHT is established based on the pure delay assumption of a transfer system. The root locus analysis method based on Padé decomposition approximating the delay item is employed to obtain the delay-dependent stability conditions of SDOF real-time dynamic hybrid testing. The results show that the single upper stability limits of the mass, damping and stiffness vary quasi-periodically with both the natural frequency of structure and the transfer system response delay; these limits decrease as both the natural frequency and delay increase for a low frequency structure; for the compound stability condition of the case where the experimental substructure contains mass, damping and stiffness simultaneously, both an upper and a lower mass boundaries may exit. A numerical model is built to validate the theoretical stability condition.

Key words: seismic testing; real-time dynamic hybrid testing; delay; root locus analysis; Padé approximation; stability condition

实时耦联动力试验(简称 RTDHT)也称为实时动力子结构试验，其基本原理是将整体结构分为两部分，其中本构关系复杂的部分作为物理子结构，采用物理试验模拟，其余部分作为数值子结构采用计算机数值模拟。由于 RTDHT 能降低试件尺寸，同时能有效考虑结构的率相关效应，因而具有独特的优越性和良好的发展前景[1−5]。

RTDHT 一般采用液压伺服作动器作为传递体系，这就不可避免地要面对传递体系的时滞问题。Horiuchi[2]采用能量平衡方法，对一个物理子结构仅

收稿日期：2009-03-31；修改日期：2009-06-18
基金项目：国家自然科学基金项目(90510018，50779021，90715041)；水沙科学与水利水电工程国家重点实验室自主研究课题项目(2008-TC-2)
作者简介：迟福东(1982－)，男，云南人，博士生，从事结构动力试验方面的科研工作(E-mail: cfd05@mails.tsinghua.edu.cn)；
王进廷(1973－)，男，山西人，副教授，博士，从事结构抗震及动力试验方面的科研与教学工作(E-mail: wangjt@tsinghua.edu.cn)；
*金 峰(1966－)，男，贵州人，教授，博士，博导，从事水工结构及防震减灾方面的科研与教学工作(E-mail: jinfeng@tsinghua.edu.cn).

有刚度的 RTDHT 系统进行分析，表明时滞相当于给系统增加一个负阻尼。Horiuchi[6]对一个只含有质量的 RTDHT 进行稳定性分析，表明稳定的条件是物理子结构质量小于数值子结构质量。Wallace[7]利用时滞微分方程模型分析了一个物理子结构只包含刚度的单自由度 RTDHT 的稳定条件。Mercan[8−9]结合一种拟时滞技术和劳斯稳定判据，研究了若干 RTDHT 案例的稳定性。

以上研究或只考虑刚度或质量等单个因素对时滞稳定性的影响；或只给出若干具体案例的时滞稳定性。本文建立了能全面考虑质量、阻尼和刚度等结构参数的单自由度 RTDTH 的数学模型；采用根轨迹法这一简单而又强有力的分析工具，研究特征根随子结构划分参数变化的关系，进而求取 RTDHT 系统的稳定条件，总结单自由度 RTDHT 时滞稳定性的一般性规律。

1　实时耦联动力试验的数学模型和根轨迹方法

在 RTDHT 中对试验系统稳定有影响的时滞主要是传递体系的时滞。本文假定传递体系为一个纯时滞体系，在此基础上可建立 RTDHT 的数学模型。

1.1　子结构模型

以单自由度 RTDHT 为例，其子结构划分如图 1 所示。图 1 中，下标 e、c 分别代表物理子结构和数值子结构。设 $m_e+m_c=m$，$c_e+c_c=c$，$k_e+k_c=k$，$m_e=\mu_m m_c$，$c_e=\mu_c c_c$，$k_e=\mu_k k_c$。为方便理论分析，假设数值子结构和物理子结构都具有线性刚度和阻尼，则数值子结构的运动方程可写为：

$$m_c\ddot{x}_c(t)+c_c\dot{x}_c(t)+k_cx_c(t)+m_e\ddot{x}_c(t-\tau)+ c_e\dot{x}_c(t-\tau)+k_ex_c(t-\tau)=f(t) \tag{1}$$

式中：x_c 为数值子结构的位移；t 为时间变量；f 为外荷载；τ 为传递体系的时滞。

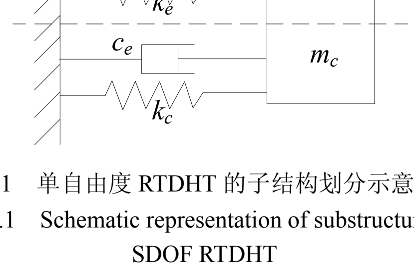


图 1　单自由度 RTDHT 的子结构划分示意图

Fig.1　Schematic representation of substructured SDOF RTDHT

在无外荷载条件下，对式(1)进行拉普拉斯变换，可得到系统的特征方程：

$$m_cs^2+c_cs+k_c+(m_es^2+c_es+k_e)\mathrm{e}^{-\tau s}=0 \tag{2}$$

式中，s 为 Laplace 变量。考虑到 $m_e=\mu_m m/(1+\mu_m)$，$m_c=m/(1+\mu_m)$，$c_e=\mu_c c/(1+\mu_c)$，$c_c=c/(1+\mu_c)$，$k_e=\mu_k k/(1+\mu_k)$，$k_c=k/(1+\mu_k)$，$c=2\xi m\omega_n$，$k=m\omega_n^2$，则式(2)可写为：

$$\frac{1}{1+\mu_m}s^2+\frac{2}{1+\mu_c}\xi\omega_n s+\frac{1}{1+\mu_k}\omega_n^2+ \left(\frac{\mu_m}{1+\mu_m}s^2+\frac{2\mu_c}{1+\mu_c}\xi\omega_n s+\frac{\mu_k}{1+\mu_k}\omega_n^2\right)\mathrm{e}^{-\tau s}=0 \tag{3}$$

1.2　根轨迹方法

本文利用根轨迹方法研究特征方程式(3)的稳定条件。根轨迹方法就是在复平面内画出在特征方程的某个参数从 0 增大到正无穷的过程中，特征根变化的轨迹[10]。MATLAB[11]提供了根轨迹分析功能，只要将特征方程写成如下形式：

$$1+K\frac{\mathrm{num}(s)}{\mathrm{den}(s)}=0 \tag{4}$$

式中：K 为变化的参数，$K>0$，在控制理论中为反馈增益；num(s)、den(s)为多项式，在控制理论中分别为开环传递函数的分子和分母。

根轨迹技术用来研究变化的参数 K 对闭环极点(即特征根)位置的影响。而闭环极点的位置间接地提供了系统时域和频域响应的相关信息。系统稳定的充要条件是其所有闭环极点位于复平面的左半部。当 K 增大时，如果有极点从左半平面穿过虚轴进入右半平面，系统将从稳定区域进入不稳定区域，相应于过虚轴的 K 为系统的一个临界稳定参数；如果极点从右半平面进入左半平面，原来不稳定的系统可能变得稳定，这时的 K 也是一个临界稳定参数。一旦找出所有的临界稳定点，以 K 表示的稳定条件即可确定。

要利用根轨迹方法研究特征方程式(3)，首先需要将时滞项 $\mathrm{e}^{-\tau s}$ 作简化处理。Mercan[8−9]采用一种拟时滞技术对 $\mathrm{e}^{-\tau s}$ 进行替换，然而，该处理办法只在虚轴上精确成立[12]。借助拟时滞技术能准确地求出系统的稳定极限和失稳频率，但要分析失稳以前性能如何变化，其正确性尚待验证。本文对 $\mathrm{e}^{-\tau s}$ 进行 Padé 逼近，其表达式如下：

$$e^{-\tau s}=\frac{\sum_{i=0}^{p}\frac{(p+q-i)!p!}{(p+q)!i!(p-i)!}(-\tau s)^{i}}{\sum_{i=0}^{q}\frac{(p+q-i)!q!}{(p+q)!i!(q-i)!}(\tau s)^{i}} \tag{5}$$

式中，p、q 为 Padé 逼近的阶次，通常取 $p=q=h$。Padé 逼近时滞项的好处在于其在复平面上具有较好的精度，因而既可以研究系统的稳定条件，也可以讨论失稳以前的性能变化过程。数值试验结果表明，在本文研究感兴趣的频率和时滞范围内，10 阶以上的 Padé 分解能提供足够高的逼近精度。因此本文分析中，取 h=10。

下文将分别选定物理子结构和数值子结构的质量比 μ_m、阻尼比 μ_c、刚度比 μ_k 作为参变量，讨论式(3)的质量稳定条件、阻尼稳定条件、刚度稳定条件以及复合稳定条件。

2　实时耦联试验系统的稳定性分析

2.1　质量稳定条件

令式(3)中 $\mu_c=\mu_k=0$，则特征方程变为：

$$s^2+2(1+\mu_m)\xi\omega_n s+(1+\mu_m)\omega_n^2+\mu_m s^2 e^{-\tau s}=0 \tag{6}$$

将式(5)代入式(6)，同时对式(6)进行同解变形，可以将 μ_m 分离，得到形式上和式(4)相同的特征方程：

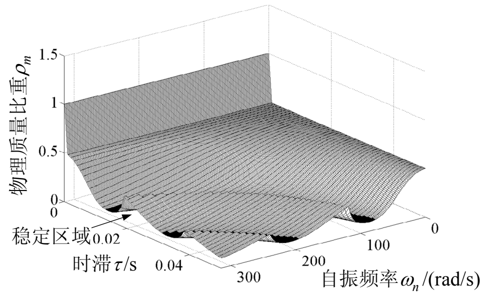
$$1+\mu_m\frac{\sum_{i=0}^{h+2}n_i s^i}{\sum_{j=0}^{h+2}d_j s^j}=0$$

$$n_i=f_i(\xi,\tau,\omega_n),\quad i=0-h+2$$

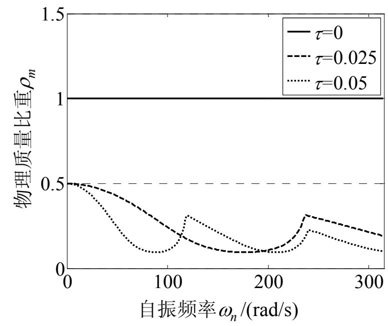
$$d_j=f_j(\xi,\tau,\omega_n),\quad j=0-h+2 \tag{7}$$

根据式(7)，可以利用 MATLAB 进行根轨迹分析，得出闭环特征根随 μ_m 变化的关系图，从而分析系统性能的变化，并确定质量稳定区间 $(\mu_{mcr}^{l},\mu_{mcr}^{u})$。其中 μ_{mcr}^{l} 和 μ_{mcr}^{u} 分别为可能的质量稳定下限和上限。为表达的方便，将以 μ_m 表示的稳定条件换算为以物理质量占总质量的比重 ρ_m 表示的稳定条件 $(\rho_{mcr}^{l},\rho_{mcr}^{u})$，换算关系为 $\rho_m=m_e/m=\mu_m/(1+\mu_m)$。图 2 和图 3 给出结构自振频率 ω_n=0rad/s－314rad/s，时滞 τ=0s－0.05s，阻尼比 ξ=0.05，ξ=0.1 时的质量稳定条件。

由图 2 和图 3 可以看出，质量稳定的下限恒为 0。若不存在时滞，质量稳定上限恒为 1，亦即试验系统是恒稳定的；只要存在时滞，质量稳定上限就不可能超过 0.5，其中 ω_n=0 时的稳定上限恒为 0.5，和 Horiuchi[6]的结论一致。随着结构自振频率和时滞的增加，质量稳定上限呈现出一种拟周期性的增减趋势；在低频部分，随结构自振频率和时滞的增大而减小。结构的阻尼比对质量稳定上限也有一定的影响，总体上看 ξ=0.1 时的质量稳定上限要高于 ξ=0.05 时的质量稳定上限。



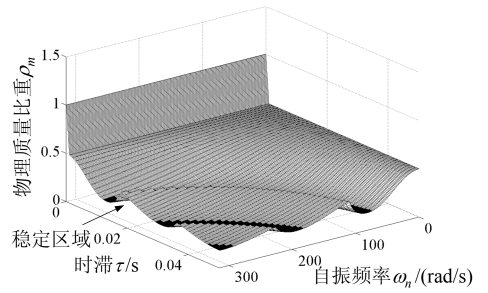
(a) 三维图



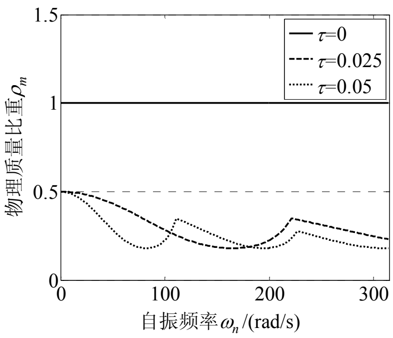
(b) 二维截面

图 2　ξ=0.05 时的质量稳定条件

Fig.2　The mass stability condition when ξ=0.05



(a) 三维图



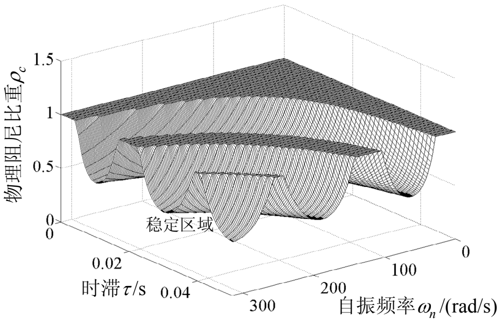
(b) 二维截面

图 3　ξ=0.1 时的质量稳定条件

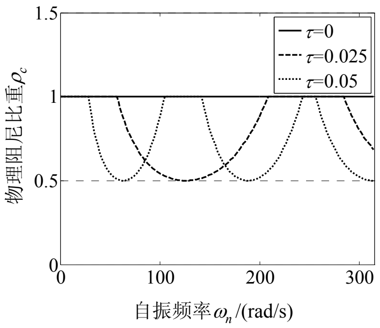
Fig.3　The mass stability condition when ξ=0.1

2.2 阻尼稳定条件

令式(3)中 $\mu_m=\mu_k=0$，采用和 2.1 节完全类似的处理，可以得出一组给定参数(ξ, τ, ω_n)所对应的阻尼稳定条件。图 4 给出 ξ=0.1 时阻尼稳定条件随 τ、ω_n 变化的关系图。由图 4 可以看出，阻尼稳定下限恒为 0。若不存在时滞，阻尼稳定上限恒为 1；存在时滞时有所降低，但不会低于 0.5；随着结构自振频率和时滞的增加，阻尼稳定上限也呈现出一种拟周期性的增减趋势；在低频部分，随结构自振频率和时滞的增大而减小。



(a) 三维图



(b) 二维截面

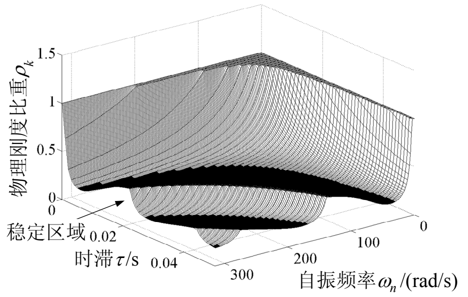
图 4　ξ=0.1 时的阻尼稳定条件

Fig.4　The damping stability condition when ξ=0.1

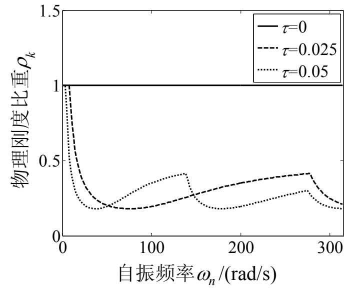
2.3 刚度稳定条件

令式(3)中 $\mu_m=\mu_c=0$，采用和 2.1 节类似的处理，同样可以求得刚度稳定条件。图 5 给出 ξ=0.1 时刚度稳定条件随 τ、ω_n 变化的关系图。由图 5 可以看出，刚度稳定下限恒为 0。随着结构自振频率和时滞的增加，刚度稳定上限也呈现出一种拟周期性的增减趋势；在低频部分，随结构自振频率和时滞的增大而减小。

Wallace[7]利用时滞微分方程模型(DDE)对类似问题的稳定性进行了分析。本文假定 τ=0.01s，利用根轨迹分析得出的稳定条件和 Wallace 的结果对比如图 6 所示。可以看出，两者吻合很好。因而，进一步证明采用基于 Padé 逼近时滞项的根轨迹技术求稳定条件完全能达到满意的精度。



(a) 三维图



(b) 二维截面

图 5　ξ=0.1 时的刚度稳定条件

Fig.5　The stiffness stability condition when ξ=0.1

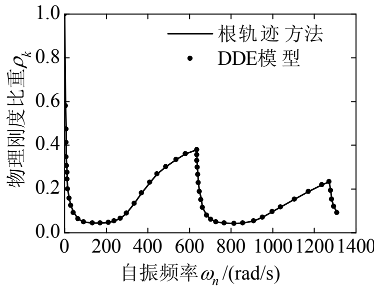


图 6　根轨迹法获得的刚度稳定条件和 DDE 结果的对比

Fig.6　Comparison of stiffness stability conditions obtained by root locus method and DDE

2.4 物理子结构中同时含有质量、刚度和阻尼时复合稳定条件的求取

对于 m_e、k_e、c_e 均不为 0 的情况，考虑到 $\mu_c=\rho_c/(1-\rho_c)$，$\mu_k=\rho_k/(1-\rho_k)$，则式(3)可以写为：

$$s^2+2(1+\mu_m)(1-\rho_c)\xi\omega_n s+(1+\mu_m)(1-\rho_k)\omega_n^2+ [\mu_m s^2+2(1+\mu_m)\rho_c\xi\omega_n s+(1+\mu_m)\rho_k\omega_n^2]\mathrm{e}^{-\tau s}=0 \tag{8}$$

这样，对于给定的系统(ξ, τ, ω_n)，固定一组(ρ_c, ρ_k)，可以利用 2.1 节所述的方法以 μ_m 为参变量进行根轨迹分析，从而求取相应的稳定区间 $(\rho_{mcr}^l,\rho_{mcr}^u)$。不断改变 ρ_c 和 ρ_k($0\leqslant\rho_c\leqslant1$，$0\leqslant\rho_k\leqslant1$)，即可求得该系

统的复合稳定条件。下面给出了一个算例。

算例：ξ=0.1，τ=0.01s，ω_n=62.83/(rad/s)。求得的稳定空间如图 7 所示。可以看到算例中对质量的下限有所限制，或者说对刚度的上限有所限制。算例结果表明，质量的上限不会超过 0.5。

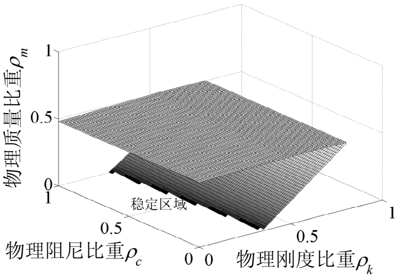


图 7 ξ=0.1，τ=0.01s，ω_n=62.83/(rad/s)的复合稳定条件

Fig.7 Compound stability condition when ξ=0.1, τ=0.01s, ω_n=62.83/(rad/s)

3 稳定性结论的验证

本部分采用 MATLAB/Simulink 数值仿真，以第 2 节的算例为例验证稳定性分析的结论。设地面运动输入为 0.1g，8Hz 的正弦波。理论分析和数值模拟的稳定条件列于表 1 中。其中，“S”表示稳定，“U”表示不稳定。可以看出，数值模拟和理论分析的结果吻合良好，从而理论分析的正确性得到了验证。

表 1 稳定性结论的验证

Table 1 Validation of the stability conclusions

(ρ_c, ρ_k)	(0, 0)	(0, 0.5)	(0.5, 0)	(0.5, 0.5)
理论质量稳定下限 ρ^l_{mcr}	0	0.172	0	0.192
数值模拟结果	—	0.170(U)	—	0.189(U)
	0.001(S)	0.172(S)	0.001(S)	0.193(S)
理论质量稳定上限 ρ^u_{mcr}	0.482	0.500	0.480	0.500
数值模拟结果	0.481(S)	0.499(S)	0.479(S)	0.499(S)
	0.483(U)	0.502(U)	0.482(U)	0.502(U)

4 结论

采用根轨迹方法，并基于 Padé 展开逼近时滞项，着重探讨单自由度 RTDHT 的时滞稳定性，得出如下初步结论：

(1) 时滞要求子结构划分满足一定的条件才能保证试验的稳定。对单个稳定条件来说，其稳定上限随结构自振频率和时滞的增大而呈现出一种拟周期性的变化趋势；在低频部分，稳定上限随结构自振频率和时滞的增大而减小；结构阻尼比的增大有利于提高稳定上限。

(2) 复合稳定条件相对复杂，对质量不仅有上限的要求，还可能有下限的要求。其中质量稳定上限要求物理子结构的质量不能超过数值子结构的质量。

(3) 从试验设计的角度说，应合理设计物理子结构中各参数所占的比重，保证系统处于稳定区域。

本文只讨论了单自由度纯时滞情况，利用根轨迹法研究多自由度系统以及考虑时滞补偿的稳定性，还有一系列问题值得研究。本文作者目前正在进行这方面的研究工作。另外，数值子结构的离散化求解方法可能会使稳定性更差，这是另外一个值得深入研究的课题。

参考文献：

[1] Nakashima M, Kato H, Takaoka E. Development of real-time pseudo dynamic testing [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1992, 21(1): 79－92.

[2] Horiuchi T, Nakagawa M, Sugano M, Konno T. Development of a real-time hybrid experimental system with actuator delay compensation [C]. Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering. Acapulco Mexico, 1996: Paper No. 660.

[3] Darby A P, Blakeborough A, Williams M S. Real-time substructure tests using hydraulic actuator [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(10): 1133－1139.

[4] Wu B, Xu G, Wang Q, Williams M S. Operator-splitting method for real-time substructure testing [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006, 35(3): 293－314.

[5] 汪强, 王进廷, 金峰, 张楚汉. 实时耦联动力试验方法评述[C]. 第17届全国结构工程学术会议论文集. 武汉, 2008: 178－186.
Wang Qiang, Wang Jinting, Jin Feng, Zhang Chuhan. A review of real-time dynamic hybrid testing [C]. Proceedings of the 17th National Conference on Structural Engineering, Wuhan China, 2008: 178－186. (in Chinese)

[6] Horiuchi T, Konno T. A new method for compensation actuator delay in real-time hybrid experiments [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 2001, 359(1786): 1893－1909.

[7] Wallace M I, Sieber J, Neild S A, Wagg D J, Krauskopf B. Stability analysis of real-time dynamic substructuring using delay differential equation models [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2005, 34(15): 1817－1832.

(参考文献[8]－[12]转第 54 页)

附录：

$$Q_A = \frac{y_0(x_2 - x_1)}{2D_1} - \frac{S_a}{2} \tag{A.1}$$

$$Q_B = \frac{x_2}{2}\left(D_D + \frac{S_a}{y_0}\right) + \frac{y_0^2}{2} D_A \tag{A.2}$$

$$Q_C = \frac{x_2}{2}\left(\frac{S_a}{y_0} - D_D\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{D_2}{D_1} + y_0^2 D_A\right) \tag{A.3}$$

$$L_A = \frac{y_0^2}{4}\frac{x_1 - x_2}{(D_1)^2} - \frac{3S_a}{8y_0} + \frac{1}{8}\left(\frac{x_2}{D_2} + \frac{4x_2 - 5x_1}{D_1}\right) \tag{A.4}$$

$$L_B = \frac{x_2}{8y_0^2}\left(D_D + \frac{S_a}{y_0}\right) - \frac{x_2}{4} D_C + \frac{D_A}{2} - \frac{y_0^2}{4} D_B \tag{A.5}$$

$$L_C = \frac{x_2 - x_1}{4(D_1)^2} - \frac{1}{8y_0^2}\left(D_D + \frac{S_a}{y_0}\right) \tag{A.6}$$

$$L_D = \frac{x_2}{4y_0^2}\left[D_C + \frac{3}{2y_0^2}\left(D_D + \frac{S_a}{y_0}\right)\right] + \frac{D_B}{4} \tag{A.7}$$

$$D_i = x_i^2 + y_0^2,\ i = 1,2 \tag{A.8}$$

$$D_A = \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \tag{A.8}$$

$$D_B = \frac{1}{(D_2)^2} - \frac{1}{(D_1)^2} \tag{A.9}$$

$$D_C = \frac{x_2}{(D_2)^2} - \frac{x_1}{(D_1)^2} \tag{A.10}$$

$$D_D = \frac{x_2}{D_2} - \frac{x_1}{D_1} \tag{A.11}$$

$$S_a = \arctan\left(\frac{x_2}{y_0}\right) - \arctan\left(\frac{x_1}{y_0}\right) \tag{A.12}$$

(上接第 16 页)

[8] Mercan O, Ricles J M. Stability and accuracy analysis of outer loop dynamics in real-time pseudodynamic testing of SDOF systems [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2007, 36(11): 1523－1543.

[9] Mercan O, Ricles J M. Stability analysis for real-time pseudodynamic and hybrid pseudodynamic testing with multiple sources of delay [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2008, 37(10): 1269－1293.

[10] 罗专翼, 程桂芬, 付家才. 控制工程与信号处理[M]. 北京: 化学工业出版社, 2004.
Luo Zhuanyi, Cheng Guifen, Fu Jiacai. Control engineering and signal processing [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2004. (in Chinese)

[11] The Mathworks, Inc. Matlab software: user’s guides (2006b) [CP]. Natick MA US: The Mathworks, Inc, 2006.

[12] Olgac N, Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems [J]. Ieee Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5): 793－797.