文章编号：1000-4750(2011)02-0049-08

基于余弦变换的地震动反应谱计算方法

*蒋甫玉[1,2]，高丽坤[3]

(1. 河海大学地球科学与工程学院，南京 210098；2. 河海大学岩土工程科学研究所，南京 210098；
3. 南京大学内生金属矿床成矿机制研究国家重点实验室，地球科学与工程学院，南京 210093)

摘　要：针对提高地震动反应谱的计算精度，提出用余弦变换计算地震反应的新方法。给出并证明了基于余弦变换的褶积及微分定理，利用它们，以单自由度系统动力微分方程为出发点，推导出地震反应的余弦变换谱公式，进而通过逆余弦变换求取反应谱的一般表达式。为探讨该方法的计算精度，分别利用精确法和余弦变换法计算了简谐波输入情况下的反应谱，并进行了误差对比分析。研究结果表明：当地震动荷载输入为 $\cos 4\pi t$ 时，精确法计算的位移、速度和加速度反应谱与理论反应谱的均方差分别为 0.0012m、0.003m/s、0.16m/s^2，而余弦变换法计算的反应谱与理论反应谱的拟合效果非常好，均方差分别为 0.0002m、0.002m/s、0.36m/s^2，余弦变换法计算的位移和速度反应谱精度分别提高了近 6 倍和 1.5 倍，虽然加速度反应谱均方差略大于精确法，但对于长周期部分的计算结果，较之精确法的计算精度来说具有显著的优势。而在对 EI Centro 地震波的反应谱计算结果中，两种方法所获得的三类反应谱曲线形态相近，进一步证实了余弦变换法计算结果的准确性和可靠性。

关键词：反应谱；余弦变换；精确法；数值精度；误差分析

中图分类号：P315；TU311.3　　**文献标识码**：A

CALCULATION OF EARTHQUAKE RESPONSE SPECTRA BY COSINE TRANSFORM

*JIANG Fu-yu[1,2] , GAO Li-kun[3]

(1. School of Earth Sciences and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. Research Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;
3. State Key Laboratory for Mineral Deposits Research, School of Earth Sciences and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: A new method of calculating earthquake response based on the cosine transform is proposed in order to improve the calculating accuracy of earthquake response spectra. Convolution and differential theorems of cosine transform are put forward and proved. By employing the transform as well as considering SDOF system's dynamic differential equations as a starting point, the formula of cosine-transform-spectrum of earthquake responses is deduced, and then a general expression of response spectrum is obtained. For approaching the calculating accuracy, the response spectra of harmonic conditions is calculated by using exact and cosine transforms respectively. Meanwhile the error analysis is done. It is concluded that the mean square deviation of displacement, velocity and accelerate response spectra are 0.0012m, 0.003m/s and 0.16m/s^2 respectively calculated by exact, while the result of cosine transform fit very well with theory, and the mean square deviation are 0.0002m, 0.002m/s and 0.36m/s^2, when the load input is $\cos 4\pi t$, which shows the accuracy of displacement and velocity increased nearly 6 and 1.5 fold, although the mean square deviation of acceleration response spectrum is a little greater than that of an exact one; for the long period, the method of cosine transorm is markedly superior to that of an exact one. And in the result of EI Centro, the shape of three type response spectra

---

收稿日期：2009-09-08；修改日期：2009-09-15
基金项目：国家自然科学基金项目(90815020)；河海大学博士后基金项目(2016/408107)；河海大学引进人才科研启动基金项目(2084/40801136)
作者简介：*蒋甫玉(1981－)，男，安徽合肥人，讲师，博士，主要从事固体地球物理学研究(E-mail: jiangfy@hhu.edu.cn)；
高丽坤(1981－)，女，黑龙江双鸭山人，博士生，主要从事沉积学与石油地质学研究(E-mail: gaolk@163.com).

is similar, further confirmed the accuracy and reliability of the cosine transform method.
Key words: response spectra; cosine transform; exact method; numerical accuracy; error analysis

地震动反应谱广泛地应用于地震工程中。从物理上看，反应谱既包含了地震动的谱特征，又给出了简单结构对地震动的最大反应，根据叠加原理还可进一步给出复杂结构对地震动的最大反应，既可以用来当作衡量地震动强度的一把尺子，又可以用于估计工程结构在地震作用下的受力状况。此外，地震动反应谱理论又为抗震结构中的一些重大问题如地震区划、设计原则、安全与保险、社会决策等提供理论支持。因此，提高反应谱的计算精度具有重要的意义。

Biot 曾率先提出了反应谱的概念[1−3]，Housner 等在 Biot 的研究基础上，用电模拟方法计算反应谱[4−6]，从而奠定了反应谱的理论基础。随着 20 世纪 60 年代前后电子计算机的大量普及而兴起的结构反应数值分析以及强震观测记录和震害经验的积累，反应谱理论趋于成熟。为进一步提高反应谱的计算精度和速度，后人在反应谱理论的基础上，指出地震反应的计算方法可分为在时域和频域内进行两大类[7−8]。时域主要理论依据是函数的微分定理，通过对离散地震反应量或输入地震动作出某种假设，以地震反应量所表述的动力平衡方程来寻找数字滤波器传递函数或递归公式，如精确法[9]、三角插值解析公式法[10]、抛物线内插法[11]、单边差分法[12]、Z 变换法[13]和 Newmark 法[14]等，但这些方法计算精度都受到对Δt时段内的数字加速度的变换规律的假定的限制。频域大多采用 Fourier 变换，利用谱分析原理来实现[7−8]，其理论较为完善，但由于函数非周期性因子以及有限截断的影响，使其应用范围受到很大的限制，而且计算的精度也不高。

余弦变换具有优良的性能，无论是其理论价值还是应用价值都优于非正弦类变换，从而在正交变换中占据了主导地位。Ahmed 和 Rao 于 1974 年首先提出了离散余弦变换(DCT)[15]，Andreas 等 1991 年验证了 DCT 在 4 种正交变换(DFT、DCT、Karhunen-Loève 变换和 Walsh-Hadamard 变换)中是最有活力的[16]。对于实连续信号，DCT 不但能够避免复数运算，而且具有与 Karhunen-Loève 变换相似的性能，能够去除原信号的相关性，从而保留原信号的最大能量。DCT 快速算法的研究和实现[17−19]，使余弦变换计算的速度得到了极大的提高，因此，它在语音、图像编码以及数据压缩等信号处理方面得到了广泛的应用[20−22]。但迄今为止，在国内外还没有发现将余弦变换应用于地震动反应谱计算的相关文献。为此，本文为提高反应谱的计算精度，提出利用余弦变换计算地震反应。为了分析余弦变换法的计算精度，文中以目前计算地震反应精度较高的精确法[9]为对比对象，对简谐波输入情况下，分别利用两种方法编制了地震反应计算程序，并进行精度分析。

1 地震反应余弦变换理论的建立

1.1 基于余弦变换的褶积及微分定理

用余弦变换计算地震反应，目前在地震反应计算理论中依然是一个盲区，因此本文提出并证明余弦变换的褶积及微分定理，以便由此推导出基于余弦变换计算地震反应的一般表达式，并引出反应谱计算的基本公式。

1.1.1 余弦变换褶积定理

如果函数$f(t)$、$g(t)$满足狄利希里条件，且绝对可积，则它们的褶积的余弦变换式为：

$$C[f(t)*g(t)]=\sqrt{\pi/2}[f_C(W)g_C(W)-f_{C_{\pi/2}}(W)g_{C_{\pi/2}}(W)] \quad (1)$$

式中：C 表示余弦变换；$C_{\pi/2}$ 表示相移$\pi/2$的余弦变换(为区别正弦变换给出如下的形式)；$W=2\pi f$ 为角频率。

证明 由于函数$f(t)$、$g(t)$满足狄利希里条件，且绝对可积，因此其余弦变换存在，根据余弦变换的定义有：

$$C[f(t)]=\sqrt{2/\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos(Wt)\mathrm{d}t\ ,$$

$$C_{\pi/2}[f(t)]=\sqrt{2/\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos(\pi/2-Wt)\mathrm{d}t\ ,$$

$$C[f(t)*g(t)]=\sqrt{2/\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(t)g(t-t)\mathrm{d}t\right]\cdot\cos(Wt)\mathrm{d}t。$$

令 $F(W)=C[f(t)*g(t)]$，由于二重积分绝对可积，可以交换积分次序，即：

$$F(W)=\sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty}f(t)\left[\int_t^{\infty}g(t-t)\cos(Wt)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t$$

令$t-t=u$，则：

$$\int_{\tau}^{\infty} g(t-\tau)\cos(\Omega t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty} g(u)\cos[\Omega(u+\tau)]\mathrm{d}u=$$
$$\int_{0}^{\infty} g(u)\cos(\Omega u)\cos(\Omega\tau)\mathrm{d}u-$$
$$\int_{0}^{\infty} g(u)\cos(\pi/2-\Omega u)\cos(\pi/2-\Omega\tau)\mathrm{d}u=$$
$$\sqrt{\pi/2}\cos(\Omega\tau)g_C(\Omega)-$$
$$\sqrt{\pi/2}\cos(\pi/2-\Omega\tau)g_{C_{\pi/2}}(\Omega)$$

所以

$$F(\Omega)=\sqrt{2/\pi}\int_{0}^{\infty} f(\tau)[\sqrt{\pi/2}\cos(\Omega\tau)g_C(\Omega)-$$
$$\sqrt{\pi/2}\cos(\pi/2-\Omega\tau)g_{C_{\pi/2}}(\Omega)]\mathrm{d}\tau=$$
$$\sqrt{\pi/2}g_C(\Omega)\sqrt{2/\pi}\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos(\Omega\tau)\mathrm{d}\tau-$$
$$\sqrt{\pi/2}g_{C_{\pi/2}}(\Omega)\sqrt{2/\pi}\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos(\pi/2-\Omega\tau)\mathrm{d}\tau=$$
$$\sqrt{\pi/2}[f_C(\Omega)g_C(\Omega)-f_{C_{\pi/2}}(\Omega)g_{C_{\pi/2}}(\Omega)]$$

因此，表达式(1)得证。

1.1.2　余弦变换微分定理

如果函数 $f(t)$的 k 阶导数 $f^{(k)}(t)\ (k=1,2,\cdots,n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0,\ k=0,1,2,\cdots,n-1$，则有：

$$C[f^{(n)}(t)]=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Omega^n C_{\pi/2}[f(t)], & n=1,3,5,\cdots\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\Omega^n C[f(t)], & n=2,4,6,\cdots\end{cases}\tag{2}$$

证明　由余弦变换的定义，并利用分部积分，又 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0,\ k=0,1,2,\cdots,n-1$，令分部积分的次数为 m，则当 m 为偶数时可得：

$$C[f^{(n)}(t)]=(-1)^{\frac{m}{2}}\Omega^m C[f^{n-m}(t)]$$

m 为奇数时可得：

$$C[f^{(n)}(t)]=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\Omega^m C_{\pi/2}[f^{n-m}(t)]$$

取积分次数 $m=n$，则表达式(2)得证。

1.1.3　余弦变换线性性质

文献[23]指出，若函数 $f(t)$、函数 $g(t)$的余弦变换存在，则：

$$C[a\,f(t)+b\,g(t)]=a\,f_C(\Omega)+b\,g_C(\Omega)\tag{3}$$

式中a、b 为常数。

1.2　地震反应余弦谱的表达式推导

对于在地震动荷载作用下，自振周期为 T、阻尼比为ξ 的单自由度系统，其动力微分方程为：

$$\ddot{y}(t)+2\xi\omega\dot{y}(t)+\omega^2 y(t)=-\ddot{x}(t)\tag{4}$$

式(4)中：$y(t)$、$\dot{y}(t)$、$\ddot{y}(t)$ 分别为系统的相对位移、相对速度和相对加速度反应；$\omega=2\pi/T$ 为系统的自振圆频率。式(4)是一个简单的常系数线性非齐次方程式，它的通解为：

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\xi\omega t}[c_1\sin(\omega_d t)+c_2\cos(\omega_d t)]-$$
$$\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{x}(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\tag{5}$$

式中：$\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}$ 为系统的阻尼自振圆频率；c_1 和 c_2 为待定常数，由系统的初值条件确定。式(5)中第一项为自由振动解，随着时间的增长，该项渐趋近于零，第二项为特解，是一个带有参量 t 的积分表达式，通常称为 Duhamel 积分。实际工程中通常认为自由振动很快衰减掉从而可以忽略不计。若仅考虑式(5)的特解，根据文献[7－8]，则有：

$$y(t)=\int_0^t \ddot{x}(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\ddot{x}(t)*h(t)\tag{6a}$$

$$\dot{y}(t)=\int_0^t \ddot{x}(\tau)\dot{h}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\ddot{x}(t)*\dot{h}(t)\tag{6b}$$

$$\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)=\int_0^t \ddot{x}(\tau)\ddot{h}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\ddot{x}(t)*\ddot{h}(t)\tag{6c}$$

式(6)中$h(t)$、$\dot{h}(t)$、$\ddot{h}(t)$ 分别为单自由度系统对于单位加速度脉冲的位移反应函数、速度反应函数和加速度反应函数。对式(6)两端同时作余弦变换，由表达式(1)、表达式(2)的一阶、二阶导数余弦变换和表达式(3)，可得：

$$y_C(\Omega)=C[y(t)]=$$
$$\sqrt{\pi/2}[\ddot{x}_C(\Omega)h_C(\Omega)-\ddot{x}_{C_{\pi/2}}(\Omega)h_{C_{\pi/2}}(\Omega)]\tag{7a}$$

$$\dot{y}_C(\Omega)=C[\dot{y}(t)]=$$
$$\sqrt{\pi/2}\Omega[\ddot{x}_C(\Omega)h_{C_{\pi/2}}(\Omega)+\ddot{x}_{C_{\pi/2}}(\Omega)h_C(\Omega)]\tag{7b}$$

$$\ddot{x}_C(\Omega)+\ddot{y}_C(\Omega)=C[\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)]=$$
$$\sqrt{\pi/2}\Omega^2[-\ddot{x}_C(\Omega)h_C(\Omega)+\ddot{x}_{C_{\pi/2}}(\Omega)h_{C_{\pi/2}}(\Omega)]\tag{7c}$$

式中：

$$h_C(\Omega)=-\sqrt{2/\pi}\frac{\omega^2-\Omega^2}{(2\xi\omega\Omega)^2+(\omega^2-\Omega^2)}\tag{8a}$$

$$h_{C_{\pi/2}}(\Omega)=-\sqrt{2/\pi}\frac{2\xi\omega\Omega}{(2\xi\omega\Omega)^2+(\omega^2-\Omega^2)^2}\tag{8b}$$

式(7)即为单自由度系统位移反应、速度反应及绝对加速度反应的余弦变换谱，对式(7)作逆余弦变换即可得到系统位移反应、速度反应和绝对加速度反应。

2　余弦变换计算反应谱的实现

2.1　离散余弦变换

Ahmed 和 Rao 首先给出了一维离散余弦变换的

定义[15]。给定一维数据序列$\{x(n): n=0,1,\cdots,N-1\}$，其离散余弦变换和逆变换定义为：

$$X_C(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}c(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \tag{9a}$$

$$x(n)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}c(k)X_C(k)\cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \tag{9b}$$

式中 k，$n=0, 1, 2,\cdots,N-1$，

$$c(k)=\begin{cases}1/\sqrt{2}, & k=0\\ 1, & k\neq 0\end{cases} \tag{9c}$$

2.2 反应谱的数值实现

当输入地震加速度时间过程$\ddot{x}_g(t)$给定后，对于给定自振圆频率w及阻尼比x的单自由度系统地震反应的计算，首先采用一维离散余弦变换公式(9a)计算出输入加速度的余弦变换，而对于输入加速度的相移$\pi/2$的余弦变化，其离散余弦变换式采用下式进行计算：

$$X_C(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}c(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\frac{(2n+1)k\pi}{2N},$$
$$k,n=0,1,2,\mathbf{L},N-1 \tag{10}$$

其中$c(k)$取值同式(9c)。应该说明的是，尽管式(10)采用了正弦表达式，但完全不同于离散正弦变换[24]，在计算中应予以区别。

之后应用式(8)计算脉冲响应函数的余弦变换谱，代入到式(7)，即可获得单自由度系统给定阻尼比和自振圆频率的位移反应、速度反应及绝对加速度反应的余弦变换谱，最后对式(7)的计算结果按式(9b)实施逆余弦变换，取计算结果绝对值的最大值，即为该自振圆频率下的地震最大反应。根据地震反应谱的定义[7−8]，取不同的自振圆频率w，按上述计算方法获取不同w时的地震最大反应，即可获得反应谱，见下式：

$$S_d(w)=|C^{-1}[y_C(w,W)]|_{\max} \tag{11a}$$

$$S_v(w)=|C^{-1}[\dot{y}_C(w,W)]|_{\max} \tag{11b}$$

$$S_a(w)=|C^{-1}[\ddot{x}_g(W)+\ddot{y}_C(w,W)]|_{\max} \tag{11c}$$

式中：$y_C(w,W)$、$\dot{y}_C(w,W)$及$\ddot{x}_g(W)+\ddot{y}_C(w,W)$按式(9)计算；$S_d(w)$、$S_v(w)$和$S_a(w)$分别为位移、速度和绝对加速度反应谱。

在实际计算过程中，需要注意的是，采用余弦变换计算地震反应同傅里叶变换一样也会产生环状效应。环状效应是由于有限的数据长度而产生的，利用补零的方法可以弥补该效应产生的误差。

3 简谐波输入下反应谱的计算与精度分析

前文从理论上推导并证明了利用余弦变换计算地震动反应谱的可行性。下面以一在地面加速度为简谐波作用下的单自由度体系为例，利用精确法和余弦变换计算的反应谱同其理论反应谱进行对比分析，研究用余弦变换计算的地震动反应谱的计算精度及其实用价值。

计算图 1 的参数为：地震动荷载$\ddot{x}_g(t)=\cos 2\pi ft$, $f=2.0\text{Hz}$，输入荷载取样间隔$\Delta t=0.01\text{s}$，自振周期间隔ΔT取为0.005s，阻尼比$x=0.05$。图1的理论位移、速度和加速度反应分别采用如下公式计算：

$$y(t)=\mathrm{e}^{-xwt}(A\sin w_d t+B\cos w_d t)+$$
$$C\sin qt+D\cos qt \tag{12a}$$

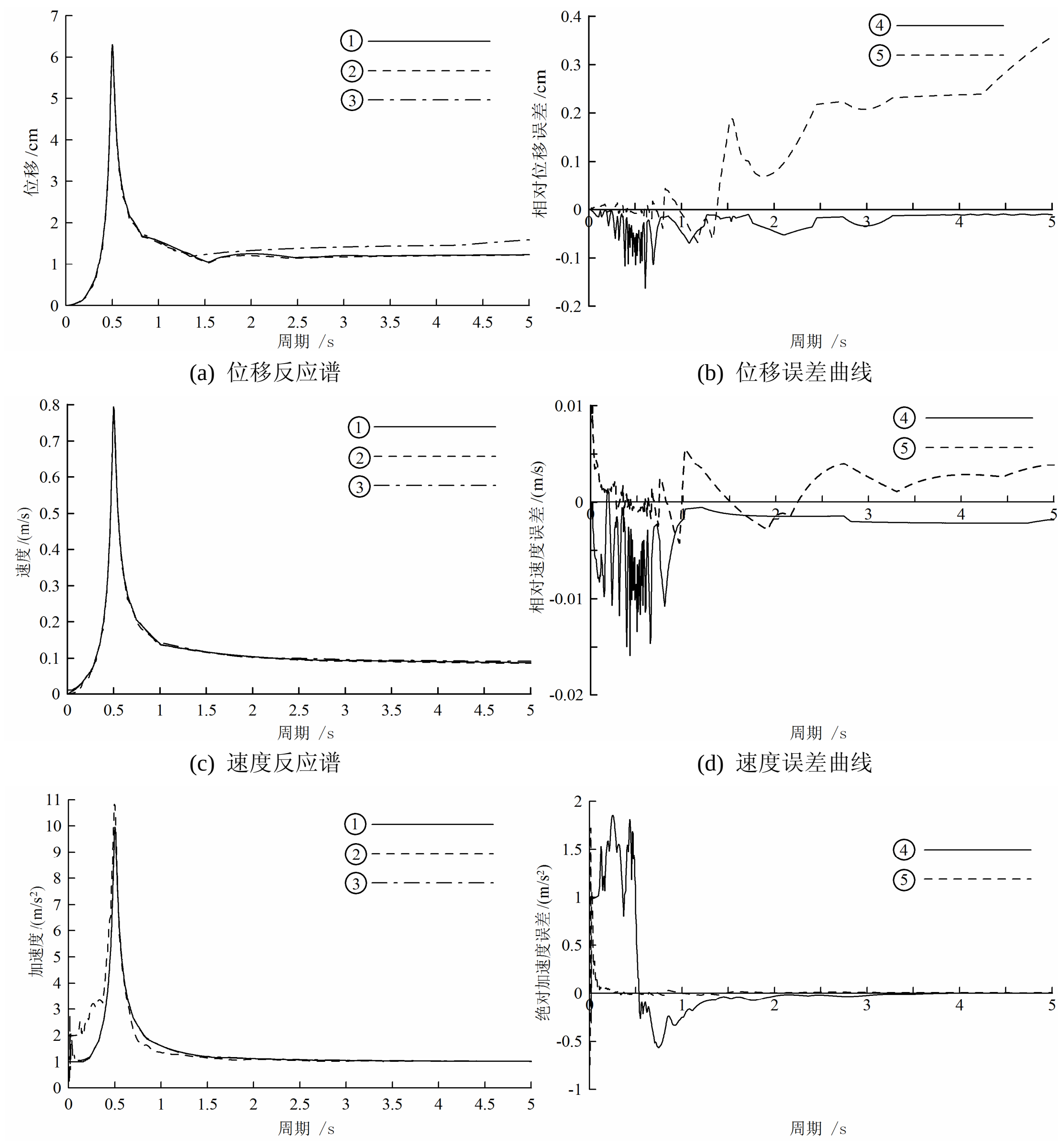
$$\dot{y}(t)=\mathrm{e}^{-xwt}[-(Axw-Bw_d)\sin w_d t+$$
$$(Aw_d-Bxw)\cos w_d t]+$$
$$Cq\cos qt-Dq\sin qt \tag{12b}$$

$$\ddot{y}(t)=\mathrm{e}^{-xwt}\{[2xw(Axw+Bw_d)-Aw^2]\sin w_d t+$$
$$[2xw(Bxw-Aw_d)-Bw^2]\cos w_d t\}-$$
$$Cq^2\sin qt-Dq^2\cos qt \tag{12c}$$

式中：
$$A=\frac{xw(q^2+w^2)}{(w^2-q^2)^2+(2xwq)^2}\frac{1}{w_d},$$
$$B=\frac{w^2-q^2}{(w^2-q^2)^2+(2xwq)^2},$$
$$C=\frac{-2xwq}{(w^2-q^2)^2+(2xwq)^2},$$
$$D=\frac{q^2-w^2}{(w^2-q^2)^2+(2xwq)^2}。$$

图 1 给出了余弦变换法、精确法两种方法计算的反应谱与理论反应谱的对比分析及误差曲线。三类反应谱均在共振区出现峰值，这与经典的动力学理论完全相符。

从图 1(a)中可以看出，曲线③在自振周期小于1.3s 时与理论位移反应谱曲线①拟合的较好，但在自振周期大于 1.3s 之后，则与理论曲线出现明显偏差，而曲线②与理论曲线的拟合程度非常高。另外从图 1(b)的位移误差曲线上可以明显的看出自振周期大于 1.3s 之后精确法的误差要远远大于余弦变换法。而图 1(c)中，无论是余弦变换法还是精确法，在自振周期 0s－5s 的范围内，速度反应谱均与理论



(a) 位移反应谱　(b) 位移误差曲线

(c) 速度反应谱　(d) 速度误差曲线

(e) 加速度反应谱　(f) 加速度误差曲线

① 理论值；② 余弦变换反应谱值；③ 精确法反应谱值；④ 余弦变换法误差；⑤ 精确法误差

图 1　两种方法计算的反应谱对比分析及误差曲线图

Fig.1　Contrast analysis and error curve of response spectra by two method

曲线拟合的较好，但从图 1(d)的速度误差曲线形态上看，精确法计算的误差曲线⑤总体上呈余弦波动的趋势，而余弦变换法在自振周期 0s－1s 的范围内，计算误差在–0.012cm/s－0.002cm/s 之间出现明显的波动，周期大于 1s 后，余弦变换法的计算误差趋于平稳，并小于精确法的计算误差。在加速度反应谱图 1(e)中，曲线②与理论曲线的形态相近，余弦变换法的计算结果在自振周期 0s－0.55s 的范围内，要大于理论值，之后略小于理论计算结果，在自振周期大于 3.55s 后，其计算效果要明显好于精确法(图 1(f))。另外，图 1 中利用余弦变换法计算的三类反应谱误差曲线均在短周期范围内均出现了不同程度的跳动，究其原因：其一是由于采用余弦变换计算地震反应时直接从 Duhamel 积分表达式入手，略去自由振动解产生的精度问题；其二是求解地震反应时，对输入荷载作了一个全局性的基本假定，即将非周期的数字加速度荷载假定为一个具有有限带宽的周期荷载的影响；其三是对输入荷载作离散采样时采样间隔的影响所致，如果要消除这种影响，只有无限地缩小采样间隔，即要取比采样定理高出许多倍的采样率进行采样，才能给出更加精确的结果来，这实际上是难以实现的。

需要指出的是精确法的位移、速度和加速度反应谱均方差分别为 0.12cm、0.003m/s、0.16m/s^2，而采用余弦变换法的均方差分别为 0.02cm、0.002m/s、0.36m/s^2。后者的位移和速度谱均方差分别比前者降低了 0.1cm、0.001cm/s。虽然后者的加速度反应谱均方差大于前者，但是对于自振周期大于 3.55s 的长周期部分，后者的计算精度较之前者具有显著的优势。

表 1－表 3 给出了采用余弦变换和精确法计算的反应谱误差分析，从表 1－表 3 中可以看出，采用余弦变换计算的三类反应谱除短周期内误差略大于精确法外，数据计算精度均很高，远远好于精确法。

表 1 利用余弦变换及精确法计算的位移谱精度 /m

Table 1 The accuracy of displace spectra of cosine transform and exact method

周期/s	理论值	余弦变换法		精确法	
		计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)
0.2	0.00187	0.00172	−8.02	0.00182	−2.67
0.6	0.02938	0.02888	−1.70	0.02939	0.03
1.0	0.01564	0.01518	−2.94	0.01557	−0.45
1.4	0.01176	0.01161	−1.28	0.01205	2.47
1.8	0.01222	0.01191	−2.54	0.01297	6.14
2.2	0.01231	0.01184	−3.82	0.01354	9.99
2.6	0.01169	0.01153	−1.37	0.0139	18.91
3.0	0.01208	0.01174	−2.81	0.01415	17.14
3.2	0.01204	0.01182	−1.83	0.01425	18.36
3.4	0.01201	0.01188	−1.08	0.01433	19.32
3.6	0.01206	0.01194	−1.00	0.0144	19.40
3.8	0.01210	0.01199	−0.91	0.01446	19.50
4.0	0.01214	0.01203	−0.91	0.01451	19.52
4.2	0.01217	0.01206	−0.90	0.01455	19.56
4.4	0.01221	0.01209	−0.98	0.01488	21.87
4.6	0.01224	0.01212	−0.98	0.01524	24.51
4.8	0.01226	0.01215	−0.90	0.01557	27.00
5.0	0.01229	0.01218	−0.90	0.01587	29.13

表 2 利用余弦变换及精确法计算的速度谱精度 /(m/s)

Table 2 The accuracy of velocity spectra of cosine transform and exact method

(续表)

周期/s	理论值	余弦变换法		精确法	
		计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)
0.2	0.04454	0.04453	−0.02	0.04576	2.74
0.6	0.34965	0.34208	−2.17	0.34935	−0.09
1.0	0.14023	0.13848	−1.25	0.14316	2.09
1.4	0.12049	0.11940	−0.90	0.12160	0.92
1.8	0.10829	0.10686	−1.32	0.10608	−2.04
2.2	0.10043	0.09896	−1.46	0.09983	−0.60
2.6	0.09532	0.09387	−1.52	0.09890	3.76
3.0	0.09346	0.09140	−2.20	0.09603	2.75
3.2	0.09285	0.09076	−2.25	0.09443	1.70
3.4	0.09218	0.09006	−2.30	0.09374	1.69
3.6	0.09148	0.08935	−2.33	0.09377	2.50
3.8	0.09080	0.08864	−2.38	0.09348	2.95
4.0	0.09013	0.08797	−2.40	0.09297	3.15
4.2	0.08950	0.08733	−2.42	0.09231	3.14
4.4	0.08890	0.08673	−2.44	0.09156	2.99
4.6	0.08835	0.08617	−2.47	0.09149	3.55
4.8	0.08783	0.08580	−2.31	0.09146	4.13
5.0	0.08742	0.08560	−2.08	0.09127	4.40

表 3 利用余弦变换及精确法计算的加速度谱精度 /(m/s^2)

Table 3 The accuracy of accelerate spectra of cosine transform and exact method

周期/s	理论值	余弦变换法		精确法	
		计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)
0.2	1.08451	2.67199	146.38	1.13756	4.89
0.6	4.15837	4.06613	−2.22	4.14797	−0.25
1.0	1.61162	1.35981	−15.62	1.61260	0.06
1.4	1.24120	1.19257	−3.92	1.22513	−1.29
1.8	1.14427	1.07158	−6.35	1.15664	1.08
2.2	1.10070	1.08276	−1.63	1.10777	0.64
2.6	1.06659	1.04112	−2.39	1.08019	1.28
3.0	1.05244	1.02890	−2.24	1.06186	0.90
3.2	1.04636	1.03518	−1.07	1.05495	0.82
3.4	1.04067	1.03013	−1.01	1.04913	0.81
3.6	1.03554	1.02911	−0.62	1.04418	0.83
3.8	1.03203	1.03058	−0.14	1.03995	0.77
4.0	1.02914	1.03036	0.12	1.03629	0.69
4.2	1.02662	1.02892	0.22	1.03312	0.63
4.4	1.02420	1.02677	0.25	1.03035	0.60
4.6	1.02220	1.02424	0.20	1.02792	0.56
4.8	1.02045	1.02163	0.12	1.02629	0.57
5.0	1.01890	1.01910	0.02	1.02478	0.58

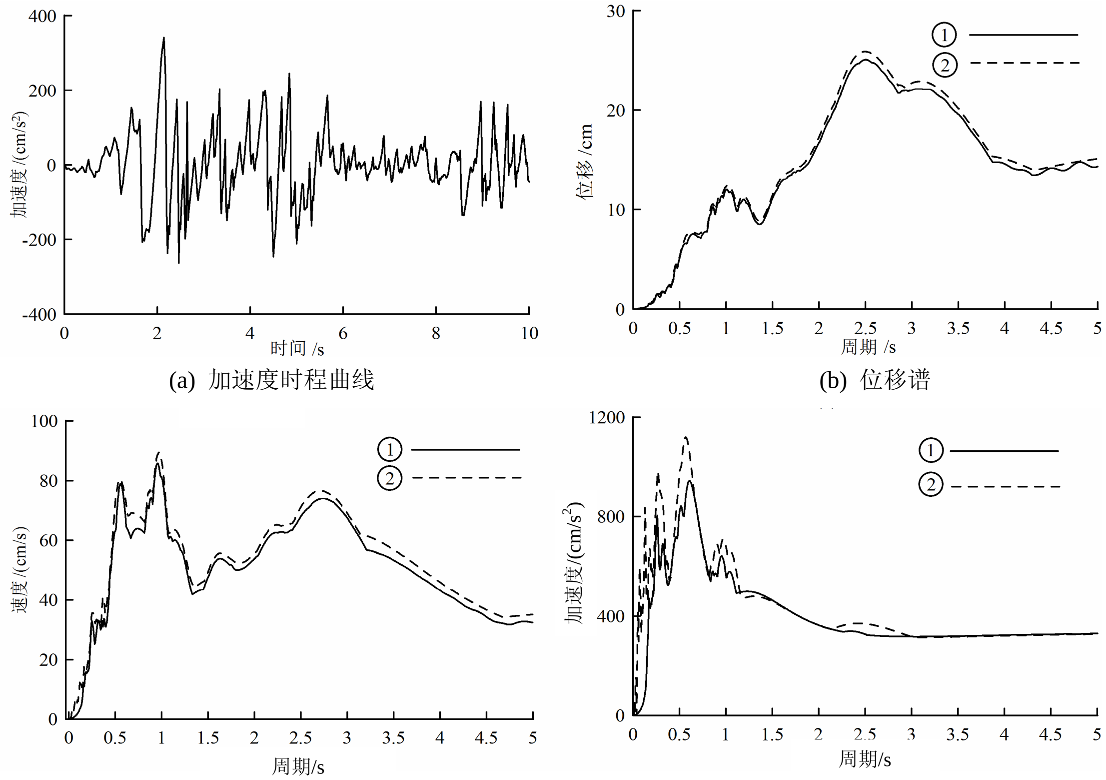
以上对简谐波输入条件下反应谱的计算分析说明，从均方差上看，余弦变换法极大地提高了位移和速度反应谱计算精度。与精确法相比，位移谱精度提高了近 6 倍，这在图 1(b)中表现的非常明显，速度谱精度提高了近 1.5 倍。特别地，对于长周期部分的计算结果，余弦变换法相对精确法来说具有压倒性的优势。

4 EI Centro 地震波的反应谱

EI Centro 波是 1940 年 5 月 18 日美国 IMPERIAL 山谷地震(M7.1)在 EI Centro 台站记录的加速度时程，它是广泛应用于结构试验及地震反应分析的经典地震记录。其主要强震部分持续时间为 26s 左右，记录全部波形长为 54s，原始记录离散加速度时间间隔为 0.02s，N-S 分量、E-W 分量和 U-D 分量加速度峰值分别为 341.7gal、210.1gal 和 206.3gal。计算中选用 N-S 分量作为地震输入，荷载持时取到

10s，其时程曲线如图 2(a)所示。计算中阻尼系数取为 0.05，输入荷载采样间隔 $\Delta t = 0.02\,\mathrm{s}$，自振周期间隔 $\Delta T = 0.005\,\mathrm{s}$。

图 2 中所示的三类反应谱曲线，从整体上看，两种方法得到的反应谱曲线变化趋势基本相同，这进一步说明了用余弦变换法计算反应谱的可靠性与正确性。



(a) 加速度时程曲线　(b) 位移谱

(c) 速度谱　(d) 加速度谱

① 余弦变换反应谱；② 精确法反应谱

图 2　EI Centro 地震波加速度时程及两种方法计算的反应谱

Fig.2　Accelerate time interval of EI Centro and the response spectra

5　结论

本文从理论上推导了用余弦变换计算反应谱的公式，利用离散余弦变换实现了反应谱的数值计算。对简谐波输入情况下的反应谱计算表明，余弦变换计算的反应谱与理论反应谱的拟合程度非常高，具有很高的精度。特别是针对位移和速度反应谱其计算结果明显优于精确法。

从理论上说，影响余弦变换计算反应谱精度的主要因素是略去自由振动解产生的精度问题、将非周期的数字加速度荷载假定为一个具有有限带宽的周期荷载的影响以及对输入荷载作离散采样时采样间隔的影响。

反应谱的数值计算精度关系到抗震设计是否合理，并为地震区划、安全与保险、社会决策等提供理论和技术上的支持；另外，对长周期反应谱的计算，余弦变换法的精度具有明显的优势，这为长周期结构物反应谱的计算提供了新的思路，因此本文研究具有重要的地震工程意义。

参考文献：

[1] Biot M A. Theory of vibration of buildings during earthquakes [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1934, 14(4): 213－223.

[2] Biot M A. A mechanical analyzer for the prediction of earthquake stresses [J]. Bull Seismol Soc Amer, 1941, 31: 151－171.

[3] Biot M A. Analytical and experimental methods in enginering seismology [J]. ASCE Transactions, 1942, 108: 365－408.

[4] Housner G W. Characteristic of strong motion earthquakes [J]. Bull Seismol Soc Amer, 1947, 37(1): 19－31.

[5] Housner G W. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes [J]. Bull Seismol Soc Amer, 1963, 53(2): 403－418.

[6] Housner G W, Jennings P C. Generation of artificial

earthquake [J]. ASCE, 1964, 90(1): 113－150.

[7] 谢礼立，于双久．强震观测与分析原理[M]．北京：地震出版社, 1982.
Xie Lili, Yu Shuangjiu. The theory of strong earthquake motion measurement and analysis [M]. Beijing: Seismological Press, 1982. (in Chinese)

[8] 大崎顺彦．地震动的谱分析入门[M]．吕敏申，谢礼立，译．北京：地震出版社, 1980.
Ohsaki Y. The approach of spectra analysis of ground motion [M]. Translated by Lu Minshen, Xie Lili. Beijing: Seismological Press, 1980. (in Chinese)

[9] Nigam N C, Jennings P C. Calculation of response spectra from strong-motion earthquake records [J]. Bull Seismol Soc Amer, 1969, 59(2): 909－922.

[10] 朱敏，朱镜清．反应谱计算的三角插值解析公式法[J]．世界地震工程, 2001, 17(3): 62－64.
Zhu Min, Zhu Jingqing. Calculation of responses spectra based on trigonometric interpolation [J]. World Information on Earthquake Engineering, 2001, 17(3): 62－64. (in Chinese)

[11] 陈国兴，庄海洋．基于抛物线内插的反应谱计算公式及其精度分析[J]．防灾减灾工程学报，2003，23(3): 56－61.
Chen Guoxing, Zhuang Haiyang. Computation formulas of the earthquake response spectra based on parabolic interpolation method and the analysis of its precision [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2003, 23(3): 56－61. (in Chinese)

[12] Kanamori H, Maechling P, Hauksson E. Continuous monitoring of strong motion parameters [J]. Bull Seismol Soc Amer, 1999, 89(1): 311－316.

[13] Lee V W. Efficient algorithm for computing displacement velocity and acceleration responses of an oscillator to arbitrary ground motion [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1990, 9(6): 288－300.

[14] Newmark N M. A method of computation for structural dynamics [J]. ASCE, 1959, 85(3): 67－94.

[15] Ahmed N, Natarjan T, Rao K R, Discrete cosine transform [J]. IEEE Trans Compute, 1974, 23(1): 90－93.

[16] Andreas S S, Stefan B J, Samuel D S. Transform methods for seismic data compression [J]. IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, 1991, 29(3): 407－415.

[17] Artyom M Grigoryan. An algorithm for calculation of the discrete cosine transform by paired transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(1): 265－273.

[18] Wang Zhongde. A fast algorithm for the discrete sine transform implemented by the fast cosine transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1982, 30(5): 814－815.

[19] Cvetkovic Z, Popvic M V. New fast algorithms for the computation discrete cosine and sine transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(8): 2083－2086.

[20] Rao K R, Yip P. Discrete cosine transform: Algorithms, advantages and applications. New York: Academic Press, 1990.

[21] Dinstein I, Rose K, Heiman A. Variable block-size transform image coder [J]. IEEE Transcomm, 1990, 38(11): 2073－2078.

[22] 黄文胜，赵焕东．余弦变换三维物体轮廓术的改进[J]．光学仪器, 2000, 22(6): 8－13.
Huang Wensheng, Zhao Huandong. Improved cosine transform profilometry for the automatic measurement of 3-D objcet shapes [J]. Optical Instruments, 2000, 22(6): 8－13. (in Chinese)

[23] 《数学手册》编写组．数学手册[M]．北京：人民教育出版社, 1979.
《Mathematics Handbook》compile group. Mathematics handbook [M]. Beijing: People’s Education Press, 1979. (in Chinese)

[24] Jain A K. A fast Karhunen-Loeve transform for a class of stochastic processes [J]. IEEE Transcomm, 1976, 24(6): 1023－1029.