

文章编号: 1000-4750(2011)03-0023-06

用于时变系统参数识别的状态空间小波方法

许 鑫,*史治宇

(南京航空航天大学结构与强度研究所飞行器结构力学与控制教育部重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 该文利用系统的激励和受迫响应数据, 基于状态空间和小波变换理论, 提出了一种识别时变系统参数的新方法。该方法首先将线性时变系统的二阶振动微分方程转换为一阶状态方程, 然后对系统的激励和响应信号进行小波尺度函数空间投影, 利用小波尺度函数的正交性, 把一阶状态空间方程解耦为线性代数方程组。其次求解方程组, 识别出不同时刻的等效系统转移矩阵。最后通过特征值分解得到时变系统的模态参数, 再将转移矩阵与实际物理模型下的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵作对比, 识别出系统的时变刚度和时变阻尼。以二自由度弹簧-质量-阻尼模型为仿真算例, 对突变、线性变化和周期变化三种情况下的时变参数进行了识别, 算例结果验证了该方法的正确性和有效性。

关键词: 参数识别; 时变系统; 状态空间; 小波变换; 投影

中图分类号: O329; TB123 **文献标识码:** A

PARAMETER IDENTIFICATION FOR TIME-VARYING SYSTEM USING STATE SPACE AND WAVELET METHOD

XU Xin,*SHI Zhi-yu

(Ministry of Education Key Laboratory of Structure Mechanics and Control for Aircraft,

Institute of Structures & Strength, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A new parameter identification algorithm based on the state-space and wavelet transform is presented in this paper, which uses the system excitation and the response data. For an arbitrarily linear time-varying structure, the second-order vibration differential equations can be rewritten as first-order vibration differential equations using the state-space method. Both excitation and response signals are projected by the Daubechies wavelet scaling functions, and then the state-space equations of the time-varying dynamic system are transformed into simple linear equations using the orthogonality of the scaling functions. The time-varying equivalent state-space system matrices of the structures at each moment are then identified directly by solving the linear equations. The modal parameters are extracted via eigenvalue decomposition of the state-space system matrices and the time-varying stiffness and damping matrices can be determined by comparing the identified equivalent system matrices with the physical system matrices. A 2 degrees-of-freedom spring-mass-damping model with three kinds of time-varying cases (abruptly, smoothly and periodically) is investigated. Numerical results show that the proposed method is accurate and effective to identify the time-varying parameters.

Key words: parameter identification; time-varying system; state space; wavelet transform; project

航空航天、交通运输、机械化工等工程领域中, 很多结构具有时变的力学特性, 因此时变系统的参

数识别研究具有广泛而重要的意义。近年来, 学者们基于 HT(Hilbert Transform)变换^[1-2], 状态空间法

收稿日期: 2009-08-13; 修改日期: 2009-12-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(10772076); 江苏省研究生培养创新项目(CX10B_088Z); 江苏省研究生培养创新项目(CX10B_105Z)

作者简介: 许 鑫(1983—), 男, 奇台人, 博士生, 从事结构动力学参数识别研究(E-mail: xinxu@nuaa.edu.cn);

*史治宇(1967—), 男, 苏州人, 教授, 博士, 博导, 从事结构动力学反问题研究(E-mail: zyshi@nuaa.edu.cn).

(State-Space)^[3-5]和小波变换(Wavelet Transform)^[6-7]提出了许多时变系统参数识别方法,但由于理论和信号分析技术上的种种困难,这一参数识别领域的热点难点问题,国内外的研究都还处于初步阶段,虽有一些成果,还不成熟^[8]。

大型结构用状态空间法进行描述,能够有效地反应全部独立变量的变化,从而确定系统的全部运动状态。Juang J N 和 Pappa R S 于 1984 年提出了著名的特征系统实现算法(ERA)^[9],并成功应用于伽利略号航天器的模态分析中。针对时变系统, Liu K 提出了一种基于整体数据的子空间识别方法^[3,10]。于开平等运用该方法解决了移动质量-简支梁系统的模态频率识别问题^[11]。后由李会娜等改进,只需一组测量数据就能够识别出时变结构的参数^[12-13]。此外,递推的子空间技术^[14-15]也被用来进行时变系统的参数识别。

小波分析是一种具有自适应窗口的时频分析工具,可以提取非稳态信号更多的时频局部信息。连续小波变换在时不变系统参数识别方面取得了一些研究成果^[16]。2005 年, Mitra M 将小波变换运用到时变系统参数识别中^[17]。同年,国内史治宇等首先运用 Daubechies 小波识别了时变系统的物理参数^[18],文中借助小波尺度函数的正交性将物理空间下的二阶微分方程转化为线性代数方程组进行求解,识别算法中需要同时计算一阶和二阶小波连接系数^[19],难度大,精度受限。

作者在先前的工作中应用状态空间和小波理论,实现了从振动微分方程到线性代数方程组的两次降阶,解决了时变系统在自由振动状态下的参数识别问题。本文应用时变系统的受迫振动响应,通过对状态空间下系统的激励和响应信号作正交小波投影,实现微分方程的两次降阶,相比文献[18],避免了计算二阶小波连接系数,通过求解线性代数方程组识别出等效的系统转移矩阵。对转移矩阵进行特征值分解,得到系统的模态参数,将转移矩阵与物理模型下的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵作对应,可识别出结构的刚度和阻尼矩阵。仿真算例验证了该方法的正确性、有效性。

1 基本方程

一个 p 自由度线性时变动力学系统,其受迫振动可以用下列方程式表示:

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{E}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{M}(t)$ 、 $\mathbf{E}(t)$ 、 $\mathbf{K}(t)$ 分别为 $p \times p$ 的时变质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵; $\mathbf{x}(t)$ 为 $p \times 1$ 的位移向量; $\mathbf{u}(t)$ 为 $n_i \times 1$ 的输入向量, n_i 为输入数; $\mathbf{b}$ 为 $p \times n_i$ 的输入影响矩阵。

对于振动系统,根据文献[20],输出向量可以是加速度、速度、位移的自由组合:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

其中: $\mathbf{y}(t)$ 为 $n_0 \times 1$ 的输出向量, n_0 为响应的输出个数; $\mathbf{C}_a$ 、 $\mathbf{C}_v$ 、 $\mathbf{C}_d$ 分别为 $n_0 \times p$ 的加速度、速度、位移的输出影响矩阵。

引入状态向量:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

将此状态向量引入运动方程式(1)、式(2),则二阶振动微分方程组可改写为一阶的状态空间方程组:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (5)$$

其中: $\mathbf{z}(t)$ 为 $2p \times 1$ 的状态向量; $\mathbf{A}(t)$ 为 $2p \times 2p$ 的状态转移矩阵; $\mathbf{B}(t)$ 为 $2p \times n_i$ 的输入影响矩阵; $\mathbf{C}(t)$ 为 $n_0 \times 2p$ 的输出影响矩阵; $\mathbf{D}(t)$ 为 $n_0 \times n_i$ 的直接传输矩阵。时变系统的质量矩阵、刚度矩阵、阻尼矩阵与状态空间下系统矩阵之间的关系为:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{K}(t) & -\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{E}(t) \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$\mathbf{B}(t) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{b}]^T \quad (6b)$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{K}(t) \\ \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{E}(t) \end{bmatrix}^T \quad (6c)$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{b} \quad (6d)$$

2 时变系统参数识别

对系统的激励和响应信号作 Daubechies 小波变换,利用小波尺度函数的正交性将状态方程转化成简单的线性代数方程组,然后求解,识别出系统的状态转移矩阵,利用特征值分解识别出系统的模态参数,在认为质量已知的情况下,将状态转移矩阵和系统的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵进行对照,识别出系统物理状态模型下的刚度矩阵和阻尼矩阵。

2.1 小波变换将状态方程组转换成线性代数方程组

选用消失矩为 N 的 Daubechies 小波,记为 $\text{db}N$ 小波,在尺度 j 上,将状态向量 $\mathbf{z}(t)$ 利用尺度函数在尺度空间进行投影近似:

$$z(t) = \sum_k \tilde{\alpha}_k \cdot 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (7)$$

其中: $k \in Z$, $\tilde{\alpha}_k$ 为近似系数, $\phi(\cdot)$ 为小波尺度函数。令 $r = 2^j t$, $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k 2^{j/2}$, 作变量代换, 得:

$$z(t) = \sum_k \alpha_k \phi(r - k) = Z(r) \quad (8)$$

同理, 对系统的输入, 输出信号有:

$$u(t) = \sum_k \tilde{\beta}_k \cdot 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (9a)$$

$$u(t) = \sum_k \beta_k \phi(r - k) = U(r) \quad (9b)$$

$$y(t) = \sum_k \tilde{\gamma}_k \cdot 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (10a)$$

$$y(t) = \sum_k \gamma_k \phi(r - k) = Y(r) \quad (10b)$$

其中, $\beta_k = \tilde{\beta}_k 2^{j/2}$ 、 $\gamma_k = \tilde{\gamma}_k 2^{j/2}$ 。尺度函数对时间的一阶导数为:

$$\frac{\partial \phi(r - k)}{\partial t} = 2^j \dot{\phi}(r - k) \quad (11)$$

则式(4)可以改写为:

$$\dot{z}(t) = 2^j \sum_k \alpha_k \dot{\phi}(r - k) = \dot{Z}(r) \quad (12)$$

将式(8)、式(9b)、式(10b)和式(12)代入状态方程组:

$$\begin{cases} 2^j \sum_k \alpha_k \dot{\phi}(r - k) = A(r/2^j) \sum_k \alpha_k \phi(r - k) + \\ \quad B(r/2^j) \sum_k \beta_k \phi(r - k), \\ \sum_k \gamma_k \phi(r - k) = C(r/2^j) \sum_k \alpha_k \phi(r - k) + \\ \quad D(r/2^j) \sum_k \beta_k \phi(r - k). \end{cases} \quad (13)$$

在式(13)两边同时乘以 $\phi(r - l)$, 作内积可得:

$$\begin{cases} 2^j \sum_k \alpha_k \int \dot{\phi}(r - k) \phi(r - l) dr = A(r/2^j) \cdot \\ \quad \sum_k \alpha_k \int \phi(r - k) \phi(r - l) dr + B(r/2^j) \cdot \\ \quad \sum_k \beta_k \int \phi(r - k) \phi(r - l) dr, \\ \sum_k \gamma_k \int \phi(r - k) \phi(r - l) dr = C(r/2^j) \cdot \\ \quad \sum_k \alpha_k \int \phi(r - k) \phi(r - l) dr + D(r/2^j) \cdot \\ \quad \sum_k \beta_k \int \phi(r - k) \phi(r - l) dr. \end{cases} \quad (14)$$

又由于小波尺度函数的正交性^[21-22]:

$$\int \phi(r - k) \phi(r - l) dr = \delta_{lk}$$

等式(14)改写为:

$$\begin{cases} 2^j \sum_k \alpha_k \Gamma_{l-k}^{(1)} - B_l \beta_l = A_l \alpha_l \\ \gamma_l - D_l \beta_l = C_l \alpha_l \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\Gamma_{l-k}^{(1)} = \int \dot{\phi}(r - k) \phi(r - l) dr$ 称为一阶连接系数。设 $x(t)$ 长度为 $t_f \in Z$, 则有 $2^j t_f = n$, 平移因子 $k = [l - 2N + 2, l + 2N - 2]$, 只有在取值 $l = 0, 1, \dots, n-1$ 时, 连接系数才是非零的值。

不难看出, 等式(15)已经转变成为线性代数方程组。当系统质量已知, 即输入影响矩阵 $B(t)$ 和直接传输矩阵 $D(t)$ 已知时, 求解代数方程组可得系统的等效状态转移矩阵 $A(t)$ 和输出影响矩阵 $C(t)$ 。

2.2 系统模态参数识别

对状态转移矩阵 $A(t)$ 进行特征值分解:

$$A(t) = \Psi(t) \Lambda(t) \Psi^{-1}(t) \quad (16)$$

式中: $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2(t), \lambda_2^*(t), \dots, \lambda_{2p}(t), \lambda_{2p}^*(t)) \in \mathbb{C}^{2p \times 2p}$ 是包含连续时间复特征值的对角矩阵; 而 $\Psi(t) \in \mathbb{C}^{2p \times 2p}$ 是连续时间特征向量矩阵。对于其中的一个共轭对:

$$\lambda_i(t), \lambda_i^*(t) = -\zeta_i(t) 2\pi\omega_i(t) \pm j2\pi\omega_i(t) \sqrt{1 - \zeta_i^2(t)} \quad (17)$$

式中: ζ_i 为阻尼比, ω_i 为固有频率, 由式(17)可得系统的频率和阻尼比, 其中 $i = 1, 2, \dots, p$ 。

$$\omega_i(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\text{Re}(\lambda_i(t)))^2 + (\text{Im}(\lambda_i(t)))^2} \quad (18)$$

$$\zeta_i(t) = \frac{-\text{Re}(\lambda_i(t))}{2\pi\omega_i(t)} \quad (19)$$

2.3 系统物理参数识别

假设由量测识别模型所得的等效状态转移矩阵 $A(t)$ 在物理模型下具有与式(6a)相同的形式, 当质量已知时, 有:

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(t)K(t) & -M^{-1}(t)C(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(20)进行矩阵分块运算, 可识别出每个时刻系统的刚度矩阵 $K(t)$ 和阻尼矩阵 $E(t)$, 如式(21)、式(22)所示:

$$K(t) = -M(t)A_{21}(t) \quad (21)$$

$$E(t) = -M(t)A_{22}(t) \quad (22)$$

3 仿真算例

如图 1 所示, 一个二自由度弹簧-质量-阻尼时变结构, 两个质量块 $M_1 = 1\text{kg}$, $M_2 = 1\text{kg}$, 不随时间变化, 刚度 K_1 、 K_2 和阻尼 E_1 、 E_2 随时间变化。初始位移、初始速度、初始加速度均为零。使用 Newmark-beta 法求系统响应, 采样周期为 $4.8828 \times 10^{-4}\text{s}$ (1/2048), 小波变换选用 db3 小波, 尺度 $j = 11$ 。考虑突变、线性变化和周期变化三种情况; 且同时考虑参数的三种变化情形, 即只有 K_1 变化、 E_1 与 K_1 变化和 K_1 与 K_2 变化。算例中激励力单位为 N, 刚度单位为 N/m, 阻尼单位为 N·s/m, 时间单位为 s。激励采用谐波激励和阶跃激励两种, 且同时考虑单点激励和多点激励, 具体大小为:

$$u(t) = (200 \cos(30\pi t), 200 \cos(15\pi t))^T;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0.5; \\ 0, & t \geq 0.5 \end{cases}$$

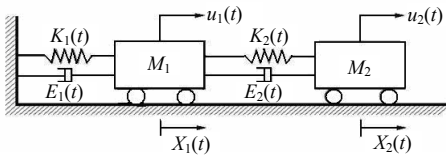


图 1 二自由度弹簧质量块模型
Fig.1 2DOF lumped mass model

1) 参数突变情况。

$$E_1(t) = 0.8, \quad K_1(t) = 5000, t < 1; 4900, t \geq 1;$$

$$E_2(t) = 1, \quad K_2(t) = 4000.$$

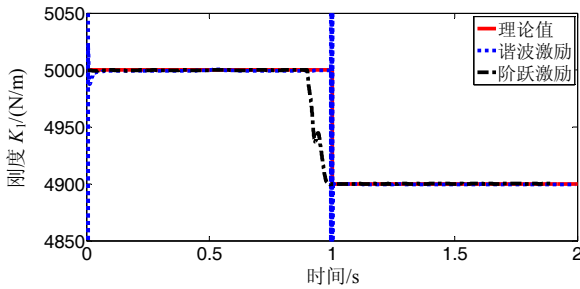


图 2 参数突变刚度一识别结果

Fig.2 Comparison of the identified stiffness and the true value

从图 2 可以看出, 在参数突变时刻, 识别值与理论值之间存在较大的波动, 这是由于在求解线性代数方程组时, 利用了小段时刻联合求解的缘故。虽然在突变时刻识别值存在一些误差, 但算法仍能够快速有效地跟踪系统的参数变化。

2) 参数线性变化情况。

$$E_1(t) = 0.8 + 0.05t, \quad K_1(t) = 5000 - 100t;$$

$$E_2(t) = 1, \quad K_2(t) = 4000.$$

从图 3 可以看出, 阶跃激励下阻尼的识别误差随时间增大, 这是由于随着自由响应信号的衰减, 响应信号中系统的特征频率成分减弱的原因。对比图 3 和图 4 可以看出, 刚度识别值与理论值之间的波动要比阻尼小, 这是由于刚度与阻尼在数值上相比要大很多(往往相差几个数量级), 在同时参与计算时, 得出的相对误差比阻尼小, 本文算法即使在阻尼变化很微弱的情况下, 仍然能够有效地跟踪阻尼的变化趋势。

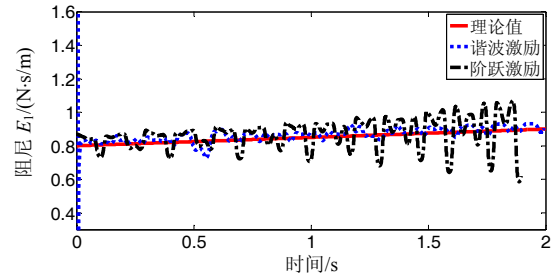


图 3 参数线性变化阻尼一识别结果

Fig.3 Comparison of the identified damping and the true value

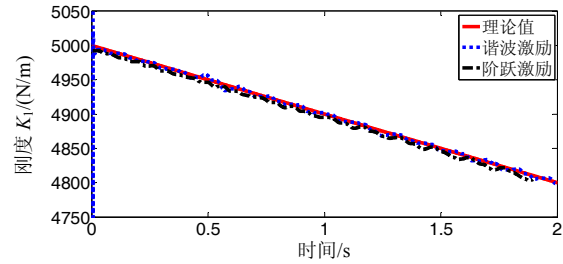


图 4 参数线性变化刚度一识别结果

Fig.4 Comparison of the identified stiffness and the true value

3) 参数周期变化情况。

$$E_1(t) = 0.8, \quad K_1(t) = 5000 + 50 \sin \pi t;$$

$$E_2(t) = 1, \quad K_2(t) = 4000 + 50 \sin \pi t.$$

由图 2、图 3 和图 5 可以看出识别值和理论值在起始和终止时刻误差比中间过程稍大, 这是由于小波变换的边缘效应在识别过程中有所体现, 但对整个识别结果影响不大。

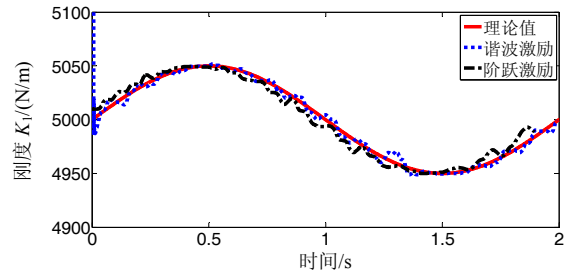


图 5 参数周期变化刚度一识别结果

Fig.5 Comparison of the identified stiffness K_1 and the true value

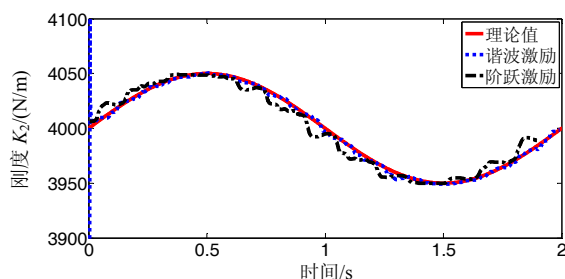


图6 参数周期变化刚度二识别结果

Fig.6 Comparison of the identified stiffness K_2 and the true value

通过在测量信号(包括激励和响应信号)中混入一定信噪比的高斯白噪声可以检验本文方法的抗噪声能力。定义信噪比(SNR)为信号的均方差与噪声的均方差的比值。为了讨论在不同信噪比下识别结果的识别精度,定义识别结果的平均绝对百分误差 MAPE(Mean Absolute Percentage Error)如下:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|P_i - \tilde{P}_i|}{P_i} \times 100\%$$

其中: P_i 、 $\tilde{P}_i$ 分别为 i 时刻系统参数的理论值和识别值; N 为采样点数。不同激励形式不同信噪比三种参数变化情况的识别结果可由 MAPE 大小来衡量,见表 1、表 2 所示。

表1 单点阶跃激励,不同信噪比下识别结果的 MAPE 值

Table 1 Error of identification (MAPE) with noise data using single step excitation

信噪比	突变	线性		周期	
	$K_1/(%)$	$E_1/(%)$	$K_1/(%)$	$K_1/(%)$	$K_2/(%)$
100	0.3710	57.6791	0.3703	0.3260	0.4178
90	0.4271	61.5090	0.3684	0.3828	0.4534
80	0.4724	75.8360	0.4463	0.4105	0.5212
50	0.6841	136.218	0.6874	0.6995	0.8325
不加噪	0.0730	8.1022	0.1053	0.0991	0.1227

表2 多点谐波激励,不同信噪比下识别结果的 MAPE 值

Table 2 Error of identification (MAPE) with noise data using multi harmonic excitation

信噪比	突变	线性		周期	
	$K_1/(%)$	$E_1/(%)$	$K_1/(%)$	$K_1/(%)$	$K_2/(%)$
100	0.5513	35.8787	0.5909	0.6043	0.6260
90	0.5720	40.5208	0.6916	0.7075	0.6858
80	0.7297	47.2095	0.7965	0.7333	0.7161
50	1.2407	80.8909	1.3176	1.2525	1.4753
不加噪	0.0468	6.0025	0.1276	0.1045	0.1242

由表 1、表 2 可以看出,本文方法即使在有噪声干扰的情况下仍能有效地识别时变系统的参数变化。多点激励与单点激励相比,响应的频率成分更复杂,识别误差稍大。随着信噪比的减小,无论在突变、线性变化还是周期变化,刚度的识别结果

MAPE 都很小,均在 1.5% 以下,识别精度良好。由此可知,本文方法在各种参数变化情况下,对刚度的识别精度较高,对噪声不敏感。在对阻尼的识别时,当信噪比较大时,识别效果较好,但信噪比较小时识别结果会具有比较大的误差。

4 分析尺度的选取

Daubechies 小波是一种二进制正交小波,在选取一系列不同的尺度 j 时,可以进行多尺度分析。

文献[18]中,利用 Daubechies 小波,就有当尺度 $j=5-j=8$ 时,对同样信号做分解的对比介绍。

本文方法,关于尺度 j 的选取,应该从两个方面考虑:一方面针对不同的结构(不同分析频段),小尺度对应小的采样频率 $f=2^j$ 和小的分析频段;另一方面同一个结构(同一个频率范围),满足误差要求时,分析尺度越大,采样频率 $f=2^j$ 越高,信号中点越密集,小波变换越精确,误差减小,但计算量也会随之增大。作者建议分析人员应该在精度和计算量之间取得平衡。文中算例仅以 $j=11$ 做了说明,对于尺度 j 取其它值分析时方法雷同,但分析效果有差异,结果误差不同。

5 结论

本文基于状态空间和小波变换理论,实现了从振动微分方程到线性代数方程组的二次转变,把时变系统受迫振动下的参数识别问题转化为线性代数方程组的求解问题。只需使用一组激励和响应数据,就能识别时变系统的动力学参数。二自由度弹簧-质量-阻尼模型的仿真算例验证了该方法的正确性和有效性。综合来讲,本文方法具有运用方便、刚度识别对噪声不敏感等优点,但如何提高信噪比较小时阻尼的识别精度仍需要进一步深入研究。

参考文献:

- [1] Feldman M. Non-linear system vibration analysis using Hilbert transform-I: Free vibration analysis method FREEVIB [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1994, 8(2): 119—127.
- [2] Shi Z Y, Law S S, Xu X. Identification of linear time-varying mdof dynamical systems from forced excitation using Hilbert transform and EMD method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 321: 572—589.
- [3] Liu K. Identification of linear time-varying systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 206(4): 487—505.
- [4] Ko W J, Huang C F. Extraction of structural system

- matrices from an identified state-space system using combined measurements of DVA [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 249(5): 955—970.
- [5] 庞世伟, 于开平, 邹经湘. 用于时变系统辨识自由响应递推子空间方法[J]. *振动工程学报*, 2005, 18(2): 233—237.
Pang Shiwei, Yu Kaiping, Zou Jingxiang. Time-varying system identification using recursive subspace method based on free response data [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2005, 18(2): 233—237. (in Chinese)
- [6] Amaratunga K, Williams J R, Qian S. Wavelet-galerkin solutions for one dimensional partial differential equation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 2703—2716.
- [7] Ghanem R, Romeo F. A wavelet-based approach for the identification of linear time-varying dynamical systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 234(4): 555—576.
- [8] 邹经湘, 于开平, 杨炳渊. 时变结构的参数识别方法[J]. *力学进展*, 2000, 30(3): 370—377.
Zou Jingxiang, Yu Kaiping, Yang Bingyuan. Methods of time-varying structural parameter identification [J]. *Advances in Mechanics*, 2000, 30(3): 370—377. (in Chinese)
- [9] Juang J N, Pappa R S. An eigen-system realization algorithm for modal parameter identification and model reduction [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1985, 8(5): 620—627.
- [10] Liu K. Extension of modal analysis to linear time-varying systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 226(1): 149—167.
- [11] 于开平, 谢礼立, 樊久铭. 移动质量-简支梁系统的参数辨识[J]. *地震工程与工程振动*, 2002, 22(5): 14—17.
Yu Kaiping, Xie Lili, Fan Jiuming. A parameter identification of simply supported beams system carrying a moving mass [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2002, 22(5): 14—17. (in Chinese)
- [12] 李会娜, 史治宇. 基于自由响应数据的时变系统物理参数识别[J]. *振动工程学报*, 2007, 20(4): 348—352.
Li Huina, Shi Zhiyu. Physical parameter identification of time-varying system based on free response data [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2007, 20(4): 348—352. (in Chinese)
- [13] 李会娜, 史治宇. 基于随机激励响应的时变系统物理参数子空间识别方法研究[J]. *工程力学*, 2008, 25(9): 46—51.
Li Huina, Shi Zhiyu. Subspace-based physical parameter identification of time-varying system using random excitation response [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(9): 46—51. (in Chinese)
- [14] Tasker F, Bosse A, Fisher S. Real-time modal parameter estimation using subspace methods: Theory [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, 12(6): 797—808.
- [15] 庞世伟, 于开平, 邹经湘. 识别时变结构模态参数的改进子空间方法[J]. *应用力学学报*, 2005, 22(2): 184—188.
Pang Shiwei, Yu Kaiping, Zou Jingxiang. Improved subspace method with application in linear time-varying structural modal parameter identification [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2005, 22(2): 184—188. (in Chinese)
- [16] Le T P, Argoul P. Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 277: 73—100.
- [17] Mitra M, Gopalakrishnan S. Spectrally formulated wavelet finite element for wave propagation and impact force identification in connected 1-D waveguides [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42: 4695—4721.
- [18] 史治宇, 沈林. 基于小波方法的时变动力系统参数识别[J]. *振动、测试与诊断*, 2008, 28(2): 108—112.
Shi Zhiyu, Shen Lin. Parameter identification of linear time-varying dynamical system based on wavelet method [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2008, 28(2): 108—112. (in Chinese)
- [19] Latto A, Resnikoff H L, Tenenbaum E. The evolution connection coefficients of compactly supported wavelets [C]// *Proceedings of the French-USA workshop on wavelets and turbulence*. NY USA, Springer-Verlag Press, 1992.
- [20] Juang J N. *Applied system identification* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [21] Amratunga K, Willim J. Wavelet-Galerkin solution for one-dimensional partial differential equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 2703—2716.
- [22] Roger G, Francesco R. A wavelet-based approach for model and parameter identification of non-linear systems [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, 36: 835—859.