文章编号：1000-4750(2011)05-0194-06

基于等效模型的索牵引并联机器人的刚度分析

*杜敬利，保　宏，崔传贞

(西安电子科技大学电子装备结构教育部重点实验室，西安 710071)

摘　要：现有索牵引并联机器人研究中，由于柔索长度较短大多将其处理成仅能受拉的直线索单元，没有考虑柔索垂度的影响，刚度分析过程与刚性支腿并联机器人相同。为考虑垂度影响，该文采用悬链线方程建立了大跨度柔索的静力学模型，推导出柔索的刚度矩阵。然后提出了一种刚度等效模型，将柔索等效为三根两两相互垂直的弹簧。于是便可将索牵引并联机器人等效为弹簧支撑并联机器人，从而利用现有的刚度分析结论即可完成大跨度索牵引机器人的刚度分析。最后，以大射电望远镜的索支撑系统为例研究了其刚度特性。

关键词：索牵引机器人；刚度分析；悬链线；刚度等效；静力学

中图分类号：TP242　　**文献标识码：**A

STIFFNESS ANALYSIS OF CABLE-DRIVEN PARALLEL MANIPULATORS USING EQUIVALENT MODEL

*DU Jing-li , BAO Hong , CUI Chuan-zhen

(Ministry of Education Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: In most of the analysis of cable-driven parallel manipulators composed of relatively short cables, cables are treated as linear elements that can only be tensioned, and the sag effects due to their self-weight cannot be considered. As a result, the stiffness analysis procedure is the same as that of rigid-link parallel manipulators. In this paper, the static model for long-span cables is constructed using catenary equation to account for the sag effects, and the stiffness matrix of a cable is deduced. An equivalent model in the stiffness sense is presented, in which a cable can be replaced by 3 springs perpendicular to each other. Then a cable-driven parallel manipulator is equivalent to its relative rigid-link counterpart. The stiffness matrix of a long-span cable-driven manipulator can be obtained by referring to the available conclusions of the stiffness analysis. The stiffness of the cable-supporting system for a large radio telescope is presented as a numerical example.

Key words: cable-driven manipulator; stiffness analysis; catenary; stiffness equivalent; static

为适应射电天文学发展的需要，我国科学家正在筹建新一代 500m 口径大射电望远镜，其中的馈源索支撑粗调系统由 6 根百余米长的柔索拖动装有精调机构的馈源舱体实现空间扫描运动[1−2]，是一种典型的 6 索牵引并联机器人，如图 1 所示。

索支撑系统的刚度远小于 Stewart 平台精调机构的刚度，故前者将直接影响到馈源指向跟踪系统的运动精度、伺服带宽以及动态响应等特性。同时，一旦某根柔索出现松弛将会破坏整个结构的刚度而使结构失稳，或者导致其它柔索的拉力急剧增大。因此必须对索支撑的刚度进行研究。

文[3]研究了无外载荷作用时 6 腿 Stewart 平台

收稿日期：2009-10-23；修改日期：2010-01-13

基金项目：中央高校基本科研业务费项目(JY10000904011，JY10000904006)；国家自然科学基金项目(50775170)

作者简介：*杜敬利(1977－)，男，河北人，副教授，博士，从事柔性结构的力学分析、优化设计与控制的研究(E-mail: jldu@mail.xidian.edu.cn)；
保　宏(1971－)，男，陕西人，副教授，博士，硕导，从事控制与结构的协同设计研究(E-mail: bh-029@163.com)；
崔传贞(1982－)，男，山东人，博士生，从事索牵引并联机器人设计研究(E-mail: czcui@mail.xidian.edu.cn).

并联机器人的刚度分布，给出了刚度矩阵的表达式并指出系统的扭转刚度远低于其他方向的刚度。文[4]给出了考虑柔索预应力刚度时索牵引并联机器人的刚度矩阵，发现扭转刚度不足是导致系统出现不稳定性的主要原因。文[5]研究了一种用作起重设备的 6 索牵引并联机器人的刚度特性，发现由于柔索仅能单向受力故导致系统的横向刚度非常薄弱。

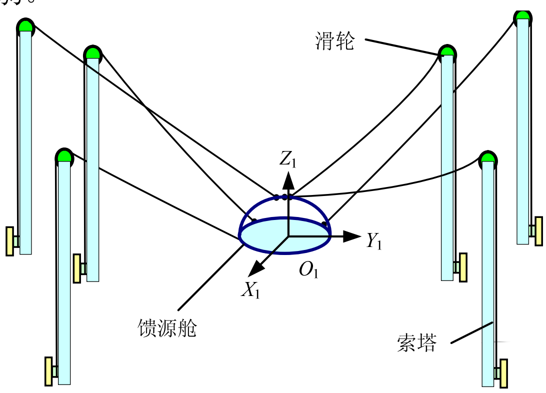


图 1　索支撑 6 索牵引并联机器人

Fig.1　Cable-driven parallel manipulator with 6 cables of cable-supporting system

以上研究中均将柔索处理成仅能单向受拉的直线单元。由于柔索的张力始终大于零，此时的刚度分析与文[3]中的原理基本相同；同时由于索力沿索长方向，Jacobian 矩阵可以直接获得。

大射电望远镜的索支撑系统，由于柔索跨度很大必须考虑垂度影响，需要采用悬链线方程来描述柔索的静力学特性。文[6]发现垂度的存在会降低柔索的刚度，从而导致索支撑系统固有频率的降低。文[7]假设柔索处于一定的张紧状态，在此基础上对索支撑系统的扭转刚度进行了优化。

当考虑垂度影响时，由于索力不再沿索的弦长方向，致使系统 Jacobian 矩阵难以求解。为了克服上述难点，本文提出了一种柔索的刚度等效模型，可将由 m 根柔索牵引的并联机器人在刚度特性上等效为由 $3m$ 根弹簧支撑的并联机器人，借鉴已有的刚度分析成果便可得到系统的刚度矩阵。最后，在数值算例中给出了索支撑系统的刚度分布情况。

1　弹簧支撑并联机器人的刚度分析

对于由 n 根支腿支撑的并联机器人，设作用在末端执行器上的外力载荷为 $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别为作用在末端执行器上的外力和外力矩，包括重力。当考虑支腿的轴向弹性变形时，可将支腿等效为相应刚度的弹簧，如图 2 所示。

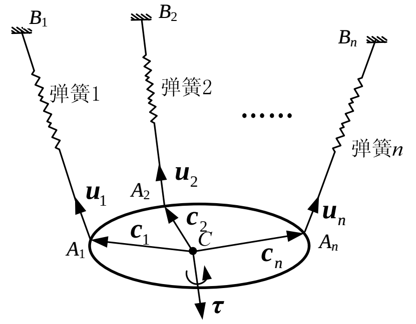


图 2　弹簧支撑并联机器人

Fig.2　Parallel manipulator supported with springs

对于系统中的第 $i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$根支腿，其一端连接到地基上的点 B_i，另一端连接到末端执行器上的点 A_i。由末端执行器的质心 C 指向连接点 A_i 的向量记为 $\boldsymbol{c}_i$，沿支腿方向由 A_i 指向 B_i 的单位向量记为 $\boldsymbol{u}_i$。设末端执行器的位姿坐标为 $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^{\mathrm{T}}$。记 $\boldsymbol{l} = [l_1, l_2, \cdots, l_n]^{\mathrm{T}}$ 为腿长向量，其中 l_i 为第 i 根支腿的长度。于是，该并联机器人的 Jacobian 矩阵可以表示为：

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

末端执行器的静平衡方程为：

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n]^{\mathrm{T}}$，$\tau_i$ 为第 i 根支腿的张力。

为推导系统的刚度矩阵，在末端执行器上施加载荷增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = [\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{d}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，则末端执行器将会产生位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = [\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{d}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。由式(1)可知，对应的腿长改变量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{p}$。根据虎克定律，相应的支腿张力增量可以表示为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{3}$$

其中：$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_n)$；$k_i = EA/l_i$ 为支腿 i 的轴向刚度；E 和 A 分别为支腿的弹性模量和横截面积。

根据 Jocabian 矩阵的力传递性，由式(2)，支腿张力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 和外力载荷增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}$ 之间应满足 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} + \mathrm{d}\boldsymbol{Q} = 0$，将式(3)代入得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{4}$$

于是，可得系统的刚度矩阵为：

$$\boldsymbol{K} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{J} \tag{5}$$

式(5)便是在并联机器人研究中广泛采用的系统刚度矩阵的表达式，文[3]也采用了该式。式(5)表明系统的刚度与支腿的轴向刚度成正比。

2　索牵引并联机器人的静力学分析

由于刚度特性与静平衡状态密切相关，为此需要首先对索牵引并联机器人进行静力学分析。

2.1　柔索的静力学分析

考虑长度为 L，横截面积为 A，弹性模量为 E，单位长度重力为 w 的柔索在其局部坐标系的 $O'y'z'$ 平面内处于静平衡状态，重力沿 z' 轴负向，如图 3。设索上一点 P 对应的曲线坐标为 s，相应的无应变长度为 s_0。对 P 点处的柔索微段进行受力分析得：

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=F_y \tag{6}$$

$$T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=F_z+w(s_0-L) \tag{7}$$

其中 T 为点 P 处的柔索张力。

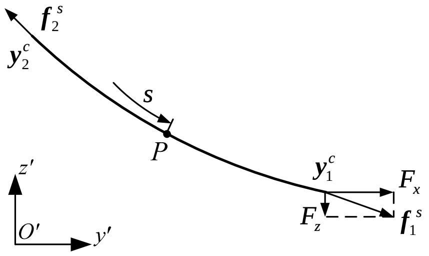


图 3　悬链线柔索的受力分析

Fig.3　Mechanical analysis of a catenary cable

同时，柔索的静平衡构型需要满足几何约束 $(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2=(\mathrm{d}s)^2$。由式(6)和式(7)解出 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}s$ 后代入几何约束方程，据此可将柔索张力 T 表示为 s_0 的函数：

$$T(s_0)=\sqrt{F_y^2+(F_z+w(s_0-L))^2} \tag{8}$$

其中：F_y 为柔索的水平张力，沿整个索长方向水平张力相同；F_z 为柔索末端竖直方向的张力。

假设柔索材料满足虎克定律，即 $T(s_0)=EA(\mathrm{d}s/\mathrm{d}s_0-1)$。注意到 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}s_0=(\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s/\mathrm{d}s_0)$ 和 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}s_0=(\mathrm{d}z/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s/\mathrm{d}s_0)$，可得如下微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s_0}=\frac{F_y}{EA}+\frac{F_y}{\sqrt{F_y^2+(F_z+w(s_0-L))^2}} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s_0}=\frac{F_z}{EA}+\frac{w(s_0-L)}{EA}+\frac{F_z+w(s_0-L)}{\sqrt{F_y^2+(F_z+w(s_0-L))^2}} \tag{10}$$

对式(9)和式(10)进行积分并结合相应的边界条件可得 $y(s_0)$ 和 $z(s_0)$ 的表达式[6]。将 $s_0=L$ 代入即可得到索端节点间相对位置的表达式：

$$f_y^c=\frac{F_yL}{EA}+\frac{F_y}{w}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{F_z}{F_y}\right)-\sinh^{-1}\left(\frac{F_z+wL}{F_y}\right)\right] \tag{11}$$

$$f_z^c=\frac{F_zL}{EA}+\frac{wL^2}{2EA}+\frac{1}{w}\left[\sqrt{F_y^2+(F_z+wL)^2}-\sqrt{F_y^2+F_z^2}\right] \tag{12}$$

式中，$[f_y^c\ \ f_z^c]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}_1^c-\boldsymbol{y}_2^c$。可以看出索端节点相对位置 $(\boldsymbol{y}_1^c-\boldsymbol{y}_2^c)$ 是关于索端拉力 $\boldsymbol{f}_1^c=[F_y\ \ F_z]^{\mathrm{T}}$ 和索长 L 的函数，记为：

$$\boldsymbol{y}_1^c-\boldsymbol{y}_2^c=\boldsymbol{\varPhi}^c(\boldsymbol{f}_1^c,\ L) \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\varPhi}^c=[f_y^c\ \ f_z^c]^{\mathrm{T}}$。

由式(13)可以将索端拉力 $\boldsymbol{f}_1^c$ 表示为索端节点相对位置 $(\boldsymbol{y}_1^c-\boldsymbol{y}_2^c)$ 和索长 L 的函数。引入柔索局部坐标系相对于全局坐标系的坐标变换矩阵 $\boldsymbol{B}$[8]。在全局坐标系下索端拉力 $\boldsymbol{f}$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_1^c \tag{14}$$

2.2　索牵引并联机器人的静力学方程

对于由 m 根柔索牵引的并联机器人，柔索对末端执行器的合力 $\boldsymbol{F}^e$ 和合力矩 $\boldsymbol{M}^e$ 可以分别表示为：

$$\boldsymbol{F}^e=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{f}_i \tag{15}$$

$$\boldsymbol{M}^e=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{c}_i\times\boldsymbol{f}_i \tag{16}$$

系统的静平衡方程为：

$$[\boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{M}^{e\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}=0 \tag{17}$$

式(17)是关于索长 $\boldsymbol{L}=[L_1, L_2, \mathbf{L}, L_m]^{\mathrm{T}}$ 的非线性函数，可采用数值迭代算法进行求解[9]。

3　索牵引机器人的刚度等效模型

3.1　柔索的刚度等效

本节将推导柔索的刚度矩阵，并根据刚度等效的原则采用数根弹簧来代替单根柔索的刚度。

对式(13)做一阶线性展开，得：

$$\Delta(\boldsymbol{y}_1^c-\boldsymbol{y}_2^c)=\frac{\partial\boldsymbol{\varPhi}^c}{\partial\boldsymbol{f}_1^c}\Delta\boldsymbol{f}_1^c \tag{18}$$

式中，导数 $\partial\boldsymbol{\varPhi}^c/\partial\boldsymbol{f}_1^c$ 的具体表达式可见文献[10]。

考虑到柔索与地基相连的一端 $\boldsymbol{y}_2^c$ 位置固定不动，即 $\Delta\boldsymbol{y}_2^c=0$，由式(18)可得：

$$\Delta \boldsymbol{f}_1^c = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^c}{\partial \boldsymbol{f}_1^c}\right]^{-1} \Delta \boldsymbol{y}_1^c = \boldsymbol{k}_{yz} \Delta \boldsymbol{y}_1^c \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{k}_{yz}$ 即为柔索的面内刚度矩阵；$\Delta \boldsymbol{y}_1^c=[\Delta y_1\ \Delta z_1]^{\mathrm{T}}$ 为柔索末端的面内位移； $\Delta \boldsymbol{f}_1^c = [\Delta F_y\ \Delta F_z]^{\mathrm{T}}$。

当在柔索末端施加位移 $\boldsymbol{\delta} = [\Delta x_1\ \Delta y_1\ \Delta z_1]^{\mathrm{T}}$ 时，由材料力学知识可知，产生的柔索张力增量是面外位移 Δx_1 的二阶小量[11]。因此，面外索端拉力增量 ΔF_x 仅为柔索水平张力 F_y 沿 x' 方向的分量，有：

$$\Delta F_x = F_y \Delta x_1 / f_y^c = k_x \Delta x_1 \tag{20}$$

由式(20)可知，ΔF_x 与位移 Δy_1 和 Δz_1 无关，这表明柔索的面外刚度与面内刚度之间相互独立。

根据结构刚度矩阵的性质，或参考文献[8]可知，柔索的面内刚度矩阵 $\boldsymbol{k}_{yz}$ 为一正定实对称矩阵，记为：

$$\boldsymbol{k}_{yz} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix} \tag{21}$$

矩阵 $\boldsymbol{k}_{yz}$ 的特征方程为：

$$|\, l\boldsymbol{I} - \boldsymbol{k}_{yz} | = (l - k_1)(l - k_4) - k_2^2 = 0 \tag{22}$$

由于 $\boldsymbol{k}_{yz}$ 正定，且 $k_2 \neq 0$，结合式(22)可知 $\boldsymbol{k}_{yz}$ 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 满足 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。

对于实对称矩阵有如下定理：

定理 1. 设 λ_1 和 λ_2 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是对应的特征向量，若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 则 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 正交。

定理 2. 对于 r 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个特征值为对角元素的对角阵。

对于柔索的面内刚度矩阵 $\boldsymbol{k}_{yz}$，设与 λ_1 和 λ_2 对应的单位特征向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，于是由特征向量构成的正交矩阵 $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]$，满足：

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{k}_{yz}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$。易知 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$，故 $\boldsymbol{T}$ 为正交阵。

在柔索末端点处，索平面内建立坐标系 $O^e x^e y^e z^e$，其中 y^e 轴与 y' 轴之间的夹角为 θ。在局部坐标系的 y^e 轴和 z^e 轴方向分别施加轴向刚度为 $k_y = \lambda_1$ 和 $k_z = \lambda_2$ 的弹簧，见图 4。存在适当的角度 θ 使得该弹簧系统的面内刚度与柔索的面内刚度相等，下面进行证明。

易知，在柔索坐标系 $O'x'y'z'$ 下弹簧系统的面内刚度矩阵为：

$$\boldsymbol{k}_s = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}^{-1} \tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$。对比式(23)可知当 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}$ 时有 $\boldsymbol{k}_s = \boldsymbol{k}_{yz}$，据此便可确定出角度 θ。这样柔索的刚度矩阵可以表示为 $\boldsymbol{k} = \mathrm{diag}(k_x, \boldsymbol{k}_{yz})$。

于是，单根柔索可以等效为 3 根两两相互垂直的弹簧，分别沿局部坐标系 $O^e x^e y^e z^e$ 的三个坐标轴方向，其刚度分别为 k_x、k_y 和 k_z。

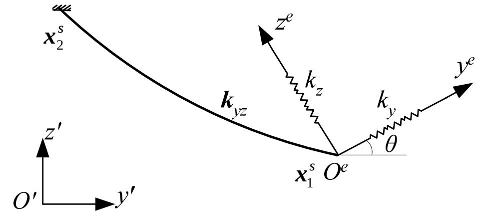


图 4　柔索面内刚度的等效模型

Fig.4　Equivalent model of in-plane stiffness of a cable

3.2　索牵引并联机器人的刚度等效

这样，由 m 根柔索牵引的并联机器人可以等效为由 $3m$ 根弹簧支撑的并联机器人，如图 5 所示。

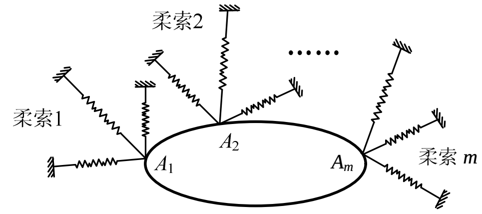


图 5　索牵引并联机器人的刚度等效模型

Fig.5　Stiffness equivalent model of a cable-driven parallel manipulator

对于第 i 根柔索，设其 3 根等效弹簧的刚度分别为 k_{xi}、k_{yi} 和 k_{zi}，沿弹簧方向的单位向量分别为 $\boldsymbol{t}_{xi}$、$\boldsymbol{t}_{yi}$ 和 $\boldsymbol{t}_{zi}$。于是等效模型的 Jocabian 矩阵为：

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_{x1} & \boldsymbol{t}_{y1} & \boldsymbol{t}_{z1} & \boldsymbol{t}_{x2} & \boldsymbol{t}_{y2} & \boldsymbol{t}_{z2} & \mathrm{L} & \boldsymbol{t}_{xm} & \boldsymbol{t}_{ym} & \boldsymbol{t}_{zm} \\ \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{t}_{x1} & \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{t}_{y1} & \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{t}_{z1} & \boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{t}_{x2} & \boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{t}_{y2} & \boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{t}_{z2} & \mathrm{L} & \boldsymbol{c}_m \times \boldsymbol{t}_{xm} & \boldsymbol{c}_m \times \boldsymbol{t}_{ym} & \boldsymbol{c}_m \times \boldsymbol{t}_{zm} \end{bmatrix}_{6\times 3m} \tag{25}$$

对应的由弹簧轴向刚度构成的方阵为：

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(k_{x1}, k_{y1}, k_{z1}, k_{x2}, k_{y2}, k_{z2}, \ldots, k_{xm}, k_{ym}, k_{zm}) \tag{26}$$

由式(5)可知索牵引并联机器人的刚度矩阵为 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{J}$。

4　数值算例

大射电望远镜的索支撑系统中，6 个索塔分布在半径为 12.5m 的正六边形的顶点上，高度均为 21m。柔索的单位长度重量 $w = 1.37$N/m，弹性模量

$E = 210$GPa，横截面积 $A = 8.539\times10^{-5}$m^2。全局坐标系的原点位于正六边形的中心，x 轴通过六边形的一个顶点，z 轴竖直向上，为整个系统的对称轴。在末端执行器的底面中心处建立局部坐标系，柔索与末端执行器相连的 6 个点分为上下两层，下层 3 个连接点均布在直径为 1.2m 的分布圆上，该圆位于末端执行器局部坐标系的 xy 平面上；上层 3 个连接点均布在直径为 0.4m，在局部坐标系中 z 坐标为 0.5m 的圆上。末端执行器质量为 120kg，质心位于局部坐标系的 z 轴上，z 坐标为 0.3m。上下两层索连接点之间错开 70°角。

4.1 单点处的刚度矩阵

当末端执行器处于点 $\boldsymbol{p}$ = [1.0m, 0.0m, 12.47m, 0.0°, –3.90°, 177.96°]$^{\mathrm{T}}$ 时系统的刚度矩阵为：

$$\boldsymbol{K} = 1.0^5 \times \begin{bmatrix} 2.452 & -0.000 & 0.023 & -0.002 & 0.307 & -0.000 \\ -0.000 & 2.462 & -0.000 & -0.255 & -0.000 & 0.001 \\ 0.023 & -0.000 & 0.560 & -0.000 & 0.026 & 0.002 \\ -0.002 & -0.255 & -0.000 & 0.270 & 0.000 & 0.019 \\ 0.307 & -0.000 & 0.026 & 0.000 & 0.326 & -0.001 \\ -0.000 & 0.001 & 0.002 & 0.019 & -0.001 & 0.018 \end{bmatrix}$$

刚度矩阵的特征值 $\boldsymbol{\lambda}$=[2.496, 2.491, 0.561, 0.280, 0.242, 0.016]$\times1.0^5$，其中最小特征值对应的特征向量为 $\boldsymbol{v}_1$ = [0.000, –0.001, 0.003, 0.002, –0.081, 0.997]$^{\mathrm{T}}$。这表明绕末端执行器局部坐标系 z 轴的扭转刚度最为薄弱，与文[3－4]中的结论相同。绕局部坐标系 z 轴的扭转刚度比绕其他两个方向的扭转刚度低一个数量级。

该点处系统的刚度矩阵为一对角占优阵，平动刚度和转动刚度耦合不大。随着末端执行器姿态角度的增大，刚度矩阵不再是一对角占优阵，平动刚度与转动刚度之间相互耦合。

4.2 工作空间内的刚度分布

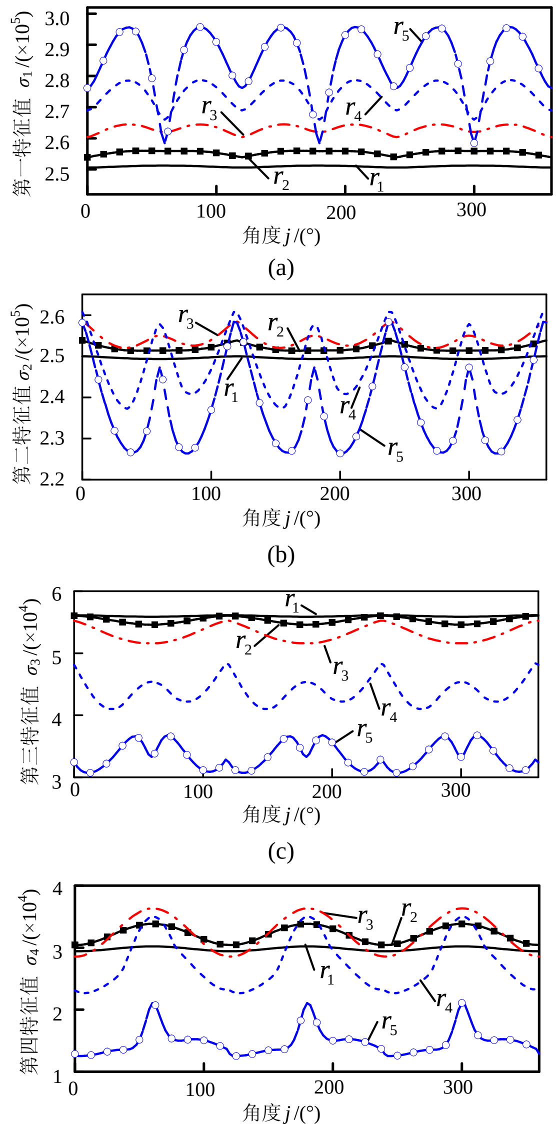
索支撑系统的工作空间为一球冠面，球心和球面顶点均位于 z 轴上，可以表示为：

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = h - (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$$

其中：$r\in$[0 m 10 m]；$\varphi\in$[0° 360°]；h = 31.1m；R = 18.7m。由于采用点馈源，要求末端执行器在运行过程中其中轴始终指向点 S(0, 0, 31.1)m，同时结合 6 根索的拉力尽量均匀来确定末端执行器的姿态[9]。

将刚度矩阵的特征值作为刚度的评价标准，在工作空间内取不同的半径 r，计算在相应圆周上系统的刚度矩阵。刚度矩阵的特征值与角度 φ 之间的关系如图 6 所示，其中 $r_1, r_2, \mathbf{L}, r_5$ 分别与 r = 2m, 4m, 6m, 8m, 10m 相对应。

可以看出，当半径 r 较小时刚度矩阵的特征值随角度 φ 变化不大；当半径 r 增大时，特征值随角度 φ 的改变而迅速变化，刚度均匀性变差。随着半径 r 的增大，第一特征值单调递增，第二特征值和第四特征值先增大后减小，第三特征值和第五特征值单调递减，而第六特征值变化不大。特征值的变化趋势与柔索的受力状态有关，总体上，随着半径的增大，末端执行器的高度也在增大，柔索竖直方向的投影变小导致柔索张力增大，从而使第一特征值增大，但其受力状态变差，随着角度 φ 的改变各索张力变化范围迅速增大，使得刚度呈现出如图 6 所示的变化趋势。

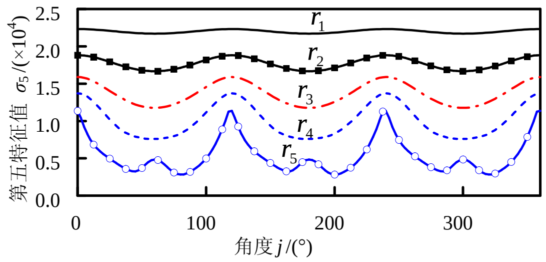


(a)

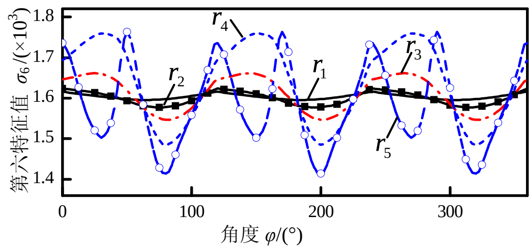
(b)

(c)

(d)



(e)



(f)

图 6　工作空间内的刚度分布

Fig.6　Stiffness distribution within the workspace

5　结束语

本文采用刚度等效的方法导出了索牵引并联机器人刚度矩阵。文中首先推导了悬链线柔索的刚度矩阵，并将其等效为三根两两相互垂直的弹簧。然后建立了索牵引并联机器人的弹簧支撑等效模型，在此基础上得到了系统刚度矩阵。

系统的刚度与柔索的轴向刚度及柔索在末端执行器上的连接点位置有关，同时也与柔索张力密切相关。提高柔索张力是增加系统刚度的有效途径之一。分析结果表明系统沿各个方向的刚度差别很大。如何选择合适的结构参数来提高系统的刚度需要做进一步的研究。

参考文献：

[1]　Nan Rendong. Five hundred meter aperture spherical radio telescope (FAST) [J]. Science in China: Series G, Physics, Mechanics & Astronomy, 2006, 49(2): 129－148.

[2]　Duan B Y, Qiu Y Y, Zhang F S. On design and experiment of the feed cable-suspended structure for super antenna [J]. Mechatronics, 2009, 19(4): 503－509.

[3]　Gosselin C. Stiffness mapping for parallel manipulators [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 377－382.

[4]　Behzadipour S, Khajepour A. Stiffness of cable-based parallel manipulators with application to stability analysis [J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 303－310.

[5]　Dagalakis N G, Albus J S, Wang B L. Stiffness study of a parallel link robot crane for shipbuilding applications [J]. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 1989, 111(3): 183－193.

[6]　Kozak K, Zhou Q, Wang J. Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass [J]. IEEE Transaction on Robotics, 2006, 22(3): 425－433.

[7]　杜敬利，段宝岩，保宏．一种缓慢运动索牵引并联机器人的跟踪控制[J]．振动与冲击，2008，27(11)：173－176.

Du Jingli, Duan Baoyan, Bao Hong. Tracing control of a cable-driven parallel manipulator with slow motion [J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(11): 173－176. (in Chinese)

[8]　Jayaraman H B, Knudson W C. A curved element for the analysis of cable structures [J]. Computers and Structures, 1981, 14(3-4): 325－333.

[9]　Qiu Y Y, Duan B Y, Wei Q, Du J L. Elimination of force singularity of the cable and cabin structure for the next generation large radio telescope [J]. Mechatronics, 2002, 12: 905－918.

[10]　Kim K S, Lee H S. Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges [J]. Computers and Structures, 2001, 79: 2681－2692.

[11]　Wang P H, Fung R F, Lee M J. Finite element analysis of a three-dimensional underwater cable with time-dependent length [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 209(2): 223－249.