文章编号：1000-4750(2006)02-0168-05

风荷激励下天线结构的随机振动分析

*王芳林，高　伟，陈建军

(西安电子科技大学机电工程学院，西安 710071)

摘　要：研究随机天线结构的风激随机振动响应问题。考虑天线结构物理参数、几何尺寸和结构阻尼的随机性，在基于随机因子法对结构进行动力特性分析的基础上，从结构风激随机振动响应在频域上的表达式出发，利用求解随机变量函数矩的方法和求解随机变量数字特征的代数综合法，导出了随机天线结构在风荷激励下位移响应均方值和应力响应均方值的均值、方差和变异系数的计算表达式。以 8 米口径天线为例，分析了结构物理参数、几何尺寸和阻尼的随机性对天线结构风激位移响应均方值和应力响应均方值随机性的影响。

关键词：随机天线结构；风荷激励；随机振动；数字特征；随机激励

中图分类号：TB123　O324　　文献标识码：A

RANDOM VIBRATION ANALYSIS OF STOCHASTIC ANTENNA STRUCTURES UNDER WIND EXCITATION

*WANG Fang-lin , GAO Wei , CHEN Jian-jun

(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The random vibration analysis of stochastic antenna structures under wind excitation is studied in this paper. Based on the structural dynamic characteristic analysis in which the random factor method is utilized, the computational expressions of the mean value, variance and variation coefficient of the mean square value of the structural displacement and stress responses under wind excitations are developed. The random variable's functional moment method and the algebra synthesis method from the expressions of structural random response in the frequency domain are employed. The randomness of structural damping, physical parameters and geometric dimensions is considered. The influences of the randomness of the structural physical parameters and geometric dimensions on the randomness of the mean square value of the antenna structural displacement and stress responses are investigated through a sample antenna with 8 meter caliber.

Key words: stochastic antenna structure; wind excitation; random vibration; numerical characteristics; random excitation

自然风中的脉动分量是引起结构风激振动的主要因素[1]，而天线结构的风激振动又严重影响着天线的工作精度。由于天线结构在生产过程中不可避免地受到多种随机因素的影响，使其物理参数、几何尺寸、阻尼呈现出一定的分散性。因此，随机天线结构在风荷激励下的随机振动响应分析是一个具有现实工程背景和重要理论意义的研究课题。

同时考虑结构和荷载随机性的研究成果目前还不多见，原因是随机结构的随机响应分析较之只考虑其中之一的随机性时结构的动力响应分析要

———————————————

收稿日期：2004-04-14；修改日期：2004-07-09

基金项目：国防预研基金(51421060505DZ0155)项目资助

作者简介：*王芳林(1965)，男，陕西人，副教授，博士、从事结构动力学和先进制造技术研究；(E-mail: flwang@mail.xidian.edu.cn)

高　伟(1972)，男，陕西人，博士，从事结构振动与主动控制研究；(wigao@sohu.com)

陈建军(1951)，男，河北人，教授、博导，从事计算力学与结构可靠性研究(E-mail: jjchen@xidian.edu.cn)

复杂得多。目前，对于随机结构在随机激励下的动力响应分析方法主要是 Monte Carlo 模拟方法[2]、摄动法[3]和基于正交展开理论的扩阶系统法[4]。Monte Carlo 方法具有普遍性，但因计算量太大不能承受；摄动法可以减少计算工作量，但因存在久期项问题而在逻辑上存在固有缺陷；广义正交展开法虽较前两者计算量小且不存在久期项问题，但同前两者一样对于结构的随机性均以小参数来描述，无法具体反映结构物理参数、几何参数和阻尼中的某一参数对结构随机动力响应的影响。

自然风在流动过程中受到地面各障碍物的影响，其速度呈现出随机脉动特性。但可以认为，自然风是由平均风和脉动风两部风组成，其风速含有一个平均分量和一个脉动分量。因此，在自然风作用下，结构的风荷载是由两部分组成：一是平均风作用下的静风荷载，二是由于自然风的紊流成分诱发导致的随机脉动荷载。静风荷载所引起的天线结构静变形可由结构的静力分析获得；本文讨论脉动荷载导致的结构随机振动。文中以随机天线结构为对象，在利用随机因子法[5-10]分析结构动力特性的基础上，对结构的风激随机振动进行分析。利用求解随机变量函数矩的方法和求解随机变量数字特征的代数综合法，导出了随机天线结构在脉动风荷激励下位移响应均方值和应力响应均方值随机变量的数字特征计算表达式。

1 天线结构的风激随机振动分析

设在天线结构(线弹性的空间杆系结构)中共有 ne 个单元，则总体坐标下结构的刚度阵 $[K]$ 和质量阵 $[M]$ 分别为：

$$[K]=\sum_{e=1}^{ne}[K^{(e)}]=\sum_{e=1}^{ne}\{\frac{E^{(e)}A^{(e)}}{l^{(e)}}[G]\} \tag{1}$$

$$[M]=\sum_{e=1}^{ne}[M^{(e)}]=\sum_{e=1}^{ne}\{\frac{1}{2}\rho^{(e)}A^{(e)}l^{(e)}[I]\} \tag{2}$$

式中： $E^{(e)}$、 $A^{(e)}$、 $l^{(e)}$ 和 $\rho^{(e)}$ 分别为杆单元 e 的弹性模量、截面积、杆长和材料质量密度 ;矩阵 $[G]$、$[I]$ 分别为总体坐标下单元刚度矩阵、质量矩阵不含结构参数的部分。

设结构共有 n 个自由度，结构受到平稳随机荷载激励时的有限元动力学方程可表为：

$$[M]\{\ddot{u}(t)\}+[C]\{\dot{u}(t)\}+[K]\{u(t)\}=\{P(t)\} \tag{3}$$

式中：$\{u(t)\}$、$\{\dot{u}(t)\}$、$\{\ddot{u}(t)\}$ 分别为结构的位移、速度和加速度响应向量；$[M]$、$[C]$ 和 $[K]$ 分别为结构的质量、阻尼和刚度矩阵；$\{P(t)\}$ 为作用于结构上的风荷的随机脉动荷载向量。

利用振型解耦及 Duhamel 积分可求得方程(3)的形式解为：

$$\{u(t)\}=\int_0^t[\phi][h(\tau)][\phi]^T\{P(t-\tau)\}\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

式中：$[\phi]$ 为结构的正则振型矩阵；$[h(t)]$ 为结构的脉冲响应函数矩阵，且有：

$$[h(t)]=diag[h_j(t)] \tag{5}$$

$$h_j(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\omega}_j}\exp(-\xi_j\omega_j t)\sin\overline{\omega}_j t & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{6}$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

式中：$\overline{\omega}_j=\omega_j(1-\xi_j^2)^{1/2}$ ；ω_j 为结构的第 j 阶固有频率；ξ_j 为结构的第 j 阶振型阻尼比；s 为结构的固有频率总阶数。

由式(4)出发，可求得结构位移响应均方值矩阵为[8]：

$$[\psi_u^2]=\int_0^\infty[S_u(\omega)]\mathrm{d}\omega=\int_0^\infty[\phi][H(\omega)][\phi]^T[S_p(\omega)][\phi][H^*(\omega)][\phi]^T\,\mathrm{d}\omega \tag{7}$$

则结构第 k 个自由度位移响应的均方值为：

$$\psi_{uk}^2=\vec{\phi}_k\cdot\int_0^\infty[H(\omega)][\phi]^T[S_p(\omega)][\phi][H^*(\omega)]\,\mathrm{d}\omega\cdot\vec{\phi}_k \tag{8}$$

$$(k=1,2,\cdots,n)$$

式中：$\vec{\phi}_k$ 为矩阵 $[\phi]$ 的第 k 个行向量；ω 为随机荷载干扰频率；$[S_p(\omega)]$ 为随机荷载向量 $\{P(t)\}$ 的功率谱密度函数矩阵；$[H(\omega)]$ 为结构的频率响应函数矩阵；$[H^*(\omega)]$ 为 $[H(\omega)]$ 的共轭矩阵。

根据有限元法中单元结点位移和单元应力之关系，任一单元 e 的应力响应 $\{\sigma(t)^{(e)}\}$ 可表为：

$$\{\sigma(t)^{(e)}\}=E^{(e)}\cdot[B]\cdot\{u(t)^{(e)}\} \qquad (e=1,2,\cdots,n_e) \tag{9}$$

式中：$\{u(t)^{(e)}\}$ 为 e 单元的结点位移响应向量；$[B]$ 为 e 单元的几何矩阵；$E^{(e)}$ 为 e 单元的弹性模量。

由式(9)可求得结构 e 单元应力响应的均方值为：

$$[\psi_{\sigma^{(e)}}^2]=E^{(e)}[B][\psi_{u^{(e)}}^2][B]^T E^{(e)} \tag{10}$$

2 随机结构的平稳随机响应的数字特征

现考虑结构材料物理参数($\rho^{(e)}$ 、 $E^{(e)}$)、几何

尺寸($A^{(e)}$ 、 $l^{(e)}$)以及阻尼(振型阻尼比 ξ_i)同时具有随机性。由式(1)和式(2)可知：结构的刚度阵 $[K]$ 和质量阵 $[M]$ 亦为随机变量。显然，结构物理参数(质量密度 ρ 和弹性模量 E)、几何尺寸(杆长 l 、杆横截面积 A)的随机性必然导致结构固有频率 ω_j ($j=1,2,\cdots,n$)的随机性，结构固有频率的随机性又必然导致结构位移响应和应力响应均方值的随机性。对于随机性的统计描述是由其随机变量的数字特征予以体现的。下面将导出结构位移响应均方值和应力响应均方值随机变量的数字特征计算表达式。

从式(8)出发，利用求解随机变量函数矩的方法，可求得结构位移响应均方值随机变量 ψ_{uk}^2 的均值 $\mu_{\psi_{uk}^2}$ 和均方差 $\sigma_{\psi_{uk}^2}$ 分别为：

$$\mu_{\psi_{uk}^2} = \mu_{\bar{\phi}_k} \cdot \int_0^{\infty} \mu_{[H(\omega)]}\mu_{[\phi]^T}\mu_{[S_p(\omega)]}\mu_{[\phi]}\mu_{[H^*(\omega)]}\,\mathrm{d}\omega \cdot \mu_{\bar{\phi}_k^T} \tag{11}$$

$$\sigma_{\psi_{uk}^2} = \mu_{\bar{\phi}_k} \cdot \{\int_0^{\infty}\{\mu_{[H(\omega)]}^2(\mu_{[\phi]^T}\mu_{[S_p(\omega)]}\mu_{[\phi]})^2 \sigma_{[H^*(\omega)]}^2 + \sigma_{[H(\omega)]}^2(\mu_{[\phi]^T}\mu_{[S_p(\omega)]}\mu_{[\phi]})^2 \mu_{[H^*(\omega)]}^2\}\mathrm{d}\omega\}^{1/2} \cdot \mu_{\bar{\phi}_k^T} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{12}$$

其中：

$$\sigma_{[H(\omega)]} = \mathrm{diag}\{\frac{\{[(2\mu_{\omega_j} + i\cdot 2\mu_{\xi_j}\omega)\cdot\sigma_{\omega_j}]^2}{(\mu_{\omega_j}^2 - \omega^2 + i\cdot 2\mu_{\xi_j}\mu_{\omega_j}\omega)^2} + \frac{[(i\cdot 2\mu_{\omega_j}\omega)\cdot\sigma_{\xi_j}]^2\}^{1/2}}{(\mu_{\omega_j}^2 - \omega^2 + i\cdot 2\mu_{\xi_j}\mu_{\omega_j}\omega)^2}\} (j=1,2,\cdots,n) \tag{13}$$

基于随机因子法，从结构振动的瑞利商表达式出发，利用求解随机变量数字特征的代数综合法，可以求得 μ_{ω_j} 和 σ_{ω_j} [7]。

由关系式(11)、(12)，可求得随机变量 ψ_{uk}^2 的变异系数 $\nu_{\psi_{uk}^2}$ 为：

$$\nu_{\psi_{uk}^2} = \sigma_{\psi_{uk}^2} \big/ \mu_{\psi_{uk}^2} \tag{14}$$

从式(10)出发，利用求解随机变量数字特征的代数综合法，可求得 e 单元应力响应均方值的均值、均方差和变异系数分别为：

$$\mu_{[\psi_{\sigma(e)}^2]} = (\mu_E^2 + \sigma_E^2)\cdot[B]\cdot\mu_{[\psi_{u(e)}^2]}\cdot[B]^T \quad (e=1,2,\cdots,n_e) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{[\psi_{\sigma(e)}^2]} = \{&(\mu_E^2+\sigma_E^2)^2\cdot([B]\cdot\sigma_{[\psi_{u(e)}^2]}\cdot[B]^T)^2 + \\ &(4\mu_E^2\sigma_E^2 + 2\sigma_E^4)\cdot([B]\cdot\mu_{[\psi_{u(e)}^2]}\cdot[B]^T)^2 + \\ &(4\mu_E^2\sigma_E^2 + 2\sigma_E^4)\cdot([B]\cdot\sigma_{[\psi_{u(e)}^2]}\cdot[B]^T)^2\}^{1/2} \\ &(e=1,2,\cdots,n_e)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\nu_{[\psi_{\sigma(e)}^2]} = \sigma_{[\psi_{\sigma(e)}^2]} \big/ \mu_{[\psi_{\sigma(e)}^2]} \qquad (e=1,2,\cdots,n_e) \tag{17}$$

3 算例

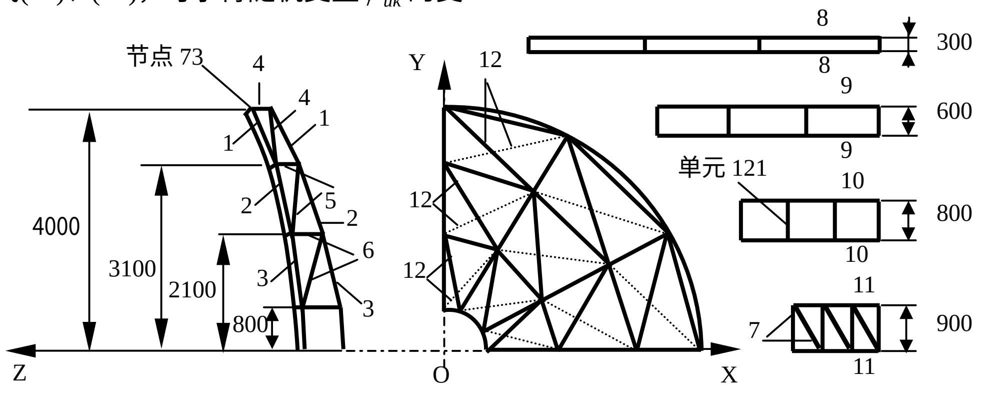
依据上述导出的计算公式和提出的求解方法，编制了随机天线结构平稳随机动力响应分析程序。算例为 8 米口径空间天线(如图 1 所示，图 1 为该轴对称天线的四分之一)。该天线共有 96 个节点，336 个杆单元。单元的截面积分为 12 类(其均值见文献[10])，天线中心的上下弦共 24 个节点被完全固定约束。该结构材料为钢，结构的弹性模量 E 、质量密度 ρ 均为随机变量，它们的均值分别为：$\mu_E = 2.058\times10^5$ (MPa)，$\mu_\rho = 76.5$ (KN/m^3) ;杆长 l 亦为随机变量，并取振型阻尼比 $\xi_j = \xi$ =0.01。

随机脉动风荷载可表为[9]：

$$P = \mu_S A\omega_P \tag{18}$$

其中：μ_S 为风载体形系数；ω_P 为脉动风压；A 为受风荷面积。

脉动风速为零均值随机过程，在计算中采用 Davenport 脉动风速谱[1]，它不随高度的改变而变化：



(单位: mm)

图 1 八米口径天线结构简图

Fig.1 Antenna with caliber of 8 meters

$$\begin{cases} S_V = 4K\overline{V}_{10} \dfrac{x^2}{n(1+x^2)^{4/3}} \\ x = \dfrac{1200n}{\overline{V}_{10}} \end{cases} \tag{19}$$

式中：S_V 为脉动风速谱；n 为风速频率，$\overline{V}_{10}$ 为 10 米高度处的平均风速，K 为地面粗糙度系数。该天线安装在珠海市，由珠海市气象局提供的气象资料，计算时可取截止频率 $\mu_S = 1.3$，$n = 0.15\,\mathrm{Hz}$，$\overline{V}_{10} = 35\,(\mathrm{m/s})$，$K = 1.08$；结构的前 25 阶振型参振。

表 1　节点 73 在 Z 轴方向的位移响应均方值的均值、均方差和变异系数

Tab 1　Mean value, mean variance and variation coefficient of displacement response of node 73 on Z-axis

模型	$\mu_{\psi^2_{Z73}}$ /mm^2	$\sigma_{\psi^2_{Z73}}$ /mm^2	$\nu_{\psi^2_{Z73}}$
确定性模型（$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$）	1.9448×10^{-2}	0	0
$\nu_E = 0.1$　$\nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$	1.9448×10^{-2}	7.7484×10^{-4}	0.03976
$\nu_\rho = 0.1$　$\nu_E = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$	1.9448×10^{-2}	7.7406×10^{-4}	0.03972
$\nu_A = 0.1$　$\nu_E = \nu_\rho = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$	1.9448×10^{-2}	9.4401×10^{-4}	0.04854
$\nu_l = 0.1$　$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_{\xi_j} = 0$	1.9448×10^{-2}	3.0299×10^{-3}	0.1558
$\nu_{\xi_j} = 0.1$　$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = 0$	1.9448×10^{-2}	7.7785×10^{-4}	0.04003
$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0.1$	1.9448×10^{-2}	3.3626×10^{-3}	0.1729
$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0.2$	1.9448×10^{-2}	4.6306×10^{-3}	0.2381
$^*\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0.2$	1.9456×10^{-2}	4.6592×10^{-3}	0.2384

表 2　单元 121 应力响应均方值的均值、均方差和变异系数

Tab 2　Mean value, mean variance and variation coefficient of stress response of element 121

模型	$\mu_{\psi^2_{\sigma121}}$ /Mpa^2	$\sigma_{\psi^2_{\sigma121}}$ /Mpa^2	$\nu_{\psi^2_{\sigma121}}$
确定性模型（$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$）	15.53	0	0
$\nu_E = 0.1$　$\nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$	16.18	3.0338	0.1875
$\nu_\rho = 0.1$　$\nu_E = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$	15.53	0.1815	0.01169
$\nu_A = 0.1$　$\nu_E = \nu_\rho = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0$	15.53	0.2107	0.01357
$\nu_l = 0.1$　$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_{\xi_j} = 0$	15.53	0.7722	0.04972
$\nu_{\xi_j} = 0.1$　$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = 0$	15.53	0.1821	0.01173
$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0.1$	16.18	3.4609	0.2139
$\nu_E = \nu_\rho = \nu_A = \nu_l = \nu_{\xi_j} = 0.2$	17.09	6.3677	0.3726

天线的工作精度是由天线结构上弦节点在 Z 轴方向上的位移响应决定的，位移响应量越小，天线的工作精度越高。为了进行对比，计算分别采用了确定性模型和随机性模型。在确定性模型中，是将所有随机变量的变异系数均取为零时的结果。在随机性模型的计算中，为了考察结构各参数的随机性对天线结构动力响应的影响，在计算模型中分别考虑了弹性模量 E、质量密度 ρ、杆截面积 A、杆长 L 和阻尼(振型阻尼比 ξ_i)五者之一为随机变量和五者同时为随机变量的情况；为了考察结构各参数的分散性对天线结构动力响应的影响，在计算模型中对各参数的分散程度分别取了不同值。指平风正吹(天线电轴-Z 轴与地面平行)时，节点 73 在 Z 轴方向的位移响应均方值 ψ^2_{Z73} 的均值 $\mu_{\psi^2_{Z73}}$、均方差 $\sigma_{\psi^2_{Z73}}$ 和变异系数 $\nu_{\psi^2_{Z73}}$ 的相应计算结果见表 2；为了验证本文方法的正确性，表 1 同时给出了用 Monte-Carlo 数值模拟法模拟 3000 次所得出的部分计算模型的分析结果(前面标*者为 Monte-Carlo 数值模拟法所求得的结果)。表 2 列出了单元 121 应力响应均方值 $\psi^2_{\sigma121}$ 的均值 $\mu_{\psi^2_{\sigma121}}$、均方差 $\sigma_{\psi^2_{\sigma121}}$ 和变异

系数$\nu_{\psi^2_{\sigma 121}}$的相应计算结果。从表 1 可以看出，本文方法所得的计算结果和 Monte-Carlo 数值模拟法的分析结果相吻合。

4 结论

(1) 确定性天线结构风激随机振动响应分析模型的计算结果仅是随机性模型中各随机变量的变异系数均为零的特例。

(2) 弹性模量E、质量密度ρ、杆截面积A、杆长阻尼(振型阻尼比ξ_i)的分散性对天线结构位移和应力响应均方值分散性的影响是不同的，其中杆长l的分散性对天线结构位移响应均方值分散性的影响最大，而弹性模量E的分散性对天线结构应力响应均方值分散性的影响最大。

(3) 同时考虑天线结构所有参数的随机性时，结构位移和应力响应均方值的分散程度大于单独考虑E、ρ、A和l分散性或考虑结构物理参数和几何尺寸的分散性；随着结构各参数分散性增大，结构位移和应力响应均方值的分散性亦增大，因而天线结构的工作精度降低。

参考文献

[1] 王宏，郭彦林，崔晓强. 索-拱杂交结构动力反应分析[J]. 工程力学, 2003, 20(1): 144~148.
Wang Hong, Guo Yanlin, Cui Xiaoqiang. Dynamic analysis of cable-truss hybrid structures[J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(1): 144~18. (in Chinese)

[2] Hurtado J E, Barbat A H. Monte Carlo techniques for stochastic finite elements[J]. Arch. of Comput. Method in Engineering, 1998, 5(1): 3~30.

[3] Cho K N. Mass perturbation influence method for dynamic analysis of offshore structures[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2002, 13(4): 429~436.

[4] 李杰，廖松涛. 线性随机结构在随机激励下动力响应分析 [J]. 力学学报: 2002, 34(3): 416~424.
Li Jie, Liao Songtao. Dynamic response of linear stochastic structures under random excitation[J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(3): 416~424. (in Chinese)

[5] Gao W, Chen J J. Dynamic response analysis of closed loop control system for random intelligent truss structure under random forces [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2004, 18(4): 947~957.

[6] Gao W, Chen J J. Dynamic response analysis of closed loop control system for intelligent truss structures based on probability [J]. Structural Engineering & Mechanics, 2003, 15(2): 239~248.

[7] Gao W, Chen J J, Ma H B, Ma X S. Optimal placement of active bars in active vibration control for piezoelectric intelligent truss structures with random parameters[J]. Computers & Structures, 2003, 81(1): 53~60.

[8] Gao W, Chen J J. Dynamic response analysis of linear stochastic truss structures under stationary random excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275(2): 368~370.

[9] Chen Jianjun, Wang Fanglin. A method of optimum design based on reliability for antenna structures[J]. Structural Engineering and Mechanics, 1999, 8(4):401~410.

[10] 陈建军，高伟. 多工况下天线结构的可靠性优化设计[J]. 机械科学与技术, 2002, 22(3): 373~379.
Chen Jianjun, Gao Wei. Optimization design of antenna structures based on reliability under multi-loading cases [J]. Mechanical Science and Technology, 2002. 22(3): 373~379. (in Chinese)