

文章编号: 1000-4750(2007)07-0072-05

液体非线性晃动的同步 Hopf 分叉现象

*贺元军¹, 尹立中², 马兴瑞³, 王本利¹

(1. 哈尔滨工业大学卫星技术研究所, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 中国运载火箭技术研究院第 14 研究所, 北京 100076;

3. 中国航天科技集团, 北京 100830)

摘 要: 针对受俯仰激励作用的圆柱形贮箱中液体非线性晃动, 用变分原理建立了液体晃动的压力体积积分形式的 Lagrange 函数; 并将速度势函数在自由液面处作波高函数的级数展开, 从而导出自由液面运动学和动力学边界条件非线性方程组; 最后用四阶 Runge-Kutta 法求解非线性方程组。计算发现, 在一定的激励频率内面外主模态和次生模态发生同步 Hopf 分叉, 并给出了发生分叉的频率区域。

关键词: 圆柱形贮箱; 非线性晃动; 同步 Hopf 分叉; Lagrange 函数; 变分原理

中图分类号: V415.4; O322 **文献标识码:** A

SYNCHRONOUS HOPF BIFURCATION OF LIQUID NONLINEAR SLOSHING

*HE Yuan-jun¹, YIN Li-zhong², MA Xing-rui³, WANG Ben-li¹

(1. Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China;

2. No.14 Research Institute China Academy of Launch Technology, Beijing 100076, China;

3. China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100830, China)

Abstract: Under pitching excitation, the Lagrange equation for nonlinear sloshing of liquid in circle cylindrical tank by variational principle in the form of volume integration of pressure is developed. Then the velocity potential function is expanded in series by wave height function at the free surface. The nonlinear equations with kinematical and dynamic free surface boundary conditions are derived. At last, these equations are solved by the fourth order Runge-Kutta method. Through numerical simulation, synchronous Hopf bifurcation of the primary and the secondary nonplanar sloshing modes is observed, and the region of frequency is given.

Key words: circle cylindrical tank; nonlinear sloshing; synchronous Hopf bifurcation; Lagrange function; variational principle

航天器贮箱中的液体晃动是一个复杂的流体动力学过程。目前研究液体非线性晃动的数值模拟方法包括标记网格(MAC)法、流体体积(VOF)法、浮标接力法、有限元法、ALE 有限元法、边界元法等等^[1,2], 虽然数值模拟技术能较好的弥补实验时间短、外载条件实现困难、初始条件不易保证、测量

记录判断困难等的不足, 但是解析方法对于液体晃动各类非线性动力学现象的发现、理解、归纳整理具有其他方法难以取代的作用。运用解析方法研究液体非线性晃动的关键在于: 对液体晃动的微分描述或者变分描述进行离散化处理时, 巧妙而又适当地引入非线性项, 从而建立起足以反映液体大幅晃

收稿日期: 2005-12-06; 修改日期: 2006-09-02

基金项目: 国防十五预研资助项目(41320020301)

作者简介: *贺元军(1975), 男, 重庆云阳人, 博士生, 从事复杂航天器动力学及控制研究(E-mail: hithyj@163.com);

尹立中(1971), 男, 辽宁鞍山人, 高工, 博士后, 从事复杂航天器动力学及控制研究;

马兴瑞(1959), 男, 黑龙江双鸭山人, 教授, 博士后, 博导, 从事复杂航天器动力学及控制研究(E-mail: maxr@mail.casac);

王本利(1944), 男, 江苏射阳人, 教授, 博导, 从事复杂航天器动力学及控制研究(E-mail: wangbenli@hit.edu.cn).

动主要矛盾的离散化非线性动力学方程组^[3~5]。

规则容器中液体晃动的线性化理论以发展得相当完善并应用于工程实际中、非线性也得到了较大的发展，并发现了一些重要的现象：Hutton^[6]首先用摄动法研究了圆柱形贮箱受横向激励时液体晃动的稳态特性和稳定区间，并通过试验进行验证；后来 Komatsu^[5]用多尺度法研究了水平激励时任意形状贮箱中液体的非线性晃动；随后苟兴宇^[7]、尹立中^[8]将其推广到圆柱贮箱液固耦合系统和横向激励的非线性晃动中，发现了同步 Hopf 分叉现象，同时还总结了常重力液体晃动和液固耦合系统研究的现状^[9]；而 Snyder^[10]综述了微重力环境下液体的晃动特性。

本文用变分原理建立了液体晃动的压力体积积分形式的 Lagrange 函数；并将速度势函数在自由液面处作波高函数的级数展开，从而导出自由液面运动学和动力学边界条件非线性方程组，并用 Runge_Kutta 法求解非线性方程组，计算结果表明，在俯仰激励作用下，面外主模态和次生模态同样发生同步 Hopf 分叉现象，并求得发生 Hopf 分叉的频率域。

1 动力学模型

假定圆柱贮箱的半径为 a ，内充深度为 h 的无旋、不可压缩液体，如图 1。只考虑贮箱绕 y 轴作俯仰运动的情形，以转动中心为坐标原点建立惯

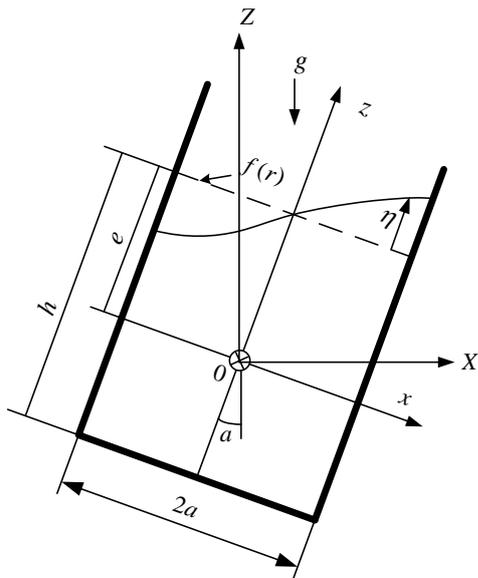


图 1 贮箱模型和坐标系

Fig.1 A tank model and the coordinate system

性坐标系 $O-XYZ$ 以及随贮箱运动的固联坐标系 $o-xyz$ ，此时， $z=f(r)+e$ 为自由静液面，其中 e 为常重力下转动中心到静液面的距离， $\eta(r,\theta,t)$ 为波高函数。

贮箱的运动规律：

$$a = \theta_0 \sin \omega_e t \tag{1}$$

其中： a 为贮箱的偏转角度， θ_0 为幅值， ω_e 为转动角速度。

根据位势理论，得到描述液体晃动的动力学边值问题：

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in } V \tag{2}$$

$$\Phi_r = (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \bar{e}_r = -\Omega z \cos \theta \quad \text{at } r = a \tag{3}$$

$$\Phi_z = (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \bar{k} = -\Omega r \cos \theta \quad \text{on } z = e - h \tag{4}$$

$$\eta_t = (\nabla \Phi - \bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \nabla \eta \quad \text{on } S_f \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \nabla \Phi - \bar{g} \cdot \bar{r} = 0 \quad \text{on } S_f \tag{6}$$

式中 Φ 为速度势函数， V 为液体体积， Ω 为贮箱偏转角速度。

1.1 变分原理

将 Luke^[11]所提出的驻定压力原理推广，使其适用于液体受迫响应。将 Lagrange 函数表示为液体压力的体积积分形式。由变分原理得到：

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\Phi, \eta) dt \tag{7}$$

其中

$$L(\Phi, \eta) = - \iiint_V \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \nabla \Phi - \bar{g} \cdot \bar{r} \right\} dV \tag{8}$$

其中： $\Phi(r,\theta,z,t)$ 和 $\eta(r,\theta,t)$ 在时间 t_1 和 t_2 时刻有 $\delta \Phi = 0$ ， $\delta \eta = 0$ 。对上述 Lagrange 函数变分可以得到方程(2)~方程(6)。

1.2 液体的非线性晃动

在 Komatsu 思想^[5]的启发下，将液体的压力体积积分形式的 Lagrange 函数进行积分，首先对式(8)中 $\partial \Phi / \partial t$ 相对于 z 进行积分，则有：

$$L(\Phi, \eta) = \int_{S_f} \Phi \frac{\partial \eta}{\partial t} dS - \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \eta - (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \nabla \Phi - \bar{g} \cdot \bar{r} \right\} dV \tag{9}$$

将式(9)中各项在自由表面处作 η 的幂级数展开，并保留到四阶，方程(9)变为：

$$\begin{aligned}
L = & \iint_{S_0} \left[(\Phi + \eta \cdot \Phi_z + \eta^2 / 2 \cdot \Phi_{zz}) \eta_t - \frac{1}{2} \Phi \cdot \Phi_z - \right. \\
& \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} \cdot \eta - \frac{\eta^2}{2} \left(\nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \Phi r \Omega \cos \theta + \\
& \eta \cdot [(\bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \nabla \Phi] + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial [(\bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \nabla \Phi]}{\partial z} \right] + \\
& \left. g \cdot r \sin \alpha \cos \theta \cdot \eta - \cos \alpha \cdot \frac{\eta^2}{2} - g \cdot \cos \alpha \cdot e \cdot \eta \right] dS - \\
& \frac{1}{2} \int [\Phi \Omega z \cos \theta] dS \Big|_{r=a} - \frac{1}{2} \int (\Phi \Omega r \cos \theta) dS \Big|_{z=e-h}
\end{aligned} \quad (10)$$

其中 S_0 为圆柱形贮箱的水平截面。由此可见, 在自由表面 S_f 的积分已经转化为在水平静液面 S_0 的积分。

将速度势函数 Φ 和波高函数 η 表示为如下特征函数的和:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi_0 \Omega + \sum_n a_n \phi_n(r, \theta, z) \quad (11)$$

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_n b_n \phi_n(r, \theta, e) \quad (12)$$

其中 $\Phi_0 \Omega$ 考虑非均匀边界条件, 求解线性化方程(2)~方程(6), 可得到 Φ_0 :

$$\begin{aligned}
\Phi_0 = & a^2 \left[\frac{z}{a} \cdot \frac{r}{a} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{ch}[k_{1n}(z+h)] - 2\text{ch}[k_{1n}z]}{\xi_{1n}(\xi_{1n}^2 - 1)\text{sh}(k_{1n}h)} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{J_1(k_{1n}r)}{J_1(\xi_{1n})} \right) \right] \cos \theta \quad (13)
\end{aligned}$$

将 $\Phi(r, \theta, z, t)$ 和 $\eta(r, \theta, t)$ 的表达式代入方程(10)中进行积分, L 最后表示为:

$$\begin{aligned}
L = & \sum_i \left\{ \Omega \delta_i \dot{b}_i + \beta_i a_i \dot{b}_i - \frac{1}{2} \lambda_i \beta_i a_i^2 + \Omega a_i \pi_i - \right. \\
& \left. \frac{1}{2} g \beta_i \cos \alpha b_i^2 + (\Omega^2 W_i + g \tau_i \sin \alpha) b_i \right\} + \\
& \sum_{i,j} \left\{ \Omega a_i b_j X_{ij} + \Omega^2 b_i b_j Y_{ij} \right\} + \sum_{i,j,k} \left\{ \Omega Z_{ijk} a_i b_j b_k + \right. \\
& \left. \frac{\Omega}{2} \gamma_{ijk}^* b_i b_j \dot{b}_k + \lambda_i \alpha_{ij}^k a_i b_j \dot{b}_k - \frac{1}{2} \mu_{ij}^k a_i a_j b_k \right\} + \\
& \sum_{i,j,k,l} \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_i \Pi_{ij}^{kl} a_i a_j b_k b_l + \frac{1}{2} k_i^2 \Gamma_{ij}^{kl} a_i b_j b_k \dot{b}_l \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

其中“ \cdot ”表示对时间的导数, W_i , X_{ij} , Y_{ij} , Z_{ijk} , γ_{ijk}^* , δ_i , β_i , π_i , τ_i , λ_i , α_{ij}^k , μ_{ij}^k , Π_{ij}^{kl} , Γ_{ij}^{kl} 可由线性特征函数计算求得, 限于篇幅, 在此没有给出表达式。将得到的 Lagrange 函数 L 代入到变分

方程中, 可以导出下面的非线性耦合常微分方程组:

$$\begin{aligned}
\beta_m \dot{a}_m + \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_{ij}^m \frac{d(a_i b_j)}{dt} + \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} k_i^2 \Gamma_{ij}^{km} \frac{d(a_i b_j b_k)}{dt} = \\
\Omega^2 W_m - \dot{\Omega} \delta_m - g \beta_m b_m \cos \alpha + g \sin \alpha \tau_m + \\
\sum_i \left\{ \Omega X_{im} a_i + \Omega^2 (Y_{mi} + Y_{im}) b_i \right\} + \sum_{i,j} \left\{ \lambda_i \alpha_{im}^j \cdot a_i \dot{b}_j + \right. \\
\left. \frac{\Omega}{2} \gamma_{ijm}^* \dot{b}_i b_j + \Omega (Z_{imj} + Z_{ijm}) a_i b_j - \frac{1}{2} \mu_{ij}^m a_i a_j \right\} + \\
\sum_{i,j,k} \left\{ \frac{1}{2} k_i^2 (\Gamma_{ij}^{mk} + \Gamma_{im}^{jk}) a_i b_j \dot{b}_k - \frac{1}{2} \lambda_i (\Pi_{ij}^{mk} + \Pi_{ij}^{km}) a_i a_j b_k \right\}
\end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned}
\beta_m \dot{b}_m + \sum_{i,j} \lambda_m \alpha_{mi}^j b_i \dot{b}_j + \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} k_i^2 \Gamma_{mi}^{jk} b_i b_j \dot{b}_k = \\
\lambda_m \beta_m a_m - \Omega \pi_m - \sum_i \Omega X_{mi} b_i + \sum_{i,j} \left\{ -\Omega Z_{mij} b_i b_j + \right. \\
\left. \frac{1}{2} (\mu_{mi}^j + \mu_{im}^j) a_i b_j \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} (\lambda_m \Pi_{mi}^{jk} + \lambda_i \Pi_{im}^{jk}) a_i b_j b_k
\end{aligned} \quad (15b)$$

方程(15)给出了自由表面的运动学和动力学边界条件。

2 非线性晃动方程组的求解

下面采用四阶 Runge-Kutta 法来研究动力学微分方程组(15)。首先将其写成标准的状态空间格式, 即

$$[M]\{\dot{x}\} = \{F\} \quad (16)$$

式中 $[M]_{2n \times 2n}$ 为非线性耦合系数的时变阵, 它是速度势广义坐标、波高函数广义坐标的函数。

$$\{\dot{x}\} = \{\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dots, \dot{a}_n, \dot{b}_1, \dot{b}_2, \dots, \dot{b}_n\} \quad (17)$$

为系统的广义速度向量。 $\{F\}_{2n \times 1}$ 是将动力学方程剩余项移到等号右端所得到的函数, 同样是速度势广义坐标、波高函数广义坐标和时间的函数。

2.1 基底选取

圆柱形贮箱受到横向激励时, 液体晃动只选择与外激励势场不正交的反对称模态。当外激励频率落在晃动特征频谱的低频段时, 主要激发低阶晃动模态, 工程中取一阶为主, 但实验表明, 如只保留一阶反对称晃动及其高阶项来描述圆柱贮箱中液体的非线性晃动, 则理论预示结果与实验不符, 因此需要在理论模型中保留次阶晃动模态, 本文取保留模态的最高阶数为 5, 保留模态的名称、贡献量

级及构成见表 1。

表 1 非线性晃动的假定模态

阶数	名称	量级	ϕ_n
1	面内主模态	ε	$A_1 J_1(\lambda_{11} r) \cos \theta$
2	面外主模态	ε	$A_2 J_1(\lambda_{11} r) \sin \theta$
3	轴对称次生模态	ε^2	$A_3 J_0(\lambda_{01} r)$
4	面内次生模态	ε^2	$A_4 J_2(\lambda_{21} r) \cos 2\theta$
5	面外次生模态	ε^2	$A_5 J_2(\lambda_{21} r) \sin 2\theta$

2.2 算例及分析

圆柱贮箱半径 a 为 0.5m, 充水深度 h 为 0.5m, 转心到液面距离 e 为 0.3m, $g = 9.80$ 。图中计算液体波高响应是在 $r = a, \theta = 0$ 处。积分步长取 0.02s, 均在面外晃动自由度初始条件中施加小扰动 $b_{20} = 0.0001$, 这相当于给面外主导模态一个初始位置, 是合理的, 大量计算结果表明, 对面外主导模态或次模态坐标或两者同时进行扰动并不影响计算结果。结果如下:

第 1 组算例: 外激励 $A_e = A_0 \sin(2\pi f_e t)$, 外激励幅值 $A_0 = 0.3\text{rad}$, 频率 $f_e = 0.91\text{Hz}$, 时间历程如图 3。

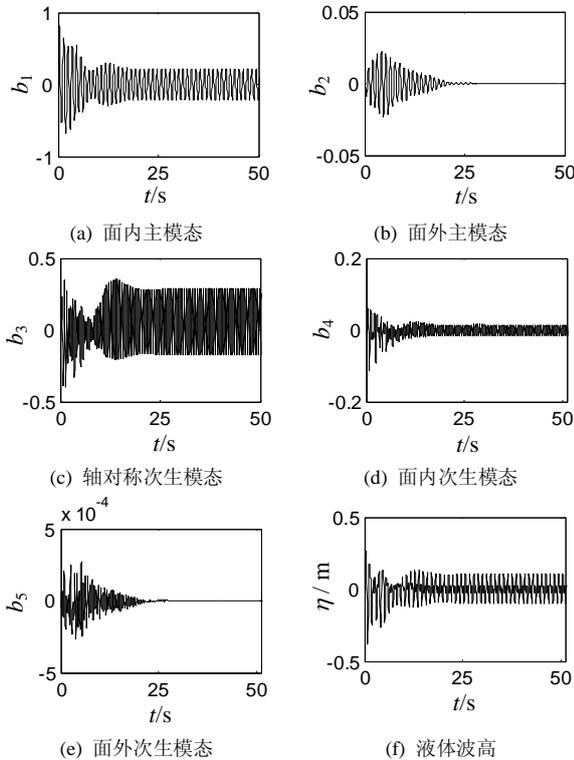


图 3 各自由度、波高的时间历程

Fig.3 Time history of each DOF as well as wave height

第 2 组算例: 外激励形式和幅值均保持不变, 外激励频率变为 0.98Hz, 时间历程如图 4。

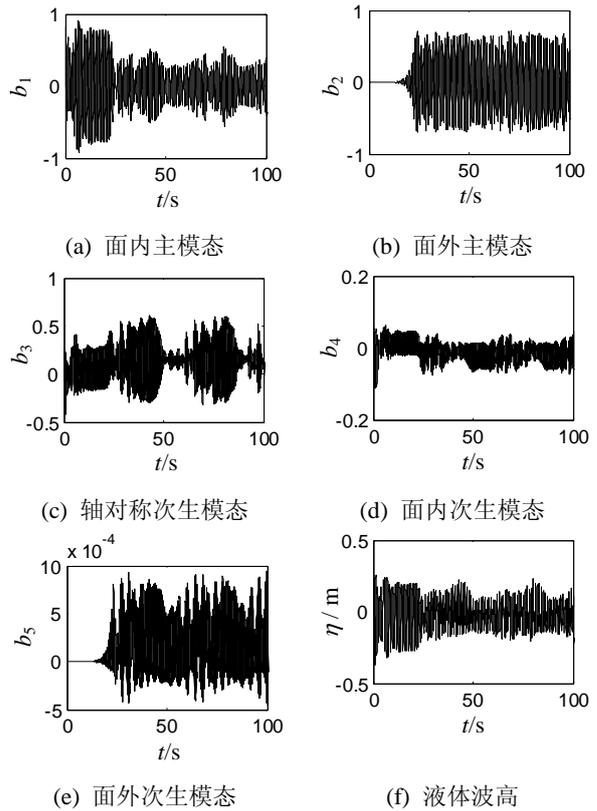


图 4 各自由度、波高的时间历程

Fig.4 Time history of each DOF as well as wave height

计算结果分析:

(1) 由图 3(f)和图 4(f)可见, 液体波高响应均表现出显著的非线性特征, 波峰值明显大于波谷值, 即零点漂移现象; 其原因是非线性作用下, 液体波高次生模态的稳态响应都相对于零点有一个偏移, 导致液体波高响应出现零点漂移现象;

(2) 由图 3(b), 图 3(e)和图 4(b), 图 4(e)可见, 在外激励频率由 0.91Hz 增加到 0.98Hz, 面外主模态和面外次生模态由收敛转变为发散, 最终过渡成一定幅值的周期运动, 即同步 Hopf 分叉现象^[7]; 同时导致其它模态和波高的幅值发生显著性变化。对系统只进行俯仰激励, 液体却出现垂直于俯仰激励平面的非平面运动, 这是平行于及垂直于俯仰激励平面的液体晃动模态之间非线性耦合的结果, 而这种耦合作用是通过自由表面波进行的。

2.3 频率分叉域

因为系统耦合频率, 液体各阶晃动频率等特征频率点较多, 发生超、次谐波共振、组合共振及内共振等的可能性较大, 因此在每一个激励频率点均要采用滤波等方式从时间历程中提取相应的稳态响应幅值。采用 Fourier 级数法较为简单。

在区间 $[\tau, \tau + nT]$ 上的时间历程 $f(t)$, 其复

Fourier 系数:

$$c_n = \frac{1}{nT} \int_{\tau}^{\tau+nT} f(t) e^{-iv_k(t-2\tau-nT)} dt \quad (18)$$

相应于第 k 个激励频率点 $v_x = v_k$ 的稳态幅值为 $2|c_n|$, 其 $T = 2\pi/v_k$ 为采用周期。采样周期数 n 越大, 所求得的幅值越准确, 取 $n = 32$ 。

图 5 给出了带小扰动零初始条件下面外晃动两个自由度的幅频曲线, 图中次阶模态晃动在外激励频率下的幅值较主导模态小几个量级, 这是因为次阶模态晃动以高频分量为主。图 5 清楚地表明, 在稳态解中面外两个自由度晃动的出现与消失是同步的。

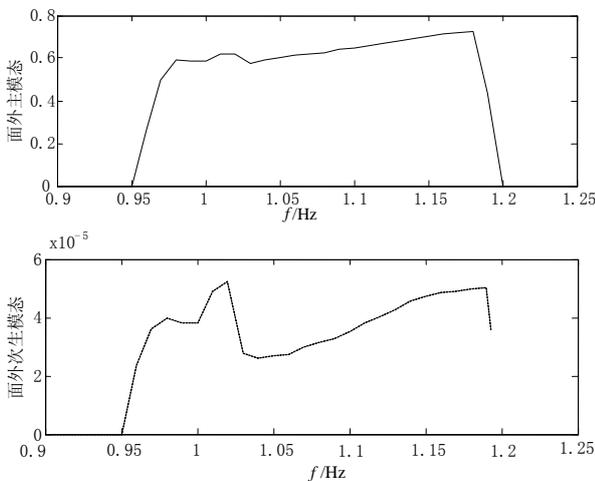


图 5 面外模态同步 Hopf 频率分叉域

Fig.5 Synchronous Hopf bifurcation region of the nonplanar mode

从图 5 可见, 在外激励幅值恒为 0.3 rad 的情况下, 外激励频率由小到大穿过 $0.945 \pm 0.005 \text{ Hz}$ 范围中某一点时, 圆柱贮箱中液体面外模态的晃动发生了超临界的同步 Hopf 分叉, 当穿过 $1.20 \pm 0.005 \text{ Hz}$ 范围中某一点时, 则发生亚临界的同步 Hopf 分叉。

3 结论

从理论分析和数值计算结果来看, 液体非线性晃动问题蕴含着极为丰富的非线性现象。当激励的频率较小时, 液体晃动呈现出周期运动, 面外运动模态随时间而逐渐趋向于零; 当激励的频率逐渐增大并越过某一临界值后, 系统特性发生显著性变化, 即面外主、次模态同时发生 Hopf 分叉。分析表 1 不难意识到, 同步 Hopf 分叉现象实际上是各模态之间复杂非线性耦合关系的结果。由于面内面外运动的分野是由正弦函数、余弦函数两类环向模

部来标识的, 因此我们还可以进一步推测, 任何轴对称贮液箱在仅受面内激励时, 其中液体无旋晃动的面外各自由度均可能发生同步 Hopf 分叉现象。

经大量计算表明, 在外激励幅值固定情况下, 外激励频率是系统的分叉参数。实际上, 当外激励频率固定在一阶特征频率附近时, 外激励幅值由小到大变化, 面外晃动各自由度亦会发生超临界的同步 Hopf 分叉现象。

参考文献:

- [1] 岳宝增, 刘延柱, 王照林. 三维液体大幅晃动及其抑制的数值模拟[J]. 上海交通大学学报, 2000, 34(8): 1036~1039.
Yue Baozeng, Liu Yanzhu, Wang Zhaolin. Numerical simulation and suppression of three dimensional large amplitude liquid sloshing [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2000, 34(8): 1036~1039. (in Chinese)
- [2] Bauer H F. Theory of the fluid oscillations in a circular cylindrical tank partially with filled [R]. NASA TN-557, 1965.
- [3] Mehta G, Attar J. Flight vehicle propellant surface motion by numerical method [A]. AIAA, SAE, ASME, and ASEE, Joint Propulsion Conference, 21st Monterey [C]. CA, AIAA, 1985. 85~1202.
- [4] Whitham G B. Variational methods and applications to water waves [J]. Proc. of the Royal Society, A, 1967, 299(13): 6~25.
- [5] Komatsu K. Nonlinear sloshing analysis of liquid in tanks with arbitrary geometries [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1987, 22(3): 193~207.
- [6] Hutton R E. An investigation of resonant, nonlinear, nonplanar free surface oscillations of a fluid [R]. NASA TN D-1870, 1963.
- [7] Gou Xingyu, Ma Xingrui, Wang Benli, Liteshou, Huang Huaide. Synchronous Hopf bifurcation and damping osmosis phenomena of a liquid-spacecraft nonlinear coupling system [J]. AIAA Journal, 2001, 39(2): 225~232.
- [8] 尹立中, 邹经湘, 王本利. 俯仰运动圆柱贮箱中液体的非线性晃动[J]. 力学学报, 2000, 32(3): 280~290.
Yin Lizhong, Zou Jingxiang, Wang Benli. Nonlinear sloshing of liquid in a circle cylindrical container under pitching excitation [J]. Acta Mechanica Sinica, 2000, 32(3): 280~290. (in Chinese)
- [9] Dodge F T, Garza L R. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravity [J]. J. of Applied Mechanics, September, 1967. 555~562.
- [10] 尹立中, 王本利, 邹经湘. 航天器液体晃动与液固耦合动力学研究概述[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1999, (4): 118~122.
Yin Lizhong, Wang Benli, Zou Jingxiang. Introduction to investigation of liquid sloshing and liquid-solid coupled dynamics of spacecraft [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 1999, (4): 118~122. (in Chinese)
- [11] Luke J C. A variational principle for a fluid with a free surface [J]. J., Fluid Mech., 1967, 27(2): 395~397.