文章编号:1000-4750(2006)05-0062-05

组合楼盖竖向承重体系中楼板变形及内力分析

田春雨,^{*}聂建国

(清华大学土木工程系,北京 100084)

摘 要:在组合楼盖体系中,当组合梁作为横向承重构件时,其变形对于楼板的内力和变形有很大影响。采用薄 板理论对组合楼盖竖向承重体系中的单向混凝土板进行分析,建立控制方程,运用单三角级数法得到其挠度函数, 进而求得曲率和弯矩的计算式并进行简化。通过与有限元结果对比,验证了简化公式的准确性。参数分析结果表 明,随板相对刚度增大和梁上荷载增大,板内横向曲率和弯矩减小。即使在单向板中,计算板内弯矩也需同时考 虑两个方向的曲率。

关键词:组合结构;楼盖体系;薄板理论;单三角级数法;简化公式 中图分类号:TU398⁺.9 文献标识码:A

ANALYSIS OF DEFLECTION AND INTERNAL FORCE IN COMPOSITE SLAB-ON-GIRDER FLOOR SYSTEM

TIAN Chun-yu, *NIE Jian-guo

(Department of Civl Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In composite slab-on-girder floor systems the deflections and internal forces of concrete slabs are greatly influenced by the deflections of adjacent girders. The constitutive equations are derived according to the thin plate theory and solved with trigonometric series for the slab deflection to satisfy boundary conditions. The simplified formulae for curvature and moment in slab are derived and validated by comparing with the finite element solutions. The results of parameter analysis show that transverse curvatures and moments in slabs decrease as the slab to girder rigidity ratio and loads on girders increase. Even in one-way slabs, two-way curvatures should be considered when calculating moments in slabs.

Key words: composite structures; slab-on-girder floor; thin plate theory; series solution; simplified formulae

近年来,组合楼盖体系在高层建筑结构中已得 到越来越广泛的应用^[1]。在组合楼盖体系中,组合 梁通常仅作为竖向承重构件使用。如组合梁作为次 梁,两端简支于主梁上;或者组合梁作为主梁,但 两端直接简支于柱上,不承受侧向力。楼板上的荷 载通常包括均布恒荷载和活荷载,组合梁承受楼板 传来的荷载、梁上荷载(如墙体)以及梁本身的自重 等。按照通常的分析方法,认为楼板四边支撑于主、 次梁形成的网格上,按照弹性或者塑性方法来计算 楼板的内力。但是,当简支组合梁作为竖向承重构件时,由于正弯矩区没有开裂的问题,延性较好,可以采用较大的跨高比;并且组合梁在恒载下的变形可以通过钢梁反拱抵消,所以它在荷载作用下会产生较大的总竖向变形。组合梁的竖向变形会对混凝土板中的弯矩分布有着不可忽略的影响^[2,3],将梁作为板不动支承的计算方法不够准确,需要对组合梁及板构成的体系进行整体分析以确定板的内力。

对于组合楼盖体系,有很多研究者采用解析法

收稿日期:2004-06-24;修改日期:2005-05-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50438020)

作者简介:田春雨(1977),男,黑龙江人,博士生,从事组合结构研究;

^{*}聂建国(1958),男,湖南人,教育部长江学者特聘教授,博导,结构工程研究所所长,从事组合结构、钢结构和钢筋混凝土结构研究 (E-mail: niejg@tsinghua.edu.cn)。

或者数值方法进行整体分析^[4~6]。但由于微分方程 的复杂性,解析法往往无法给出内力计算结果的显 式表达式,最后仍要依赖数值方法求解。本文在采 用解析法对组合楼盖体系中的混凝土板进行分析, 合理简化了边界条件,得出其挠度函数的显式表达 式,并进一步得出曲率和弯矩的简化计算公式。同 时还采用有限元方法对楼板中的变形和内力进行 参数分析,并对简化公式的准确性进行验证。

1 挠度函数推导

将组合楼盖体系中承受竖向荷载的简支组合 梁与楼板简化为图1所示的分析模型。模型中,组 合梁和楼板两端均简支在主梁或柱上,主梁沿y轴 方向,各根组合梁截面尺寸相同并列排布。x 方向 两边简支,y 方向无限长。板面作用荷载 q₀,梁上 均布线荷载 q。



Fig.1 Analysis model

取 $0 \le x \le L$, $-b/2 \le y \le b/2$ 之间的区域进行分析。设板的挠度函数为 w(x, y), 抗弯刚度 D, 有:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q_0(x, y)}{D} \tag{1}$$

其中
$$D = \frac{E_{c}h_{c}^{3}}{12(1-v^{2})}$$
, E_{c} 为混凝土弹性模量, v 为

泊松比。板块为对边简支矩形板,采用单三角级数 法求解。挠度函数对 y 轴为偶函数,所以取: w(x, y) =

$$\sum_{m} (A_m \operatorname{ch} a_m y + B_m a_m y \operatorname{sh} a_m y + w^*(y)) \sin a_m x (2)$$

其中 $a_m = \frac{m\pi}{L}$, A_m 和 B_m 为待定系数,由 $y = \pm b/2$ 上的边界条件决定, $w^*(y)$ 为方程的特解,由荷载决定^[7]。

$$q_0 = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4q_0}{m\pi} \sin a_m x$$
(3)

则(2)式中的特解可取为:

$$w^*(y) = \frac{4q_0L^4}{D\pi^5 m^5}, \ m = 1,3,5,\cdots$$
 (4)

在 $y = \pm b/2$ 上,根据对称性,有:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad y = \pm b/2$$
 (5)

假设组合梁沿全跨等效抗弯刚度不变,为 EI。 组合梁上线荷载与楼板传递到组合梁上荷载之和 为 $p = q + bq_0 - \frac{1}{2L}b^2q_0$,将其展开为三角级数 $p = \sum_{m=1,3,5,...} \frac{4p}{m\pi} \sin a_m x$,在 $y = \pm b/2 \perp$,有 $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p}{EI}$,

所以得到:

$$w(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4pL^4}{EI \pi^5 m^5} \sin a_m x, \ m = 1,3,5,\dots$$
(6)

将两个边界条件(5)(6)及特解(4)代入方程(2)并 求解,得到

$$\begin{cases}
A_m = -C \frac{\operatorname{sh} \lambda_m + \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m + \lambda_m} \\
B_m = C \frac{\operatorname{sh} \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m + \lambda_m}, \quad m = 1,3,5,\cdots \\
A_m = B_m = 0, \quad m = 2,4,6\dots
\end{cases}$$
(7)

其中: $C = n \frac{4q_0 L^4}{D \pi^5 m^5}$, $\lambda_m = \frac{m \pi}{2} \frac{b}{L}$, $n = 1 - p D / q_0 E I$,

I可取为组合梁截面折减刚度^[8]。将求得的系数及特 解代入式(2)即得到混凝土板的挠度函数。

2 曲率分析及公式简化

当图 1 所示分析模型中 b/L<0.5 时,楼板可按单向板进行设计计算。设在 x=L/2、 y=0 位置上 x、 y 方向的曲率分别为 $\kappa_x \propto \kappa_y$, x=L/2、 y=b/2 位置上 x、 y 方向的曲率分别为 $\kappa_x^0 \propto \kappa_y^0$ 。在不考虑组合梁 梁挠曲对板变形的影响时,即按不动支座上的单向 连续板计算有:

$$\kappa_y = \frac{q_0 b^2}{24D}$$
, $\kappa_y^0 = \frac{q_0 b^2}{12D}$, $\kappa_x = \kappa_x^0 = 0$ (8)

实际结构中由于纵梁变形的影响,跨中和支座 位置都存在 x、y 两个方向的曲率和弯矩,而且弯矩 和曲率值的大小与纵梁和板的刚度、荷载等直接相 关,(8)式计算结果不准确。下面按上文导出的挠度 函数(2)式计算板的曲率值。

在 *x* = *L*/2 、 *y* = 0 位置,(2)式对 *y* 求二阶偏导 并整理得:

$$\kappa_{y} = \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} = -n \frac{q_{0} b^{2}}{24D} f(b/L)$$
(9)

其中:

$$f\left(\frac{b}{L}\right) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{96}{\pi^3 m^3} \frac{L^2}{b^2} \left(\frac{-\operatorname{sh}\lambda_m + \lambda_m \operatorname{ch}\lambda_m}{\operatorname{sh}\lambda_m \operatorname{ch}\lambda_m + \lambda_m}\right) \sin \frac{m\pi}{2}$$

当0 < b/L < 0.5时,计算得f(b/L)的值并列于表 1 中。据此可取f(b/L) = 1,则式(9)可简化为:

$$\kappa_y = -n\frac{q_0 b^2}{24D} \tag{10}$$

在 *x* = *L*/2、 *y* = *b*/2 位置,(2)式对 *y* 求二阶偏导并整理得:

$$\kappa_y^0 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = n \frac{q_0 b^2}{12D} f_1(b/L) \tag{11}$$

其中:

$$f_1\left(\frac{b}{L}\right) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{48}{\pi^3 m^3} \left(\frac{L}{b}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sh}\lambda_m \operatorname{ch}\lambda_m - \lambda_m}{\operatorname{sh}\lambda_m \operatorname{ch}\lambda_m + \lambda_m}\right) \operatorname{sin}\frac{m\pi}{2}$$

当0 < b/L < 0.5时,计算 $f_1(b/L)$ 的值并列于表1中。 据此可取 $f_1(b/L) = 1$,则式(11)可简化为:

$$\kappa_y^0 = n \frac{q_0 b^2}{12D} \tag{12}$$

在 *x* = *L*/2 、 *y* = *b*/2 位置,(2)式对 *x* 求二阶偏 导并整理得:

$$\kappa_x^0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{pL^2}{8EI} \tag{13}$$

在 *x* = *L*/2、 *y* = 0 位置,(2)式对 *x* 求二阶偏导并 整理得:

$$\kappa_x = -\frac{pL^2}{8EI} - \frac{pL^2}{8EI} \frac{n}{1-n} f_2(b/L)$$
(14)

上式中第一项是板随梁共同弯曲而产生的曲率;第二项是混凝土板在竖向均布荷载下产生的 *x* 向跨中局部曲率,其中:

$$f_2\left(\frac{b}{L}\right) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{32}{\pi^3 m^3} \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_m + \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m + \lambda_m} - 1\right) \operatorname{sin} \frac{m \pi}{2}$$

当0 < b/L < 0.5时,计算 $f_2(b/L)$ 的值并列于表1中。 通常情况下0.5 < n < 0.95, $1 < \frac{n}{n-1} < 19$,据此可忽 略式(14)中的第二项。即当b/L < 0.5时,忽略板局 部弯曲的影响,板在y向跨中和支座取相同的x向 曲率,按式(15)计算:

$$\kappa_x = \kappa_x^0 = -\frac{pL^2}{8EI} \tag{15}$$

表 1 f(b/L)、 $f_1(b/L)$ 、 $f_2(b/L)$ 的计算结果

Table 1 Results of f(b/L), $f_1(b/L)$ and $f_2(b/L)$

b/L	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(b/L)	1.005	1.000	1.002	1.007	0.997
$f_1(b/L)$	1.012	1.003	1.003	1.009	1.012
$f_2(b/L)$	4.98E-05	8.24E-05	3.45E-05	4.16E-04	3.50E-03

根据以上分析可以看出,在 b/L < 0.5的情况下,楼板的跨中 x 向曲率沿 y 向基本不变,与组合梁的曲率相同;而 y 向曲率则受 n 值的影响较大。 当梁的刚度相对于板刚度较大时,梁变形较小,n 值接近 1, κ_y 、 κ_y^0 值近似等于组合梁无变形时的结果;当梁的刚度较小或者梁上荷载较大时,梁的变形较大,n 值小于 1, κ_y 、 κ_y^0 受梁变形影响较大, 小于不考虑梁变形时得到的曲率值。根据式(10)、式(12)的形式,将n 值称为曲率折减系数。

3 结果对比及讨论

为对简化公式结果进行验证,采用有限元方法 对图 1 中的模型进行分析,其中,x=0,L位置梁端 和板端均设置简支支撑, $y=\pm 2.5b$ 位置板上施加垂 直 y 轴的对称面约束,模拟 y 向无限长条件。有限 元模型如图 2 所示:钢梁和混凝土板采用 4 节点壳 单元模拟,钢和混凝土材料均假设为线弹性。栓钉 采用刚性梁单元和弹簧单元模拟,刚性梁上端与混 凝土板固接,下端通过弹簧单元与组合梁上翼缘节 点连接。假设实际结构中,栓钉间距为 p',抗剪承 载力为 V_u ,同一截面栓钉个数为 n_s ,在正常使用状 态下,钢与混凝土交界面单位长度上的剪切刚度可 近似为 $K'=0.66n_sK_0V_u/p'$, $K_0=1/mm^{[9]}$,设模型 中弹簧刚度为 k,间距为 p,则交界面上单位长度 剪切刚度为K=k/p,使K=K'即可保证模型中的 剪切滑移刚度与实际结构等效。



Fig.2 Finite element model

下面进行参数分析。根据上文分析,对弯矩和 曲率影响较大的主要是参数 b/L和 n,其中 n 取决 于梁、板的刚度比和荷载比。所以计算中采用的变 化参数包括b/L、梁板高度比 h_c/h_s 、梁板上荷载 比 q/q_0 ,其变化范围见表 2。其它固定参数为:钢 材屈服强度 235MPa,弹性模量 2.1MPa×10⁵MPa, 泊松比取 0.3 ;混凝土弹性模量取 3.0MPa×10⁴MPa, 泊松比取 0.17 ,梁跨 *L*=6m,混凝土板厚 h_c =100mm, 钢梁截面尺寸为:腹板厚 8mm,上下翼缘为 200mm ×12mm。各情况下,分别采用有限元法和公式(10)、 式(12)、式(13)、式(15)计算 $\kappa_y \propto \kappa_y^0$ 和 $\kappa_x \propto \kappa_x^0$ 的值, 并将计算结果与公式(8)的结果进行比较。各参数系 列时的计算结果如图 3~图 8 所示。

表 2 计算参数变化范围

Table 2Range of parameters values



Fig.3 Values of curvature y under parameter series 1

















图 7 参数系列 3 时 y 向曲率计算结果

Fig.7 Values of curvature y under parameter series 3



Fig.8 Values of curvature x under parameter series 3

由以上各图中结果可以看出各种情况下,式 (10)、式(12)和式(13)、式(15)的简化解与有限元解 符合很好,误差基本在 5%以内。计算 y 向曲率时, 随 h_c/h_s 增大、b/L增大和梁上线荷载增大,曲率折 减系数 n 值减小,公式(8)的结果与有限元解比值增 大,误差最大达 30%以上。曲率折减系数 n 值通常 在(0.7~1.0)之间。

根据以上分析,采用式(10)、式(12)、式(13)、 式(15)计算弹性阶段板内的曲率,公式形式简单, 物理意义明确,结果相当准确。设在 x=L/2、y=0位置上两个方向的弯矩分别为 m_x 、 m_y ; 在 x=L/2、 y=b/2 位置上两个方向的弯矩分别为 m_x^0 、 m_y^0 , 有:

$$\begin{cases} m_x = -D(\kappa_x + v\kappa_y), m_y = -D(\kappa_y + v\kappa_x) \\ m_x^0 = -D(\kappa_x^0 + v\kappa_y^0), m_y^0 = -D(\kappa_y^0 + v\kappa_x^0) \end{cases}$$
(16)

得到曲率值以后,即可根据式(16)计算弹性阶段板内各控制截面弯矩,用于配筋设计。由上式可

见,两个方向的弯曲互相影响,任一点的弯矩值都 由两个方向的曲率共同决定。*x、y*向曲率值通常在 同一数量级上,大小较接近,所以其互相影响不可 忽略。对于*y*向弯矩,与按单向连续梁计算的板弯 矩相比,考虑两个方向的弯曲互相影响以后,在板 跨中位置,其绝对值均增大;在纵梁上方位置,其 绝对值均减小。

本文只分析了板上作用均布荷载、梁上作用线 荷载的情况。对于其它荷载作用下的情况,可采用 同样分析方法得到类似的简化计算公式。本文分析 中均假设纵梁两端为简支支撑,实际楼盖结构中, 次梁两端通常支撑在主梁上,主梁的竖向变形对楼 板内力也有一定影响。当主梁相对刚度较大时或者 跨度较小时,可忽略主梁变形,本文分析结果适用; 当主梁刚度较小时,需考虑主梁变形对楼板内力的 影响。

在实际设计工作中,经常采用考虑塑性内力充 分配的方法计算楼板内力。通常钢筋混凝土单向连 续楼板设计中,不考虑支座沉降影响,边跨跨中和 支座弯矩系数为1/11,中间跨跨中和支座弯矩系数 为1/16^[10]。对于并排组合梁上的单向连续混凝土楼 板,对比于固定支座上单向连续板,由于组合梁变 形的影响,跨中和支座弹性曲率应乘以折减系数*n*。 在塑性阶段,忽略泊松比影响,则弯矩只和同方向 曲率有关,板的跨中和支座截面弹性弯矩和曲率采 用同样的折减系数*n*,塑性调幅后弯矩也相应折减, 则边跨跨中和支座弯矩系数可取为为*n*/11,中间跨 跨中和支座弯矩系数为*n*/16,*n*值计算同上文,其 取值范围通常在(0.7~1.0)之间。

4 结论

本文采用解析法分析了组合楼盖体系中承受 竖向荷载的简支组合梁上的单向连续板,推导出板 的挠度函数,进而得到混凝土板跨中各危险截面上 的曲率及弯矩计算式并进行了化简。同时还采用有 限元方法进行分析,将结果与简化解进行对比。通 过分析得出以下结论:

(1) 纵梁的变形对板内的曲率及内力有很大影响,随着梁相对刚度的降低和梁上荷载的增加,板跨中和支座截面的横向曲率减小。按不动支座上的单向连续板计算的板内横向曲率值偏大。

(2) 跨中位置, 板沿梁轴线方向的曲率在横向

基本保持不变,等于梁的跨中曲率。

(3)即使在单向板中,计算板内弯矩也需同时 考虑两个方向的曲率。

(4) 塑性阶段,当考虑组合梁变形对楼板内力 的影响时,对按不动支座上的单向连续板弯矩计算 结果乘以曲率折减系数 *n* 即可,*n* 通常在(0.7~1.0) 之间变化。

参考文献:

- [1] 聂建国, 余志武. 钢-混凝土组合梁结构在我国的研究 及应用[J]. 土木工程学报, 1999, 32(2): 3~8.
 Nie Jianguo, Yu Zhiwu. Research and practice of composite steel-concrete beams in China [J]. China Civil Engineering Journal, 1999, 32(2): 3~8. (in Chinese)
- [2] Cao L C, Shing P B. Simplified analysis method for slab-on-girder highway bridge decks [J]. Journal of Structural Engineering, 1999, 125(1): 49~59.
- [3] Fang I K. Behavior of isotropic R/C bridges decks on steel girders [J]. Journal of Structural Engineering, 1990, 116(5): 659~678.
- [4] Allen G, Severn R T. Composite action between beams and slabs under transverse load, Part 1 [J]. The Structure Engineering, 1961, 39(5): 149~154.
- [5] Adekola A O. The dependence of shear lag on partial interaction in composite beams [J]. Int. J. Solids Structures, 1974, 10(4): 389~400.
- [6] Apountzakis E J, Katsikadelis J T. Interface forces in composite steel-concrete structures [J]. Int. J. Solids Structures, 2000, 37(32): 4455~4472.
- [7] 曲亲璋,章权,季求知.弹性板理论[M].北京:人民 交通出版社,2000.
 Qu Qinzhang, Zhang Quan, Ji Qiuzhi. Elastic plate theory
 [M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese)
 [8] GB50017-2003.钢结构设计规范[S].北京:中国计划
- (b) (1/2003. (明白明白(1/2003))
 (b) (1/2003)
 (c) (1/2003)</
- [9] 聂建国, 沈聚敏, 袁彦声. 钢-混凝土简支组合梁变形 计算的一般公式[J]. 工程力学, 1994, 11(1): 21~27.
 Nie Jianguo, Shen Jumin, Yuan Yansheng. A general formula for predicting the deflection of simply supported composite steel-concrete beams with the consideration of slip effect [J]. Engineering Mechanics, 1994, 11(1): 21~27. (in Chinese)
- [10] 腾智明,朱金铨. 混凝土结构及砌体结构[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1992.
 Teng Zhiming, Zhu Jinquan. Concrete and masonry structures [M]. Beijing: China Architecture Industry Press, 1992. (in Chinese)