文章编号：1000-4750(2006)06-0050-04

弹性直杆在温度场中的非线性振动与奇异性

*杨志安[1]，席晓燕[2]，李文兰[3]

(1. 唐山学院唐山市结构与振动工程重点实验室, 唐山 063000; 2. 河北理工大学机械工程学院, 唐山 063000; 3. 天津大学图书馆, 天津 300072)

摘　要：由伽辽金方法得到了弹性直杆热胀冷缩状态下受均布简谐激励的非线性振动方程。应用多尺度法求得了系统主共振的分岔方程和不同参数下的主共振响应曲线。随着温度的降低，主共振幅频响应曲线的振幅增加，共振区变窄。得到了主共振温度响应曲线的两种拓扑结构及其变化趋势。按照奇异性理论方法对主共振分岔方程进行了分析，得到了分岔方程的转迁集和分岔图。

关键词：弹性直杆；热膨胀；非线性振动；转迁集；分岔
中图分类号：O322　　文献标识码：A

SINGULARITIES AND NONLINEAR VIBRATION OF ELASTIC STRAIGHT BARS IN THERMAL FIELD UNDER HARMONIC EXCITATION

*YANG Zhi-an[1], XI Xiao-yan[2], LI Wen-lan[3]

(1. Key Lab of Structure and Vibration Engineering of Tangshan, Tangshan College, Tangshan 063000, China;
2. School of Mechanical Engineering of Hebei Polytechnic University, Tangshan 063000, China;
3. Library of Tianjin University, Tianjin 30072, China)

Abstract: The nonlinear vibration equation of the elastic straight bar under thermal expansion and harmonic excitation is obtained by Galerkin principle. The bifurcation equation of the primary resonant of the system is acquired by the method of multiple scales. The primary resonant response curves are analyzed. With the temperature decreasing, amplitudes of response curves increase and the resonant regions shrink. The temperature response curves of the system have two kinds of topological structures. By means of singularity theory the transition variety and bifurcation diagram of the bifurcation equation of the system is acquired.

Key words: elastic straight bar; thermal expansion; nonlinear vibration; transition variety; bifurcation

在实际工程中，桥梁及许多机械设备等结构常因温度的变化而处于热胀冷缩状态。而弹性直杆是这些结构的基本组成元件，因此研究弹性直杆热胀冷缩状态下的振动问题具有实际意义。本文重点研究弹性直杆热胀冷缩状态下受简谐激励的主共振问题。

1　弹性直杆热胀冷缩状态下的振动方程

图 1 所示为弹性直杆在均匀温度场作用下受均布简谐激励的作用，其横向振动微分方程为[1,2]

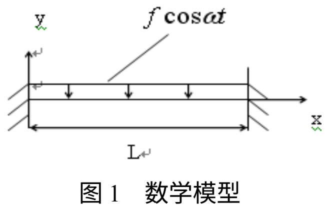

图 1　数学模型

Fig.1　The Mechanical Model

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+N\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c\frac{\partial y}{\partial t}=f\cos\omega t \qquad (1)$$

其中 E 为弹性模量， A 为横截面积， I 为截面惯性

————————————————

收稿日期：2004-08-01；修改日期：2005-01-26

作者简介：*杨志安(1963)，男，河北秦皇岛人，教授，博士后，从事机电耦联非线性振动及结构与振动工程教学研究工作(E-mail: yangzhian@eyou.com)；
席晓燕(1979)，女，河北张家口人，硕士，从事机械动力学研究；
李文兰(1964)，女，河北唐山人，副教授，博士后，从事磁固体耦合动力学与情报科学研究。

矩，ρ 为密度，y 为横振位移，x 为横坐标，t 为时间，L 为杆长，c 为阻尼系数，$f\cos\omega t$ 为均布简谐激励。其中 N 的表达式为[3,4]

$$N=\alpha\Delta TEA-\frac{EA}{2L}\int_0^L\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{2}$$

式中，α 为热膨胀系数，ΔT 为温度变化。

考虑到弹性直杆的边界条件，设(1)的解为

$$y(x,t)=Y(x)\cdot q(t) \tag{3}$$

本文重点分析基频对振动系统的影响，这也是工程实际中最关心的，故设振型函数为

$$Y(x)=1-\cos(2\pi x/L) \tag{4}$$

将式(3)、式(4)代入式(1)，利用伽辽金原理[5]可得

$$\int_0^L\left[EI\frac{\mathrm{d}^4Y(x)}{\mathrm{d}x^4}q(t)+N\frac{\mathrm{d}^2Y(x)}{\mathrm{d}x^2}q(t)+cY(x)\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}+\rho AY(x)\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]Y(x)\mathrm{d}x=\int_0^L f\cos\omega tY(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

进一步得

$$\left(\frac{8EI\pi^4}{L^3}-2\frac{\pi^2N}{L}\right)q+\frac{3}{2}\rho AL\ddot{q}+\frac{3}{2}cL\dot{q}=fL\cos\omega t \tag{6}$$

将式(2)代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2q+Kq^3=F\cos\omega t \tag{7}$$

式中

$$2\mu=\frac{c}{\rho A},\quad \omega_0^2=\frac{4\pi^2}{3\rho AL^2}\left(\frac{4\pi^2EI}{L^2}-\alpha\Delta TEA\right),$$
$$K=4\pi^2E/3\rho L^4,\quad F=2f/3\rho A$$

式(7)是含温度变化的弹性直杆在考虑阻尼和简谐激励时的非线性振动方程。

2　非线性振动方程的主共振解

下面应用多尺度法[6,7]研究式(7)的主共振问题。所谓主共振是指外激励频率 ω 接近派生系统固有频率 ω_0 时的共振。对于弱非线性系统，如果系统是线性小阻尼，这时很小的激励幅值 F 就能激发强烈的共振。因此，研究式(7)的主共振对系统的非线性项、阻尼项、外激励幅值和频率加以限制，在非线性项、阻尼项、外激励幅值项前冠以小参数 ε，式(7)表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\varepsilon\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2q+\varepsilon Kq^3=\varepsilon F\cos\omega t \tag{8}$$

同时引入调谐参数 σ，由下式决定

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\sigma,\quad \sigma=o(1) \tag{9}$$

研究主共振的一次近似解，需引入两个时间尺度 T_0,T_1，设

$$q(t)=q_0(T_0,T_1)+\varepsilon q_1(T_0,T_1) \tag{10}$$

将式(10)代入方程(8)，并考虑式(9)，比较 ε 同次幂后得到一组线性的偏微分方程

$$D_0^2q_0+\omega_0^2q_0=0 \tag{11a}$$

$$D_0^2q_1+\omega_0^2q_1=-2D_0D_1q_0-2\mu D_0q_0-Kq_0^3+F\cos(\omega_0T_0+\sigma T_1) \tag{11b}$$

式中 $D_0=\partial/\partial T_0,\quad D_1=\partial/\partial T_1$

方程(11a)的解是

$$q_0(T_0,T_1)=a(T_1)\cos[\omega_0T_0+\bar{\beta}(T_1)]=A(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0T_0}+cc \tag{12}$$

式中 cc 代表共轭复数，以下同。而

$$A(T_1)=\frac{a(T_1)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\bar{\beta}(T_1)} \tag{13}$$

式中 a 为模态振幅，$\bar{\beta}$ 为共振初相位角，将上式代入方程(11b)，得

$$D_0^2q_1+\omega_0^2q_1=-[2\mathrm{j}\omega_0(D_1A+\mu A)+3KA^2\bar{A}]\mathrm{e}^{j\omega_0T_0}-KA^3\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\omega_0T_0}+F/2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0T_0+\sigma T_1)}+cc \tag{14}$$

消除永年项的条件为

$$2\mathrm{j}\omega_0(D_1A+\mu A)+3KA^2\bar{A}-F/2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma T_1}=0 \tag{15}$$

将式(12)代入式(15)，分离实部和虚部得

$$\begin{cases}D_1a=-\mu a+\dfrac{F}{2\omega_0}\sin(\sigma T_1-\bar{\beta})\\ aD_1\bar{\beta}=\dfrac{3K}{8\omega_0}a^3-\dfrac{F}{2\omega_0}\cos(\sigma T_1-\bar{\beta})\end{cases} \tag{16}$$

这是系统主共振一次近似解(10)的振幅和相位应满足的微分方程。引入

$$\varphi=\sigma T_1+\bar{\beta} \tag{17}$$

方程(16)还可以转化为自治微分方程

$$\begin{cases}D_1a=-\mu a+\dfrac{F}{2\omega_0}\sin\varphi\\ aD_1\varphi=\sigma a-\dfrac{3K}{8\omega_0}a^3+\dfrac{F}{2\omega_0}\cos\varphi\end{cases} \tag{18}$$

为确定系统对应主共振稳态运动定常解，令 $D_1a=0,\quad D_1\varphi=0$，得到振幅和相位应满足的代数方程

$$\mu a=F/2\omega_0\sin\varphi \tag{19a}$$

$$\sigma a-3K/8\omega_0a^3=-F/2\omega_0\cos\varphi \tag{19b}$$

两式平方后相加消去φ，得到振幅a、相位φ与激励频率失调量σ之间的关系

$$[\mu^2+(\sigma-3Ka^2/8\omega_0)^2]a^2=(F/2\omega_0)^2 \tag{20a}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-\mu}{\sigma-3Ka^2/8\omega_0}\right) \tag{20b}$$

式(20)称为系统主共振稳态运动定常解幅频和相频响应方程。

将方程(18)在(a,φ)处线性化，形成关于扰动量Δa和$\Delta\varphi$的自治微分方程

$$D_1\Delta a=-\mu\Delta a+F/2\omega_0\cos\varphi\Delta\varphi \tag{21a}$$

$$D_1\Delta\varphi=-(3K/4\omega_0 a+F/2\omega_0 a^2\cos\varphi)\Delta a-F/2\omega_0 a\sin\varphi\Delta\varphi \tag{21b}$$

消去上式中φ后得到特征方程

$$\det\begin{bmatrix}-\mu-\lambda & -a\left(\sigma-\dfrac{3Ka^2}{8\omega_0}\right)\\ \dfrac{1}{a}\left(\sigma-\dfrac{9K}{8\omega_0}a^2\right) & -\mu-\lambda\end{bmatrix}=0 \tag{22}$$

展开上式得

$$\lambda^2+2\mu\lambda+\mu^2+\left(\sigma-\frac{3Ka^2}{8\omega_0}\right)\left(\sigma-\frac{9Ka^2}{8\omega_0}\right)=0 \tag{23}$$

对于$\mu>0$，可得系统主共振稳态运动定常解失稳的条件

$$\Gamma=\mu^2+\left(\sigma-\frac{3Ka^2}{8\omega_0}\right)\left(\sigma-\frac{9Ka^2}{8\omega_0}\right)>0 \tag{24}$$

幅频响应曲线上具有铅垂切线的条件正是$\Gamma=0$，因此，失稳条件对应着幅频响应曲线有多值解时中间的一支解。

取弹性直杆参数如下：

$\alpha=12.5\times10^{-6}/°\text{C},\quad E=200\text{GN/m}^2,$

$\rho=7.8\text{g/cm}^3, L=1\text{m}, A=b\times h=20\times15\text{mm}^2,$

$c=3\times10^{-4}\text{N}\cdot\text{s/m}, I=5.625\times10^{-9}\text{m}^4,$

$f=3\times10^{-2}\text{N}$

利用 Matlab 语言计算系统的主共振幅频响应曲线。图 2、图 3、图 4 分别为$T=-50°\text{C}$、$T=0°\text{C}$和$T=50°\text{C}$时的系统主共振稳态运动定常解幅频响应曲线。图 5 为上述三种情况在同一图中的比较，随着温度的降低，共振区减小，振幅增大。图 6 为在幅频响应曲线铅垂线左侧取σ值时的温度响应曲线，随温度的升高振幅呈增加趋势。图 7 为在幅频响应曲线铅垂线右侧取σ值时的温度响应曲线，随温度的升高，振幅呈减小趋势，并出现跳跃现象。

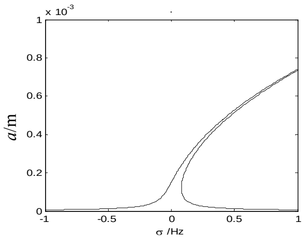

图 2 $T=-50°\text{C}$

Fig.2 $T=-50°\text{C}$

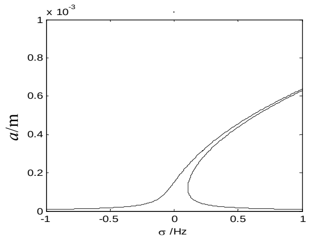

图 3 $T=0°\text{C}$

Fig.3 $T=0°\text{C}$

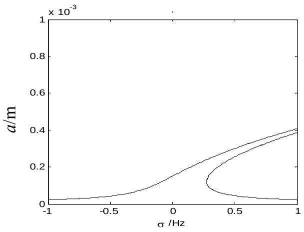

图 4 $T=50°\text{C}$

Fig.4 $T=50°\text{C}$

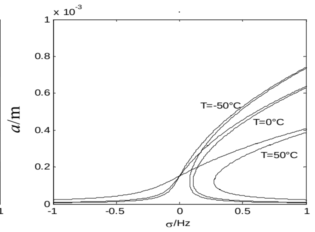

图 5 组合图形

Fig.5 Combination figures

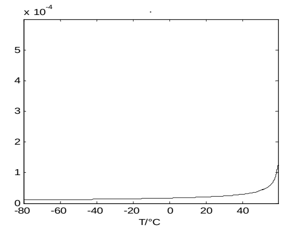

图 6 $\sigma=-0.5$ Hz

Fig.6 $\sigma=-0.5$ Hz

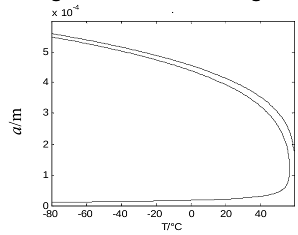

图 7 $\sigma=0.5$ Hz

Fig.7 $\sigma=0.5$ Hz

3 奇异性分析

用多尺度法得到的只是具有确定参数时满足主共振条件的周期解。由于不同的系统振动参数不同，某些参数变化，有可能引起系统微分方程的结构不稳定，使振幅产生较大的变化，甚至是突变，即方程出现分岔解。因此有必要对系统主共振的定常解进行奇异性分析，以得到分岔解的全部拓扑结构[8]。

展开式(20a)，并在等式两边同乘以a，得

$$a^7+\beta a^5+\overline{\alpha}a^3-\lambda a=0 \tag{25}$$

式中

$$\beta=-16\omega_0/3K, \overline{\alpha}=\frac{\mu^2+\sigma^2}{9K^2/64\omega_0^2}, \lambda=16F^2/9K^2 \tag{26}$$

静态分岔方程

$$G(a,\lambda,\overline{\alpha},\beta)=a^7-\lambda a+\overline{\alpha}a^3+\beta a^5 \tag{27}$$

$\lambda,\overline{\alpha},\beta$具有双重意义，既代表力学参数，又代表分岔参数和开折参数。作为力学参数，$\lambda,\overline{\alpha},\beta$反映系统的阻尼、调谐值、非线性、激励和温度等综合影响与相互作用的全部信息。

根据奇异性理论知[9,10]，分岔方程$G(a,\lambda,\overline{\alpha},\beta)$

具有 Z_2 对称性，可以证明，分岔方程(27)是如下规范形

$$g(a,\lambda)=a^7-\lambda a \tag{28}$$

的普适开折。且 $G(a,\lambda,\overline{\alpha},\beta)$ 是余维 2 的，即有两个开折参数 $\overline{\alpha},\beta$。下面求分岔方程的转迁集。方程的转迁集，即为各种分岔模式的所在参数区域的交界线，具有 Z_2-对称性的分岔方程

$G(a,\lambda,\overline{\alpha},\beta)=aR(u,\lambda,\overline{\alpha},\beta)$　　其中 $u=a^2$

转迁集的定义为

(1) 分岔集

$B_1(Z_2)=\{\overline{\alpha}\in R^k \mid \exists(u,\lambda),u>0,$使得在$(u,\lambda,\overline{\alpha}),u\neq 0$处$R=R_u=R_\lambda=0\}$

$B_0(Z_2)=\{\overline{\alpha}\in R^k \mid \exists\lambda,$使得在$(0,\lambda,\overline{\alpha})$处$R=R_\lambda=0\}$

(2) 滞后集

$H_1(Z_2)=\{\overline{\alpha}\in R^k \mid \exists(u,\lambda),u>0,$使得在$(u,\lambda,\overline{\alpha})$处$R=R_u=R_{uu}=0\}$

$H_0(Z_2)=\{\overline{\alpha}\in R^k \mid \exists\lambda,$使得在$(0,\lambda,\overline{\alpha})$处$R=R_u=0\}$

(3) 双极限集

$D=\{\overline{\alpha}\in R^k \mid \exists\lambda,$及$u_1\neq u_2,$且$u_1,\ u_2>0,$使得$R=uR_u=0$在$(u_1,\lambda,\overline{\alpha})$和$(u_2,\lambda,\overline{\alpha})$处$\}$

(4) 转迁集

$\Sigma(Z_2)=B_1(Z_2)\cup B_0(Z_2)\cup H_1(Z_2)\cup H_0(Z_2)\cup D(Z_2)$

对应式(27)的转迁集为

(1) 分岔集

$B_0(Z_2)=B_1(Z_2)=\phi$　　(ϕ 为空集)

(2) 滞后集

$H_0(Z_2)=\{\overline{\alpha}=0\}$

$H_1(Z_2)=\{\overline{\alpha}=\beta^2/3,\beta\leq 0\}$

(3) 双极限集

$D(Z_2)=\{\overline{\alpha}=\beta^2/3,\beta\leq 0\}$

(4) 转迁集

$\Sigma(Z_2)=B_0(Z_2)\cup B_1(Z_2)\cup H_0(Z_2)\cup H_1(Z_2)\cup D(Z_2)$

转迁集 Σ 将 $\overline{\alpha}-\beta$ 划分为 3 个区域，如图 8 所示。在不同的区域中，解的拓扑结构是不同的，但在同一区域中，即使分岔参数变化，其分岔图也将保持同一拓扑结构，这样的分岔图称为保持的；而转迁集上的分岔图在参数受到小的扰动时，会改变其所分隔的保持分岔结构之一，故称其为非保持的。

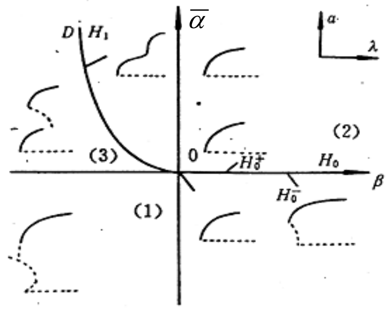

图 8　分岔方程 $G(a,\lambda,\overline{\alpha},\beta)=a^7-\lambda a+\overline{\alpha}a^3+\beta a^5$ 的转迁集和分岔图

Fig.8　Transiation sets and bifurcation diagrams for equation $G(a,\lambda,\overline{\alpha},\beta)=a^7-\lambda a+\overline{\alpha}a^3+\beta a^5$

4　结论

(1) 弹性直杆热胀冷缩状态下受均布简谐激励时的主共振受温度影响显著；随着温度降低主共振幅频响应曲线的振幅增加，共振区变窄。

(2) 弹性直杆热胀冷缩状态下受均布简谐激励的主共振的温度响应曲线有两种拓扑结构，且随着温度变化的两种温度响应曲线的变化趋势不同。

(3) 得到了弹性直杆热胀冷缩状态下受均布简谐激励主共振静态分岔方程在开折参数平面的转迁集与分岔图。

上述结论未考虑温度对弹性常数的影响，所得到的结果对实际工程中桥梁及许多机械设备等结构因温度变化弹性直杆振动问题具有参考价值。

参考文献：

[1] 付宝连. 弯曲薄板功的互等新理论[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
Fu Baolian. New reciprocal theory of bending plates [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)

[2] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989.
Cao Zhiyuan. Vibration theory of plates and shells [M]. China Railway Press, 1989. (in Chinese)

[3] 吴晓, 张龙庭, 马建功. 弹性直杆热膨胀状态下的非线性振动[J]. 工程力学, 1996, 13(4): 129~133.
Wu Xiao, Zhang Longting, Ma Jiangong. The nonlinear vibrations of elastic straight column in state of thermal expansion [J]. Engineering Mechanics, 1996, 13(4): 129~133. (in Chinese)

(参考文献[4]~[10]转第 59 页)

参考文献：

[1] Doebling S W, Farrar C R, Prime M B. A summary review of vibration-based damage identification methods [J]. The Shock and Vibration Digest, 1998, 30(2): 9~105.

[2] 马宏伟, 杨桂通. 结构损伤探测的基本方法和研究进展[J]. 力学进展, 1999, 29(4): 513~527.
Ma Hongwei, Yang Guitong. Methods and advances of structural damage detection [J]. Advances in Mechanics, 1999, 29(4): 513~527. (in Chinese)

[3] 谢强, 薛松涛. 土木工程结构健康监测的研究状况与进展[J]. 中国科学基金, 2001, 5: 285~288.
Xie Qiang, Xue Songtao. Research state and advances on structural health monitoring in civil engineering [J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 2001,5: 285~288. (in Chinese)

[4] 孙鸿敏, 李宏男. 土木工程结构健康监测研究进展[J]. 防灾减灾工程学报, 2003, 23(3): 92~98.
Sun Hongmin, Li Hongnan. State-of-the-art review of the structural health monitoring in civil engineering [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2003, 23(3): 92~98. (in Chinese)

[5] 瞿伟廉, 黄东梅. 大型复杂结构的两阶段损伤诊断方法[J]. 世界地震工程, 2003, 19(2): 72~78.
Qu Weilian, Huang Dongmei. Two-step damage diagnosis methods of large and complex structures [J]. World Earthquake Engineering, 2003, 19(2): 72~78. (in Chinese)

[6] Kim H, Young M, Barkowicz T J. Two-step structural damage detection approach with limited instrumentation [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119(2): 258~264.

[7] 王柏生, 倪一清, 高赞明. 用概率神经网络进行结构损伤位置识别[J]. 振动工程学报, 2001, 14(1): 60~64.
Wang Baisheng, Ni Yiqing, Ko Janming. Structure damage localization using probabilistic neural network [J]. Journal of Vibration Engineering, 2001, 14(1): 60~64. (in Chinese)

[8] 瞿伟廉, 陈伟, 李秋胜. 基于神经网络技术的复杂框架结构节点损伤的两步诊断法[J]. 土木工程学报, 2003, 36(5): 37~45.
Qu Weilian, Chen Wei, Li Qiusheng. Two-step approach for joints damage diagnosis of framed structures by artificial nueral networks [J]. China Civil Engineering Journal, 2003, 36(5): 37~45. (in Chinese)

[9] Ray L R, Tian L. Damage detection in smart structures through sensitivity enhancing feedback control [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 227(5): 987~1002.

[10] Lew J S, Juang J N. Structural damage detection using virtual passive controllers [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(3): 419~424.

[11] Koh B H, Ray L R. Localization of damage in smart structures though sensitivity enhancing feedback control [J]. Mechanical System and Signal Processing, 2003, 17(4): 837~855.

[12] Shi Z Y, Law S S, Zhang L M. Damage detection by directly using incomplete mode shapes [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(6): 656~660.

[13] Specht D F. Probabilistic neural networks [J]. Neural Networks, 1990, 1(3): 109~118.

[14] 顾仲权, 马扣根, 陈卫东. 振动主动控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997.
Gu Zhongquan, Ma Kougen, Chen Weidong. Active vibration control [M]. Beijing: China Defence Industry Press, 1997. (in Chinese)

(上接第53页)

[4] 贾春元. 板的非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 1989.
Jia Chunyuan. Nonlinear analyses of plates [M]. Beijing: Science Press, 1989. (in Chinese)

[5] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.
Hu Haiyan. Applied Nonlinear dynamics [M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000. (in Chinese)

[6] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillation [M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.

[7] 邱家俊. 机电耦联动力系统的非线性振动[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
Qiu Jiajun. Nonlinear oscillations of Mechanical and electrical coupling system [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)

[8] Qiu Jiajun, Li Wenlan, Yang Zhian. The resonances of parametric vibration with forced vibration of the stator system of water turbogenerator stimulated by electroma gnetism[J]. Mechanica Solida Sinica, 1999, 12(1): 63~74.

[9] Golubisky M and Schaefler D G.. Singularites and groups in bifurcation theory [M]. New York; Spring –verlay, 1985.

[10] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
Chen Yushu. Bifurcation and chaos theory of nonlinear vibration systems [M]. Beijing: High Education Press, 1993. (in Chinese)