

文章编号: 1000-4750(2008)05-0102-08

旋转层合圆板的行波动力学特性分析

李龙飞, *王省哲

(兰州大学土木工程与力学学院, 兰州 730000)

摘 要: 基于一阶剪切变形理论和哈密顿原理, 建立了旋转层合圆板动力学运动方程和相应的边界条件。运用伽辽金法对旋转层合圆板横向振动的行波动力学特性进行了模拟, 给出了其前行波、后行波振动频率随层合圆板铺层几何特征、材料参数、旋转速度等的变化规律, 并对旋转层合圆板几何和材料参数对其动力失稳临界转速的影响进行了讨论。

关键词: 旋转层合圆板; 前行波、后行波频率; 振动模态; 临界转速; 一阶剪切变形理论

中图分类号: O327 文献标识码: A

ANALYSIS ON DYNAMIC CHARACTERISTICS OF TRAVELING WAVES FOR ROTATING MULTI-LAYER ANNULAR PLATE

LI Long-fei, *WANG Xing-zhe

(School of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Based on the first order shear deformation theory and Hamiltonian principle, the governing equations and boundary conditions of rotating multi-layer annular plate were derived. The analysis on dynamic characteristics of traveling waves for the rotating multi-layer annular plate is presented in this paper by means of Galerkin method. The frequencies of the forward and backward traveling waves for the rotating plate depend upon the rotating speed, and the geometrical and material parameters of the plate are obtained numerically. The effects of geometrical and material parameters on the critical speed of the rotating multi-layer annular plate instability are discussed in detail.

Key words: rotating multi-layer annular plate; frequencies of the forward and backward traveling wave; vibration mode; critical speed; first order shear deformation theory

高速旋转结构作为许多旋转机械的核心部件, 在机械、电机、计算机数据存贮设备、高速切割仪器与设备以及航空、航天等现代高科技领域中被广泛使用。Lamb 和 Southwell^[1-2]最早对中心夹紧旋转圆板的行波动力学进行了分析, 并考虑了离心力和弯曲应力对圆盘振动的影响, 之后出现了一些针对旋转的梁、板、壳等结构的自由振动特性研究^[3-5]。复合材料结构由于具有一定的可控制特性, 如可通过改变和设计材料铺层, 纤维增强基体的铺设方向或铺层数目达到对结构某些力学性能的改

进和提高而备受应用领域的广泛关注^[6-7]。较早对旋转复合材料层合圆板动力特性开展研究的是 Lee 和 Waas^[8-9], 他们基于 zig-zag 理论描述复合材料层合圆板的形变特性以及采用四节点扇形有限单元模型和状态空间方法, 对摩擦载荷作用下的层合圆板振动频率进行了分析, 以及对加速旋转层合圆板的瞬态动力响应、层合圆板对称或反对称铺层方式等对横向振动响应的影响进行了有限元分析。采用广义伽辽金法或有限元方法对复合材料层合壳、叶片、梁的振动特性和稳定性方面近年来也有一些研究开

收稿日期: 2006-10-22; 修改日期: 2007-05-06

基金项目: 兰州大学骨干教师科研项目(584409)

作者简介: 李龙飞(1981-), 男, 山东青岛人, 硕士, 从事旋转结构振动研究(E-mail: lilongfei04@lzu.cn);

*王省哲(1972-), 男, 陕西扶风人, 教授, 博士, 从事电磁固体力学、多场耦合数值计算研究(E-mail: xzwang@lzu.edu.cn).

展^[10-13]。然而基于有限元数值计算方法进行分析时往往对旋转结构的前行波、后行波频率以及模态不能很好识别，此外现有的工作也很少有就铺层几何特征、材料参数等对于旋转层合板的前行波、后行波频率以及临界转速的影响给出系统的定量结果。

本文对中心夹支外边简支的旋转层合圆板的行波动力学行为建立了旋转层合圆板的运动方程和相应的边界条件。运用伽辽金方法对旋转层合圆板横向振动的行波动力学特性进行了模拟，给出了其旋转状态下前行波、后行波振动频率随层合圆板铺层几何特征、材料参数、旋转速度等的变化规律，并对旋转层合圆板几何和材料参数，及其考虑材料阻尼效应等对其动力失稳临界转速的影响进行了讨论。

1 基本方程

考虑如图 1 所示，层数为 S 的一对称铺设层合圆板，其内半径、外半径分别为 r_i 和 r_o ，以恒定转速 Ω 绕中心轴旋转。

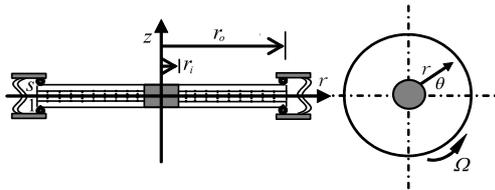


图 1 旋转层合圆板示意图

Fig.1 Sketch of a rotating multi-layer annular plate

对于中厚板和层合板已有相关的变形理论^[14]，其中，一阶剪切变形理论由于其形式简单可适用于薄板到中厚板而应用广泛。这里采用一阶剪切变形理论，在极坐标系 (r, θ, z) 下板内的位移场表示如下：

$$u = u_0(r) + z u_1(r, \theta, t), \quad v = z v_1(r, \theta, t), \quad w = w(r, \theta, t) \quad (1)$$

其中： u_0 为层合板中面径向位移； u_1 、 v_1 分别为板中面法线在 rz 和 θz 平面内的角位移。相应的板内应变可表示为：

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_0}{r} + z \left(\frac{u_1}{r} + \frac{\partial v_1}{r \partial \theta} \right), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_0}{r \partial \theta} + z \left(\frac{\partial u_1}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= u_1 + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta z} = v_1 + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

这里层合圆板为各向同性的材料并采用线性本构关系，圆板第 s 层的应力为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r^{(s)} \\ \sigma_\theta^{(s)} \\ \sigma_{r\theta}^{(s)} \\ \sigma_{rz}^{(s)} \\ \sigma_{\theta z}^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

其中，弹性系数：

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \alpha_{22} &= \frac{E^{(s)}}{1 - (\nu^{(s)})^2}, \quad \alpha_{33} = \frac{E^{(s)}}{2(1 + \nu^{(s)})}, \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{E^{(s)} \nu^{(s)}}{1 - (\nu^{(s)})^2}, \quad \alpha_{44} = \alpha_{55} = \xi G^{(s)}, \end{aligned}$$

$\xi = 5/6$ 为剪切修正系数； $h^{(s)}$ 、 $\rho^{(s)}$ 、 $E^{(s)}$ 、 $\nu^{(s)}$ 和 $G^{(s)}$ 分别为圆板第 s 层的厚度、密度、弹性模量、泊松比和剪切模量。

对于旋转层合圆板，其板内的速度场可表示为：

$$V_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} e_r + \Omega(r + u_0) e_\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \Omega \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) e_z \quad (4)$$

这里忽略了高阶项而只取速度的线性部分，其中 e_r 、 e_θ 、 e_z 分别表示 r 方向、 θ 方向、 z 方向的单位向量，从而，层合圆板第 s 层内的动能 $K^{(s)}$ 可表示为：

$$K^{(s)} = \frac{1}{2} \rho^{(s)} h^{(s)} \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \Omega^2 \left[(r + u_0)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta \quad (5)$$

层合板第 s 层板的应变能 $U^{(s)}$ 和内力功 $W^{(s)}$ 不难表示如下：

$$U^{(s)} = \frac{1}{2} \iiint_s [\sigma_r^{(s)} \varepsilon_r + \sigma_\theta^{(s)} \varepsilon_\theta + \sigma_{r\theta}^{(s)} \varepsilon_{r\theta} + \sigma_{rz}^{(s)} \varepsilon_{rz} + \sigma_{\theta z}^{(s)} \varepsilon_{\theta z}] r dr d\theta dz \quad (6)$$

$$W^{(s)} = \frac{1}{2} \iiint_s \left[\sigma_r^{(s)} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_\theta^{(s)} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 + 2\sigma_{r\theta}^{(s)} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right] r dr d\theta dz \quad (7)$$

进而层合板内总的应变能、动能、内力功表示为：

$$U = \sum_{s=1}^S U^{(s)}, \quad K = \sum_{s=1}^S K^{(s)}, \quad W = \sum_{s=1}^S W^{(s)}.$$

为分析方便起见，引入如下的无量纲变量：

$$\bar{r} = \frac{r}{r_o}, \quad \kappa = \frac{r_i}{r_o}, \quad \bar{t} = \Omega t,$$

$$\bar{u}_0 = \frac{u_0}{r_o}, \bar{u}_1 = u_1, \bar{v}_1 = v_1, \bar{w} = \frac{w}{h} \quad (8)$$

其中, $h = \sum_{s=1}^S h^{(s)}$ 为层合板的总厚度。在以下的分析中, 在不至于造成表述上的混乱以及为了书写上的简便起见, 将各无量纲变量上面的横线符号去掉。

由哈密顿原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + W - K) dt = 0 \quad (9)$$

可得旋转层合圆板无量纲形式的基本控制方程:

$$\sum_{s=1}^S C^{(s)} \left(\frac{u_0}{r} - \frac{\partial u_0}{\partial r} - r \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) - \sum_{s=1}^S \rho^{(s)} h^{(s)} r_o^2 [\Omega^2 (r + u_0)] r = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1}{r_o} \left(\frac{u_1}{r} + \frac{\partial v_1}{r \partial \theta} - \frac{\partial u_1}{\partial r} - r \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) + \\ & \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1 - \nu^{(s)}}{2} \frac{1}{r_o} \left(-\frac{\partial^2 u_1}{r \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial v_1}{r \partial \theta} \right) + \\ & \sum_{s=1}^S B^{(s)} \nu^{(s)} \frac{1}{r_o} \left(-\frac{\partial^2 v_1}{\partial r \partial \theta} \right) + \\ & \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} r_o \left(u_1 + \frac{h}{r_o} \frac{\partial w}{\partial r} \right) r = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1}{r_o} \left(-\frac{\partial u_1}{r \partial \theta} - \frac{\partial^2 v_1}{r \partial \theta^2} \right) + \\ & \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1 - \nu^{(s)}}{2} \frac{1}{r_o} \left(-\frac{\partial u_1}{r \partial \theta} + \frac{v_1}{r} - \frac{\partial v_1}{\partial r} - \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial \theta} - r \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} \right) + \sum_{s=1}^S B^{(s)} \nu^{(s)} \frac{1}{r_o} \left(-\frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial \theta} \right) + \\ & \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} r_o \left(v_1 + \frac{h}{r_o} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) r = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^S C^{(s)} \frac{h}{r_o} \left(-r \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} u_0 \right) - \sum_{s=1}^S C^{(s)} \nu^{(s)} \frac{h}{r_o} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_0 + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) - \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} \left(u_1 + r \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{h}{r_o} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\ & \left. \frac{h}{r_o} r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{h}{r_o} \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^S \rho^{(s)} h^{(s)} r_o \Omega^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) r = 0 \quad (13)$$

考虑层合圆板在内边界 $r = r_i$ 处固定并夹紧, 在外边界 $r = r_o$ 处滑动固定的支撑情况, 则相应边界条件的无量纲形式为:

$$u_0|_{r=r_i} = 0, u_1|_{r=r_i} = 0, v_1|_{r=r_i} = 0, w|_{r=r_i} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{s=1}^S C^{(s)} \left(r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \sum_{s=1}^S C^{(s)} \nu^{(s)} u_0 \right]_{r=r_1} = 0, \\ & u_1|_{r=r_1} = 0, v_1|_{r=r_1} = 0, w|_{r=r_1} = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

其中: $C^{(s)} = \frac{E^{(s)} h^{(s)}}{1 - (\nu^{(s)})^2}$ 表示第 s 层板的抗(压)剪刚度;

$\sum_{s=1}^S C^{(s)}$ 表示层合板的抗(压)剪刚度; $B^{(s)} =$

$\frac{E^{(s)} (Z_s^3 - Z_{s-1}^3)}{3[1 - (\nu^{(s)})^2]}$ 表示第 s 层板的抗弯(扭)刚度;

$\sum_{s=1}^S B^{(s)}$ 表示层合板的抗弯(扭)刚度; Z_s 为第 s 层板上表面的 z 坐标。

2 求解过程

对于旋转层合圆板的行波动力问题解, 可假定位移函数如下形式:

$$\begin{aligned} u_0(r) &= \sum_{l=0}^L C_{rl}^0 V_{rl}^0, \quad u_1(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^M C_{rmm}^1 V_{rmm}^1 e^{i(n\theta + \lambda t)}, \\ v_1(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^M C_{\theta mm}^1 V_{\theta mm}^1 e^{i\left(\frac{\pi}{2} + n\theta + \lambda t\right)}, \\ w(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^M C_{wmm} W_{mm} e^{i(n\theta + \lambda t)} \quad (16) \end{aligned}$$

式中: λ 是复频率, 其实部 $\text{Re}(\lambda)$ 表示层合圆板的振动频率, 虚部 $\text{Im}(\lambda)$ 表示层合圆板的振动阻尼; M 、 L 表示无穷级数求和的截断项数目; C_{rl}^0 、 C_{rmm}^1 、 $C_{\theta mm}^1$ 、 C_{wmm} 为待定系数并取如下形式:

$$\begin{aligned} V_{rl}^0(r) &= (r-k)^{l+1} (r-d_{rl}), \\ V_{rmm}^1(r) &= V_{\theta mm}^1(r) = W_{mm}(r) = (r-k)^{m+1} (r-1) \quad (17) \end{aligned}$$

这里 (m, n) 分别是圆板振动模态的节圆数和节径数, 显然上面的式子满足了内外边界的条件(14)以及条件(15)后 3 个方程。式(17)中待定常数 d_{rl} 可通过边界条件(15)中的第 1 式确定, 即:

$$d_{rl} = 1 + \frac{\sum_{s=1}^S C^{(s)}(1-k)}{\sum_{s=1}^S C^{(s)}(l+1) + \sum_{s=1}^S C^{(s)}v^{(s)}(1-k)} \quad (18)$$

将式(16)中的第 1 式代入方程式(10), 并与 $V_{rl}^0(r) (\hat{l}=0,1,\dots,L)$ 进行内积运算, 可得如下关于系数 C_{rl}^0 的矩阵方程:

$$[A][C_L] = [D] \quad (19)$$

其中: $[C_L] = [C_{r0}^0 \ C_{r1}^0 \ \dots \ C_{rL}^0]^T$; $[A]$ 和 $[D]$ 分别是 $(L+1) \times (L+1)$ 的矩阵和 $(L+1)$ 的列阵, 其元素见附录。由式(19)可求得系数 $[C_L]$, 进而得函数 u_0 的表达式。另外将式(16)代入方程式(11)~方程式(13), 分别与 $V_{\hat{m}\hat{m}}^1(r)e^{-i(n\theta+\lambda t)}$, $V_{\theta\hat{m}\hat{m}}^1(r)e^{-i(\pi/2+n\theta+\lambda t)}$, $W_{\hat{m}\hat{m}}(r)e^{-i(n\theta+\lambda t)}$ ($\hat{m}=0,1,\dots,M$) 进行内积运算。由此可得关于系数 $C_{w\hat{m}\hat{m}}$ 的矩阵方程:

$$\{[M]\lambda^2 + [N]\lambda + [Q]\}[C] = [0] \quad (20)$$

其中: $[C] = [C_{w0} \ C_{w1} \ \dots \ C_{wM}]^T$; $[M]$, $[N]$, $[Q]$ 为 $(M+1) \times (M+1)$ 的矩阵, 其元素见附录。显然方程式(20)有零解, 其非零解条件即为方程系数矩阵的行列式值为零, 由此可得如下的特征方程:

$$\det\{[M]\lambda^2 + [N]\lambda + [Q]\} = 0 \quad (21)$$

对于任一节径数 n , 求解此特征方程可得到 $(M+1)$ 对特征值。在每一对的两个特征值中, 一个与沿着圆板旋转方向的前行波(FTW)相关, 表示为 λ^{FTW} , 另一个与沿着圆板旋转方向相反的后行波(BTW)相关, 表示为 λ^{BTW} 。特征值的实部 $\text{Re}(\lambda)$ 为圆板振动(前行波、后行波)的模式频率, 虚部 $\text{Im}(\lambda)$ 为圆板振动(前行波、后行波)的阻尼。

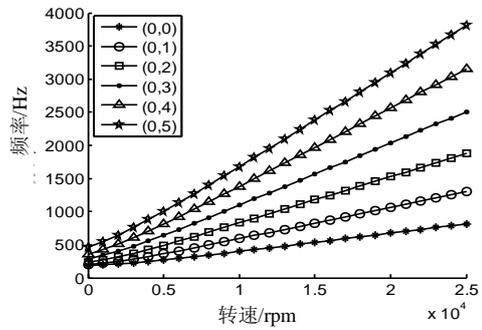
3 算例与讨论

首先, 为了验证本文数值算法的正确性和精度, 取层合圆板的层数 $S=1$, 即退化到单层情形, 对其在非旋转状态 ($\Omega=0 \text{ rpm}$) 以及旋转状态速度 $\Omega=1000 \text{ rpm}$ 时的振动频率进行了数值模拟并与文献[15]中的单层结果进行了对比。结果显示: 截断项分别取 $L=5$ 和 $M=5$ 时所得圆板的各模式 (m, n) 振动频率结果已经与文献[15]中的数值结果极为接近, 误差在 5% 之内。

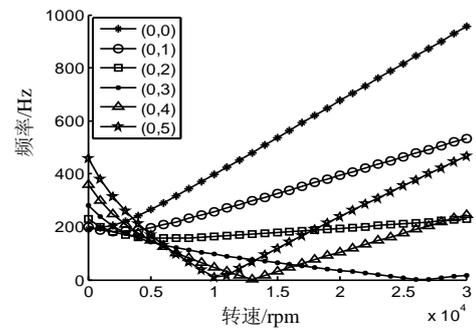
作为算例, 利用前面建立的模型与数值方法我们对层合圆板铺层几何特征、材料参数、旋转速度等对其行波动力学特性的影响进行分析。以 3 层旋转层合圆板为例, 取第 1 层、第 3 层圆板为钢质材

料(材料 I: 弹性模量为 200GPa, 泊松比为 0.3, 密度为 7840kg/m³), 且两层具有相同的厚度 $h^{(1)}=h^{(3)}$; 第 2 层为铜质材料(材料 II: 弹性模量为 110GPa, 泊松比为 0.34, 密度为 8940kg/m³)。

图 2 给出了层合圆板不同转速所对应的前行波、后行波频率。计算中取层合圆板的内半径 $r_i=30\text{mm}$ 和外半径 $r_o=120\text{mm}$, 总厚度 $h=0.3\text{mm}$, 第 2 层板厚度与层合板总厚度之比取为 $p=h^{(2)}/h=0.4$ 。对于前行波, 随着旋转速度的增加, 各模式频率亦随之增大(如图 2(a)), 这是由于转速的增加使得层合圆板内离心体力增加并相应增大了板的刚度。对于后行波, 除了低阶模式(0,0)、(0,1)、(0,2)外, 其高阶模式频率($n \geq 3$)随着转速的增大先降低到零值, 此时旋转圆板发生动力屈曲失稳, 所对应的转速称为临界转速, 之后频率进一步增大(如图 2(b))。



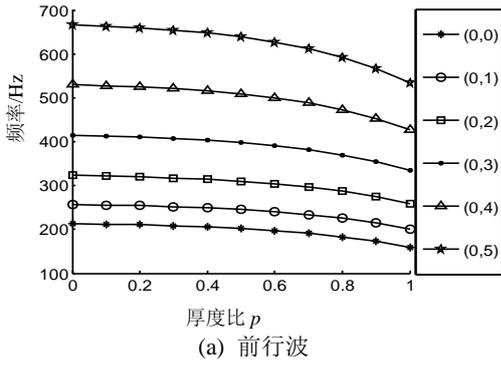
(a) 前行波



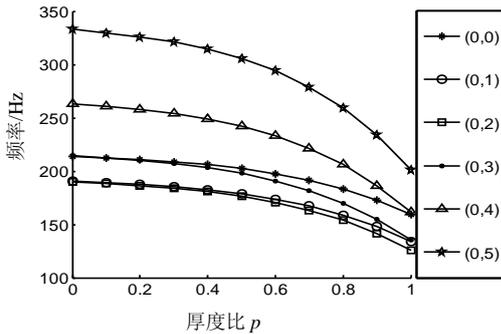
(b) 后行波

图 2 层合圆板前行波、后行波频率随转速变化
Fig.2 FTW and BTW mode frequencies varying with rotating speed

图 3—图 5 给出了旋转层合圆板几何参数对其频率和临界转速的影响。图 3 为前行波、后行波频率随厚度比 p 的变化, 计算中所取的圆板内半径、外半径, 总厚度与图 2 中的相同。对于前行波(图 3(a)), 随着厚度比的增加, 层合圆板弯曲刚度减小各模式频率随之减小; 对于后行波(图 3(b)), 随着厚度比的增大, 其后行波频率亦随之减小。这里计算



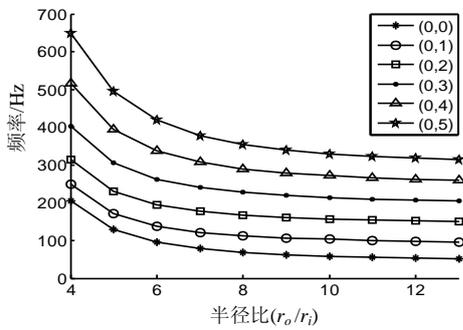
(a) 前行波



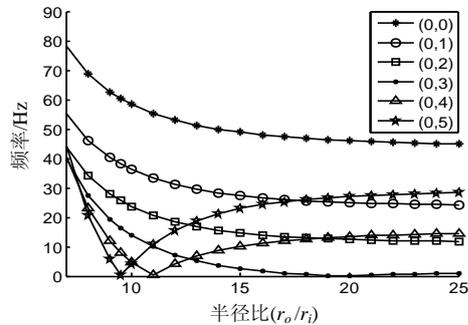
(b) 后行波

图3 层合圆板前行波、后行波频率随厚度比变化 ($\Omega=2000\text{rpm}$)

Fig.3 FTW and BTW mode frequencies varying with thickness ratio ($\Omega = 2000\text{rpm}$)



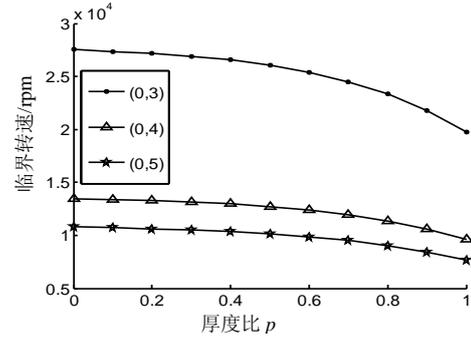
(a) 前行波



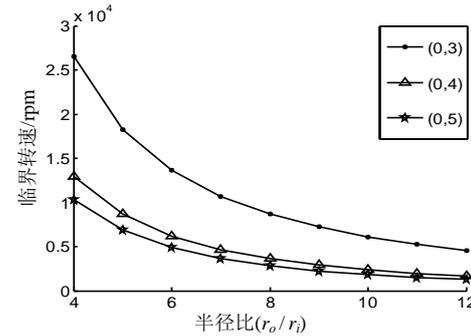
(b) 后行波

图4 层合圆板前行波、后行波频率随半径比变化 ($\Omega=2000\text{rpm}$)

Fig.4 FTW and BTW mode frequencies varying with radii ratio ($\Omega = 2000\text{rpm}$)



(a) 临界转速随厚度比



(b) 临界转速随半径比

图5 层合圆板临界转速随几何参数的变化关系

Fig.5 Critical speeds varying with geometrical parameters

中所取的转速 $\Omega=2000\text{rpm}$ ，低于层合圆板的临界转速。图4为厚度比 $p=0.4$ 情形下的内外半径比 r_o/r_i 对旋转圆板前、后行波频率的影响。对于前行波(图4(a))，圆板各模态频率随着半径比的增大而减小并趋向于平缓，这是由于半径比的增大使得圆板的弯曲刚度减小因而频率有所降低；而对于后行波(图4(b))，圆板各阶模态频率随着半径比的增大先减小到零值，之后增大。这里出现的圆板某些后行波模态频率降为零的情形，是由于计算中所选取的转速 $\Omega = 2000\text{rpm}$ ，恰好对应于圆板某些半径比下的临界转速。例如：在此转速下内外半径比 $r_o/r_i = 20$ 圆板(0, 3)模态达到临界转速；半径比 $r_o/r_i = 11$ 圆板(0, 4)模态达到临界转速等。图5给出了层合圆板的几何参数对动力失稳临界转速的影响关系。计算结果表明对于(0, 0)、(0, 1)和(0, 2)模态，后行波频率并未出现降为零的情形，即对应于此3种模态不出现动力失稳。图5中给出了发生屈曲失稳的3种模态($m=0, n=3, n=4, n=5$)所对应的圆板临界转速随几何参数的变化。图5(a)为圆板厚度比 p 的变化对临界转速 Ω_{cr} 的影响，可以看出随着厚度比的增大，临界转速逐渐减小。图5(b)给出了厚度比 $p=0.4$ 时圆板内外半径比 r_o/r_i 对临界转速的影响，由图5(b)中可以看出：随着半径比的增大，临界转速在减小。这是由于半径比的增大，其实质

上是降低了圆板的弯曲刚度，使圆板固有频率减小，临界转速也减小。

最后考虑材料阻尼效应情况。这里仍然以3层旋转层合圆板为例，层合板第1层、第3层选取为材料I，且厚度相同 $h^{(1)}=h^{(3)}$ ；第2层选取为材料II。材料I的复模量为 $E^{(1)}=E^{(3)}=E_1(1+i\eta_1)$ ，材料II的复模量为 $E^{(2)}=E_2(1+i\eta_2)$ 。这里 $E_1、E_2$ 为存储模量， $\eta_1、\eta_2$ 为损耗因子。临界转速 Ω_{cr} 随层合圆板厚度比 p 的变化与不考虑阻尼效应的结果类似(如图5(a))。图6给出了材料I与材料II的存储模量比 E_1/E_2 的变化对临界转速 Ω_{cr} 的影响。计算中取层合圆板内半径、外半径分别为 $r_i=30\text{mm}$ 和 $r_o=120\text{mm}$ ，总厚度 $h=0.3\text{mm}$ ，厚度比 $p=0.4$ 。材料I和材料II的损耗因子分别为 $\eta_1=0.03、\eta_2=0.0005$ 。存储模量 $E_2=100\text{GPa}$ 取为定值。由图6可以看出，随着存储模量比的增大，临界转速逐渐增大。这主要是由于存储模量比的增大增强了圆板弯曲刚度，相应地提高了旋转层合板的临界转速。

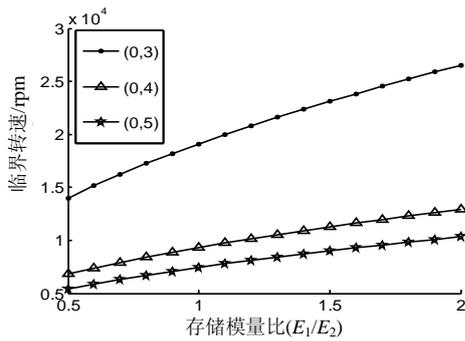


图6 旋转层合圆板存储模量比对临界转速的影响

Fig.6 Critical speeds varying with module ratio

表1为材料I与材料II的损耗因子比 $F=\eta_1/\eta_2$ 对临界转速 Ω_{cr} 的影响，计算中分别取 $E_1=200\text{GPa}$ ， $E_2=100\text{GPa}$ ， $\eta_2=0.0005$ 为定值。表1中给出了3种模态($m=0, n=3, n=4, n=5$)所对应的临界转速随损耗因子比 F 的变化，可以看出临界转速随着损耗因子比的增大有所提高。这主要是由于随着损耗因子比的增大，增大了层合圆板的整体阻尼，从而提高了其临界转速。表2为损耗因子比 F 的变化对

表1 临界转速随损耗因子比 F 的变化

Table 1 Critical speeds varying with loss factor ratio F of rotating multi-layer annular plate

模态 (m, n)	临界转速/rpm					
	$F=80$	$F=100$	$F=120$	$F=140$	$F=160$	$F=180$
(0, 3)	26536	26552	26572	26596	26624	26655
(0, 4)	12945	12949	12953	12959	12966	12973
(0, 5)	10345	10347	10350	10353	10357	10362

表2 前行波、后行波振动频率随损耗因子比 F 的变化 ($\Omega=2000\text{rpm}$)

Table 2 FTW and BTW mode frequencies varying with loss factor ratio F ($\Omega=2000\text{rpm}$)

模态 (m, n)	振动频率/Hz					
	$F=80$	$F=100$	$F=120$	$F=140$	$F=160$	$F=180$
(0,0) FTW	205.73	205.75	205.78	205.81	205.84	205.88
BTW	205.73	205.75	205.78	205.81	205.84	205.88
(0,1) FTW	248.95	248.97	249.00	249.03	249.06	249.10
BTW	182.28	182.30	182.33	182.36	182.40	182.44
(0,2) FTW	313.72	313.75	313.78	313.81	313.85	313.90
BTW	180.39	180.42	180.45	180.48	180.52	180.57
(0,3) FTW	402.74	402.77	402.81	402.85	402.90	402.95
BTW	202.74	202.77	202.81	202.85	202.90	202.95
(0,4) FTW	515.20	515.24	515.28	515.34	515.40	515.47
BTW	248.53	248.57	248.61	248.67	248.73	248.80
(0,5) FTW	647.24	647.28	647.34	647.41	647.49	647.58
BTW	313.90	313.95	314.01	314.08	314.16	314.25

前行波、后行波振动频率的影响。表2中给出了层合圆板的多阶振动模态的前行波、后行波振动频率随损耗因子比 F 的变化。可以看出各阶前行波、后行波模态频率随损耗因子比 F 的增大略有增加，但不甚显著。

4 结论

基于一阶剪切变形理论和应用哈密顿原理，本文推导了旋转层合圆板的横向振动控制方程以及相应的边界条件，运用伽辽金方法对层合圆板行波动力学问题进行了求解，详细讨论了层合圆板几何特征、材料参数、阻尼效应以及旋转速度对其动力学特性的影响。结果表明：本文采用的伽辽金方法计算精度高，而且可以同时给出前行波、后行波模态频率，随着旋转速度的增大，前行波频率增大，后行波频率先减小到零值而后增大，并存在动力失稳临界转速；随着层合板厚度比或半径比的增大，其临界转速和前行波频率均随之减小；考虑材料阻尼的情形下的层合板临界转速随着厚度比的增大而减小，随着存储模量比的增大而增大，而损耗因子的增大使得前行波、后行波振动频率以及临界转速也有所增大，并一定程度上提高了旋转层合圆板的动力稳定性。

参考文献:

- [1] Lamb H, Southwell R V. The vibration of a spinning disk [J]. Proceedings of the Royal Society, 1921, 99: 272—280.
- [2] Southwell R V. On the free transverse vibration of a

- uniform circular disk clamped at its center; and on the effects of rotation [J]. Proceedings of the Royal Society, 1922, 101: 133—153.
- [3] Eversman W, Dodson R O. Free vibration of a centrally clamped spinning circular disk [J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1969, 7(10): 2010—2012.
- [4] 晏砾堂. 高速旋转机械振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
Yan Litang. The vibration of high speed rotating machines [M]. Beijing: Defense Industry Press, 1994. (in Chinese)
- [5] 李永强, 郭星辉, 刘杰. 求解旋转板、壳振动问题的半解析有限元分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2002, 23(6): 585—588.
Li Yongqiang, Guo Xinghui, Liu Jie. Semi-analysis finite elements method of the vibration of revolve plates and shells [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2002, 23(6): 585—588. (in Chinese)
- [6] Khdeir A A, Reddy J N. An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams [J]. Composite Structures, 1997, 37(2): 195—203.
- [7] 周履, 王震鸣. 复合材料及其结构的力学进展[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1991.
Zhou Lu, Wang Zhenming. Advances in mechanics of complex materials and structures [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1991. (in Chinese)
- [8] Lee D, Waas A M. Stability analysis of a rotating multi-layer annular plate with a stationary frictional follower load [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1997, 39(10): 1117—1138.
- [9] Lee D, Waas A M, Karnopp B H. Analysis of a rotating multi-layer annular plate modeled via layerwise zig-zag theory: Free vibration and transient analysis [J]. Computers & Structures, 1998, 66(2/3): 313—335.
- [10] Song O, Jeong N H. Vibration and stability of pretwisted spinning thin-walled composite beams featuring bending-bending elastic coupling [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 273(3): 513—533.
- [11] Zhao X, Liew K M, Ng T Y. Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(2): 529—545.
- [12] Chandiramani Naresh K, Shete Chandrashekhar D, Librescu Liviu I. Vibration of higher-order-shearable pretwisted rotating composite blades [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2003, 45(3): 2017—2041.
- [13] 史亚杰, 洪杰, 吴炜. 复合材料转动壳体动力特性分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(1): 31—35.

Shi Yajie, Hong Jie, Wu Wei. Dynamic characteristic analysis of rotating composite shell [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(1): 31—35. (in Chinese)

- [14] Ugrimov S V. Generalized theory of multilayer plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(4): 819—839.
- [15] Huang X Y, Wang X, Yap F F. Feedback control of rotating disk flutter in an enclosure [J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, 19(7): 917—932.

附录:

方程(20)中矩阵元素分别表示如下:

$$M_{\hat{m}\hat{i}} = 2\pi \sum_{s=1}^S \rho^{(s)} h^{(s)} \Omega^2 h r_o \int_{\kappa}^1 [W_{mn}] W_{\hat{m}\hat{i}} r dr;$$

$$N_{\hat{m}\hat{i}} = 2\pi \sum_{s=1}^S \rho^{(s)} h^{(s)} \Omega^2 2n h r_o \int_{\kappa}^1 [W_{mn}] W_{\hat{m}\hat{i}} r dr;$$

$$[Q] = [Q^{31} \quad Q^{32}] \cdot \begin{bmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Q^{13} \\ Q^{23} \end{bmatrix} - [Q^{33}],$$

$$Q_{\hat{m}\hat{i}}^{11} = 2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[\frac{V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r^2} - \frac{\partial V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r \partial r} - \frac{\partial^2 V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{\partial^2 r} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr +$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1-\nu^{(s)}}{2} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[n^2 \frac{V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r^2} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr +$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} r_o \int_{\kappa}^1 [V_{\hat{m}\hat{i}}^1] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr,$$

$$Q_{\hat{m}\hat{i}}^{12} = 2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[-n \frac{V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r^2} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr +$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \nu^{(s)} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[n \frac{\partial V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r \partial r} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr +$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1-\nu^{(s)}}{2} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[-n \frac{V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r^2} + n \frac{\partial V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r \partial r} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr,$$

$$Q_{\hat{m}\hat{i}}^{13} = 2\pi \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} h \int_{\kappa}^1 \left[\frac{\partial W_{mn}}{\partial r} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr,$$

$$Q_{\hat{m}\hat{i}}^{21} = 2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[-n \frac{V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r^2} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr +$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \nu^{(s)} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[-n \frac{\partial V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r \partial r} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr +$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1-\nu^{(s)}}{2} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[-n \frac{V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r^2} - n \frac{\partial V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r \partial r} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr,$$

$$Q_{\hat{m}\hat{i}}^{22} = 2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[n^2 \frac{V_{\hat{m}\hat{i}}^1}{r^2} \right] V_{\hat{m}\hat{i}}^1 r dr +$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S B^{(s)} \frac{1-\nu^{(s)}}{2} \frac{1}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[\frac{V_{\theta mn}^1}{r^2} - \frac{\partial V_{\theta mn}^1}{r \partial r} - \frac{\partial^2 V_{\theta mn}^1}{\partial^2 r} \right] \cdot$$

$$V_{\theta mn}^1 r dr + 2\pi \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} r_o \int_{\kappa}^1 [V_{\theta mn}^1 |V_{\theta mn}^1| r dr,$$

$$Q_{mn}^{23} = 2\pi \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} h \int_{\kappa}^1 \left[n \frac{W_{mn}}{r} \right] V_{\theta mn}^1 r dr,$$

$$Q_{mn}^{31} = -2\pi \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} \int_{\kappa}^1 \left[\frac{V_{r mn}^1}{r} + \frac{\partial V_{r mn}^1}{\partial r} \right] W_{mn} r dr,$$

$$Q_{mn}^{32} = 2\pi \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} \int_{\kappa}^1 \left[n \frac{V_{\theta mn}^1}{r} \right] W_{mn} r dr,$$

$$Q_{mn}^{33} = 2\pi \sum_{s=1}^S C^{(s)} \frac{h}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[-\frac{\partial W_{mn}}{\partial r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{\partial W_{mn}}{\partial r} \frac{\partial u_0}{r \partial r} - \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial r^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} + n^2 \frac{W_{mn}}{r} \frac{u_0}{r^2} \right] W_{mn} r dr -$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S \rho^{(s)} h^{(s)} n^2 \Omega^2 h r_o \int_{\kappa}^1 [W_{mn}] W_{mn} r dr -$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S C^{(s)} \nu^{(s)} \frac{h}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[\left(\frac{\partial W_{mn}}{\partial r} - n \frac{W_{mn}}{r} \right) \frac{\partial u_0}{r \partial r} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial r^2} \frac{u_0}{r} \right] W_{mn} r dr - 2\pi \sum_{s=1}^S \xi G^{(s)} h^{(s)} \frac{h}{r_o} \int_{\kappa}^1 \left[\frac{\partial W_{mn}}{r \partial r} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial r^2} - n^2 \frac{W_{mn}}{r^2} \right] W_{mn} r dr;$$

$$A_{ij} = 2\pi \sum_{s=1}^S C^{(s)} \int_{\kappa}^1 \left[\frac{V_{rl}^0}{r^2} - \frac{\partial V_{rl}^0}{r \partial r} - \frac{\partial^2 V_{rl}^0}{\partial^2 r} \right] V_{rl}^0 r dr -$$

$$2\pi \sum_{s=1}^S \rho^{(s)} h^{(s)} \Omega^2 r_o^2 \int_{\kappa}^1 [V_{rl}^0] V_{rl}^0 r dr;$$

$$D_i = 2\pi \sum_{s=1}^S \rho^{(s)} h^{(s)} \Omega^2 r_o^2 \int_{\kappa}^1 [V_{rl}^0] r^2 dr_o$$