文章编号：1000-4750(2008)04-0001-04

双轴对称固支圆弧拱弯扭屈曲荷载的理论解

*杨永华[1,2]，陈以一[2]

(1. 上海师范大学建筑工程学院，上海 200234；2. 同济大学建筑工程系，上海 200092)

摘　要：在给出的考虑几何非线性情况下的弹性曲梁总势能的基础上，采用里兹法导出了固支圆弧拱在均匀受压和均匀受弯作用下的弯扭屈曲荷载的理论解，推导中考虑了翘曲刚度的影响。固支圆弧拱在径向均布荷载作用下，屈曲荷载随着拱圆心角的增大而逐渐减小，和简支拱不同，当圆心角为 180°时，屈曲荷载并不为零。在正弯矩或负弯矩作用下，固支圆弧拱的屈曲荷载都随着拱圆心角的增大而逐渐增大。该文给出了计算实例，并与其他研究者的结果进行了比较，证明了所得公式的正确性。

关键词：稳定；弯扭屈曲荷载；理论解；固支圆弧拱；总势能

中图分类号：TU323.3　　**文献标识码**：A

THEORETICAL SOLUTION FOR FLEXURAL-TORSIONAL BUCKLING LOAD OF FIXED-END CIRCULAR ARCHES WITH BIAXIALLY-SYMMETRIC CROSS-SECTIONS

*YANG Yong-hua[1,2] , CHEN Yi-yi[2]

(1. Architecture Engineering College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;

2. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the total potential energy of elastic curved beams by considering the geometrical nonlinearity, the theoretic solution for the flexural-torsional buckling load of fixed-end circular arches subjected to uniform compression and bending is deduced with the Retz method, taking the effects of warping rigidity into account. Under the uniform radial load, flexural-torsional buckling load of fixed-end circular arches decreases as the subtended angle increases, which is different from simply supported arches. Besides, the critical load of fixed-end circular arches has the non-trival solution at the subtended angle of 180°. Either positive or negative bending moments, could lead the flexural-torsional buckling load of fixed-end circular arches to increase as the subtended angle increases. Numerical examples are presented and compared with other researcher’s results. The equations obtained are verified.

Key words: stability; flexural-torsional buckling load; theoretical solution; fixed-end circular arches; total potential energy

拱是土木工程中比较常见的一种结构形式，例如一些弧形建筑的屋面受力构件、桥梁结构中的拱桥等。拱和直构件相比由于初始曲率的存在，使得其弯曲、扭转、翘曲的几何方程大都是相互耦合的，导致了其理论分析的复杂性。目前国内外许多学者在求解简支拱的屈曲荷载的理论解方面进行了大量的工作[1−6]，但对固支拱的弯扭屈曲荷载的研究较少。Pi Y L[7−8]比较系统地研究了拱、水平曲梁平面内和平面外的稳定问题，但采用位移空间分解的方法进行推导，空间几何关系复杂，很难直观理解。项海帆研究的固支拱的理论未考虑翘曲刚度的影响[9]。本文基于弹性曲梁考虑几何非线性的总势能，

收稿日期：2006-11-26；修改日期：2007-06-07

作者简介：*杨永华(1976－)，女，河南辉县人，讲师，博士，从事钢结构稳定研究(E-mail: yonghua1976@163.com)；
陈以一(1955－)，男，浙江天台人，教授，博士，从事钢结构研究(E-mail: yiyichen@mail.tongji.edu.cn).

采用里兹法给出了固支圆弧拱在均匀受压和均匀受弯作用下的弯扭屈曲荷载的理论解。为了验证本文理论推导的正确性，文中给出了数值实例加以验证。

1 里兹法求解固支圆弧拱的弯扭屈曲荷载

双轴对称截面拱发生平面外屈曲的总势能方程为[10]：

$$\begin{aligned}\Pi=\frac{1}{2}\int_0^S\Bigg\{&\left[EI_x\left(v''+\frac{\beta}{R}\right)^2+EI_\omega\left(\beta''-\frac{v''}{R}\right)^2\right]-\\&\frac{2EI_{xy\omega}}{R}\left(v''+\frac{\beta}{R}\right)\left(\beta''-\frac{v''}{R}\right)+GJ\left(\beta'-\frac{v'}{R}\right)^2+\\&2M_y\left(v''\beta+v'\beta'+\frac{\beta^2}{2R}\right)+W^c\beta'^2+\\&\left(N+\frac{M_y}{R}\right)v'^2-2\left(M_y+\frac{W^s}{R}\right)\beta'v'-\\&2(q_yv+m_z\beta)+q_xa_x\beta^2+q_ya_y\beta^2\Bigg\}\mathrm{dz}\end{aligned}\tag{1}$$

其中：x 轴、y 轴为截面形心主轴，x 指向拱轴平面外；v 为截面形心沿 y 坐标方向的位移，β 为绕截面剪心轴的转角，S 为拱轴线展开长度，R 为拱轴线曲率半径；q_x、q_y 分别为作用在 x 方向、y 方向的横向分布荷载；α_x、α_y 分别为作用在 x 方向、y 方向的横向分布荷载作用点与截面形心点距离；$I_x=\int_A y^2\mathrm{d}A$，$I_\omega=\int_A\omega^2\mathrm{d}A$，$I_{xy\omega}=\int_A xy\omega\mathrm{d}A$，$\omega$ 为截面的主扇性坐标；

$$W^s=\int_A\sigma_z((x-x_s)^2+(y-y_s)^2)\mathrm{d}A,$$

$$W^c=\int_A\sigma_z\left[(x-x_s)^2+\left(y-y_s-\frac{\omega}{R}\right)^2\right]\frac{R}{r}\mathrm{d}A,$$

分别为直梁和曲梁的华格纳系数；$N=\int_A\sigma_z\mathrm{d}A$，$M_x=\int_A y\sigma_z\mathrm{d}A$，$M_y=-\int_A x\sigma_z\mathrm{d}A$，$\sigma_z$ 为轴向正应力。

根据里兹法的概念，拱发生弯扭屈曲的标志是总势能 Π 具有极值，即：

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_i}=0\tag{2}$$

其中 c_i 是假定的位移函数中的参数。

1.1 均匀受压固支拱的弯扭屈曲荷载

两端固支拱在径向均布荷载作用下(图 1)，拱内只产生轴力 $N=qR$，为均匀受压的受力状态。此时，$M_x=M_y=B_\omega=q_z=0$，其中，$B_\omega=\int_A\omega\sigma_z\mathrm{d}A$，$q$ 为形心线上的径向分布荷载。

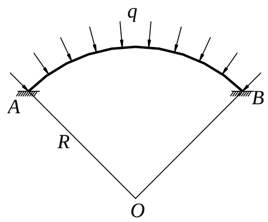

图 1 均匀受压

Fig.1 Uniform compression

取位移函数为：

$$v=c(1-\cos 2\mu z)\tag{3}$$

$$\beta=d(1-\cos 2\mu z)\tag{4}$$

其中，$\mu=\dfrac{n\pi}{S}$。所取的位移函数满足平面外固支的几何边界条件：$z=0$ 或 $z=S$ 时，$v=0$，$v'=0$，$\beta=0$，$\beta'=0$。将上述位移函数代入式(1)，可得到相应的总势能为：

$$\begin{aligned}\Pi=&EI_x\cdot S\left[\left(c\cdot4\mu^2-\frac{d}{R}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right]+\\&(EI_\omega4\mu^2+GJ)\cdot4\mu^2\left(d-\frac{c}{R}\right)^2\cdot\frac{S}{4}-\\&\frac{2EI_{xy\omega}}{R}\cdot4\mu^2\cdot\left(c\cdot4\mu^2-\frac{d}{R}\right)\left(d-\frac{c}{R}\right)\cdot\frac{S}{4}+\\&4\mu^2\cdot N\left(r_{0c}^2d^2+c^2-2\frac{r_0^2}{R}cd\right)\cdot\frac{S}{4}\end{aligned}\tag{5}$$

式中：r_0 为直梁绕截面形心的回转半径；r_{0c} 为曲梁构件参数，$r_{0c}=\sqrt{\left(I_x+I_y+\dfrac{I_\omega}{R^2}+\dfrac{2I_{xy\omega}}{R^2}\right)\Big/A}$。

由极值条件：

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c}=0,\quad\frac{\partial\Pi}{\partial d}=0\tag{6}$$

可得如下的特征方程：

$$\begin{aligned}&\left[EI_x\cdot4\mu^2+\frac{1}{R^2}(EI_\omega4\mu^2+GJ)+\right.\\&\left.\frac{EI_{xy\omega}}{R^2}\cdot8\mu^2+N\right]\cdot c-\frac{1}{R}(EI_x+EI_\omega4\mu^2+GJ+\\&EI_{xy\omega}\cdot4\mu^2+\frac{EI_{xy\omega}}{R^2}+Nr_0^2\Bigg)\cdot d=0\end{aligned}\tag{7}$$

$$-\frac{1}{R}\Bigg(EI_x+EI_\omega4\mu^2+GJ+EI_{xy\omega}\cdot4\mu^2+\frac{EI_{xy\omega}}{R^2}+$$

$$Nr_0^2)\cdot c+\left(\frac{3EI_x}{R^2 4\mu^2}+GJ+EI_\omega\cdot 4\mu^2+\frac{2EI_{xy\omega}}{R^2}+Nr_{0c}^2\right)\cdot d=0 \tag{8}$$

为了求 c、d 的非零解，须使特征方程的系数行列式为零，展开可得到关于临界荷载的二次方程：

$$AN^2+BN+C=0 \tag{9}$$

式中：

$$A=r_{0c}^2-\frac{r_0^4}{R^2} \tag{10}$$

$$B=EI_x\left(\frac{3}{4R^2\mu^2}+r_0^2\cdot 4\mu^2-\frac{2r_0^2}{R^2}\right)+\left(EI_\omega 4\mu^2+GJ+\frac{2EI_{xy\omega}}{R^2}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right) \tag{11}$$

$$C=\frac{2}{R^2}(EI_x)^2+\left(4\mu^2+\frac{3}{4R^4\mu^2}-\frac{2}{R^2}\right)\cdot EI_x\cdot(EI_\omega 4\mu^2+GJ)+\frac{4}{R^4}EI_x\cdot EI_{xy\omega}-\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{R^2}-4\mu^2\right)^2(EI_{xy\omega})^2 \tag{12}$$

当 $n=1$ 时，求解方程(9)，其中较小根即为均匀受压固支拱的弯扭屈曲荷载。

1.2 均匀受弯固支拱的弯扭屈曲荷载

对于平面内简支，平面外固支的拱在两端等弯矩作用下(如图 2、图 3 所示)，拱内只产生均匀弯矩，此时 $N=0$、$M_x=B_\omega=0$、$q_x=q_y=m_z=0$、$M_y=M$。取式(3)、式(4)的位移函数代入式(1)，

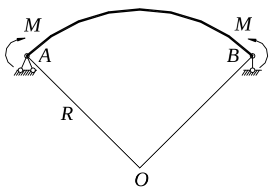

图 2 正弯矩

Fig.2 Arch subjected to positive bending moments

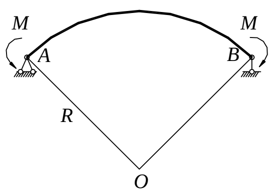

图 3 负弯矩

Fig.3 Arch subjected to negative bending moments

可得到相应的总势能为：

$$\Pi=EI_x\cdot S\left[\left(c\cdot 4\mu^2-\frac{d}{R}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right]+(EI_\omega 4\mu^2+GJ)\cdot 4\mu^2\left(d-\frac{c}{R}\right)^2\cdot\frac{S}{4}-\frac{2EI_{xy\omega}}{R}\cdot 4\mu^2\cdot\left(c\cdot 4\mu^2-\frac{d}{R}\right)\left(d-\frac{c}{R}\right)\frac{S}{4}-4\mu^2 cd\frac{S}{2}M+\left(\frac{3}{2}+\frac{I_{xy\omega}}{I_y}4\mu^2\right)\frac{S}{2R}d^2M+4\mu^2\frac{S}{4R}c^2M \tag{13}$$

代入极值条件式(6)，可得如下的特征方程：

$$\left[EI_x\cdot 4\mu^2+\frac{1}{R^2}(EI_\omega 4\mu^2+GJ)+\frac{EI_{xy\omega}}{R^2}\cdot 8\mu^2+\frac{M}{R}\right]c-\frac{1}{R}\left(EI_x+EI_\omega 4\mu^2+GJ+EI_{xy\omega}\cdot 4\mu^2+\frac{EI_{xy\omega}}{R^2}+RM\right)\cdot d=0 \tag{14}$$

$$-\frac{1}{R}\left(EI_x+EI_\omega 4\mu^2+GJ+EI_{xy\omega}\cdot 4\mu^2+\frac{EI_{xy\omega}}{R^2}+RM\right)\cdot c+\left[\frac{3EI_x}{R^2 4\mu^2}+GJ+EI_\omega\cdot 4\mu^2+\frac{2EI_{xy\omega}}{R^2}+\left(\frac{3}{4\mu^2}+\frac{2I_{xy\omega}}{I_y}\right)\frac{1}{R}M\right]\cdot d=0 \tag{15}$$

为了求 c、d 的非零解，须使特征方程的系数行列式为零，展开可得到关于临界荷载的二次方程：

$$AM^2+BM+C=0 \tag{16}$$

式中：

$$A=\frac{3}{4\mu^2R^2}-1 \tag{17}$$

$$B=\frac{1}{R}(EI_x+EI_\omega 4\mu^2+GJ+2EI_{xy\omega}4\mu^2)\cdot\left(\frac{3}{4\mu^2R^2}-1\right)+\frac{2EI_x}{R} \tag{18}$$

$$C=\frac{2}{R^2}(EI_x)^2+\left(4\mu^2+\frac{3}{4R^4\mu^2}-\frac{2}{R^2}\right)\cdot EI_x\cdot(EI_\omega 4\mu^2+GJ)+\frac{4}{R^4}EI_x\cdot EI_{xy\omega}-\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{R^2}-4\mu^2\right)^2(EI_{xy\omega})^2 \tag{19}$$

当 $n = 1$ 时，求解方程(16)，即可得到最小的弯扭屈曲临界弯矩。方程有两个根，正根对应于两端受正弯矩的情况(图 2)；负根对应于两端受负弯矩的情况(图 3)。

2 算例

采用 Pi Y L 论文[7]中的算例，工字形截面，如图 4 所示，B=151mm, H=261.3mm, t_f=12.3mm, $t_w = 7.7$mm, $S = 4000$mm, $E = 200000$ N/mm^2, $G = 80000$N/mm^2。

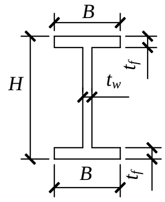

图 4 截面示意图

Fig.4 Schematic cross section

图 5 给出了固支拱受径向均布荷载作用下的屈曲荷载随圆心角的变化曲线。图 5 中横坐标为拱圆心角，纵坐标为固支拱的屈曲荷载和相应固支轴心直杆的弯曲屈曲荷载 P_x 的比值，其中：

$$P_x = \frac{\pi^2}{(S/2)^2} EI_x \tag{20}$$

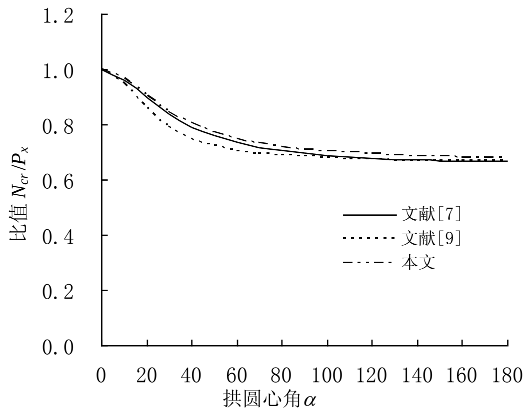

图 5 均匀受压固支拱的弯扭屈曲荷载

Fig.5 Flexural-torsional buckling of fixed-end arches subjected to uniform compression

从图 5 中可看出本文和 Pi Y L 的理论分析结果比较接近。文献[9]的结果未考虑翘曲刚度的影响，在圆心角小于 90^o 时，结果较本文的结果小，当圆心角较大时，趋近本文的理论解。说明随着圆心角的增大，翘曲刚度的影响也越来越小。固支拱在径向均布荷载作用下，屈曲荷载随着拱圆心角的增大而逐渐减小，当圆心角为 180^o 时，屈曲荷载并不为零，N_{cr} / P_x 的比值趋近一常数。

图 6 给出了平面外固支拱分别在两端相等的正弯矩作用下和负弯矩作用下的屈曲荷载随圆心角的变化曲线，截面尺寸和材料属性同上所述，拱轴线展开长度为 $S = 3000$mm。图 6 中横坐标为拱圆心角，纵坐标为拱的屈曲荷载和均匀受弯固支梁的弯扭屈曲荷载 M_{cr0} 的比值，其中：

$$M_{cr0} = \frac{\pi}{S/2}\sqrt{\left(EI_{\omega}\left(\frac{\pi}{S/2}\right)^2 + GJ\right)EI_x} \tag{21}$$

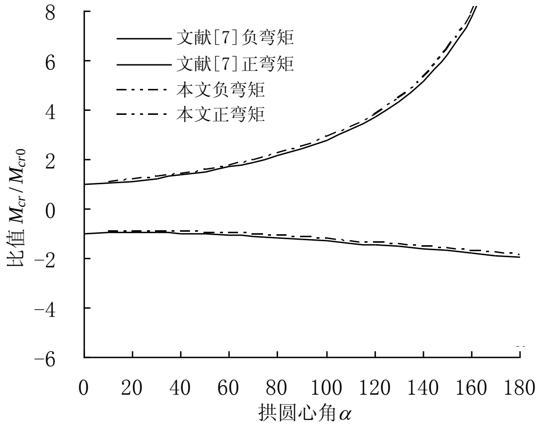

图 6 均匀受弯固支拱的弯扭屈曲荷载

Fig.6 Flexural-torsional buckling of fixed-end arches subjected to uniform bending

从图 6 中可看出，平面外固支拱在两端相等的弯矩作用下，本文和 Pi Y L 的理论分析结果比较接近。和简支拱不同，无论在正弯矩还是负弯矩作用下，固支拱的屈曲荷载都随着拱圆心角的增大而逐渐增大。

3 结语

本文在给出的考虑几何非线性情况下弹性曲梁的总势能的基础上，采用里兹法导出了固支圆弧拱在均布径向荷载和两端等弯矩荷载作用下的弯扭屈曲荷载的理论解。通过数值算例的比较验证了所推导公式的正确性。

(参考文献转第 20 页)