

文章编号: 1000-4750(2007)Sup.II-0155-06

# 改型等强度壳的理论与应用

\*白雪飞<sup>1</sup>, 任文敏<sup>2</sup>, 郭日修<sup>1</sup>

(1. 海军工程大学船舶与海洋工程系, 湖北, 武汉 430033; 2. 清华大学航天航空学院工程力学系, 北京 100084)

**摘 要:** 提出一种新型连接结构: 在相邻的两段不同直径圆柱壳之间嵌入一段“改型等强度壳”, 构成“柱-改型-柱”组合壳, 使得两段不同直径的圆柱壳光顺地连接, 可以大幅度降低结合部的局部弯曲应力。应用旋转壳有矩理论分析了这些组合壳的应力分布, 对其工程应用——作为连接结构的“改型等强度壳”几何参数的选择提出了建议。

**关键词:** 旋转壳; 应力分析; 有矩理论; 改型等强度壳; 连接结构; 工程应用

**中图分类号:** O344.3 **文献标识码:** A

## THEORY AND ENGINEERING APPLICATION OF MODIFIED SHELL OF CONSTANT STRENGTH

\*BAI Xue-fei<sup>1</sup>, REN Wen-min<sup>2</sup>, GUO Ri-xiu<sup>1</sup>

(1. Department of Naval Architecture &amp; Ocean Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033, China;

2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** A new type of connecting structure—modified shell of constant strength is presented. By using this type of connecting structure, two adjacent cylindrical shells of different diameter can be smoothly connected and the bending stress at the conjunction section can be reduced significantly. Then, based on bending theory of shells of revolution, the stress distribution is analyzed for the combined shell named “cylinder-modified-cylinder”, composed of two cylindrical shells of different diameters connected by a modified shell of constant strength. As for engineering application, the modified equicohesive shell can be used as a connecting structure and some recommendations on the choice of the geometrical parameters are proposed.

**Key words:** shell of revolution; stress analysis; bending theory; modified shell of constant strength; connecting structure; engineering application

在潜艇耐压船体或化工压力容器中经常出现不同直径圆柱壳之间的连接, 通常采用锥壳连接, 形成锥-柱结合壳, 由于连接部位存在结构的突变, 会产生较大的应力集中, 这使得连接部位成为整个结构的薄弱环节。采取什么样的连接形式才能有效的降低连接处应力集中峰值, 成为从事压力容器和潜艇结构的设计人员广泛关注的课题。本文以“Tölke 型等强度壳”为基础, 提出一种新型连接结构——“改型等强度壳”, 用于光顺地连接两段不同直径的旋转壳, 如此可大幅度降低结合部的局部

弯曲应力。本文应用旋转壳有矩理论, 对用“改型等强度壳”连接两不同直径圆柱壳所构成的“柱-改型-柱”组合壳进行了应力分析, 并对其工程应用——作为连接结构的“改型等强度壳”几何参数的选择提出了建议。

### 1 Tölke 型等强度壳简介和改型等强度壳的构建

等强度旋转壳是指在弹性条件下, 旋转壳各点

收稿日期: 2007-03-12; 修改日期: 2007-11-05

作者简介: \*白雪飞(1977), 男, 湖北武汉人, 讲师, 博士, 从事船舶结构力学和潜艇结构强度研究(E-mail: baix\_f@163.com);

任文敏(1937), 男, 江苏江都人, 教授, 博导, 从事板壳力学和弹塑性固体力学研究;

郭日修(1924), 男, 江西南昌人, 教授, 博导, 从事船舶结构力学和潜艇结构强度研究.

应力保持均匀的旋转壳<sup>[1~12]</sup>, 壳内应力满足:

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \sigma_0 \quad (1)$$

式中:  $\sigma_\varphi$  为旋转壳子午线方向薄膜应力;  $\sigma_\theta$  为环向薄膜应力;  $\sigma_0$  为设计应力。

Tölke<sup>[13]</sup>采用解析的方法推导了均布压力作用下开口的等强度旋转壳通解, 这种等强度旋转壳的母线方程为:

$$\eta = \int_1^\xi \frac{(\xi^2 + \omega)}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2 - \omega^2)}} d\xi \quad (2)$$

式中:  $\omega$  为形状因子, 其意义将在后面阐述。设  $r$  为等强度旋转壳母线上点的半径,  $r_A$  为大端半径,  $x$  为沿轴线坐标,  $\xi$ 、 $\eta$  为无量纲量:

$$\xi = r/r_A, \quad \eta = x/r_A \quad (3)$$

这种旋转壳的母线形状如图 1。

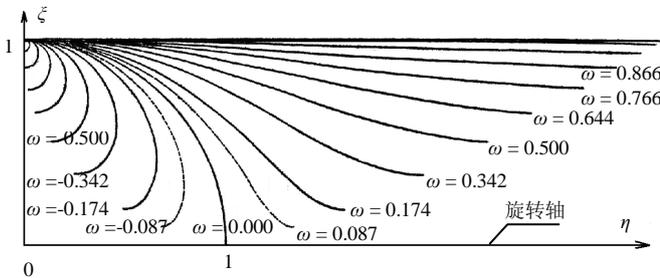


图 1 均布压力下等强度壳母线形状

Fig.1 Generating line of the shell of constant strength of revolution subjected to uniformly distributed pressure

当形状因子  $\omega$  在  $0 < \omega < 1$  范围(图 1), 其对应的所有等强度旋转壳的形状有一个共同特点, 即母线两端点的切线均与旋转轴平行, 因此这种形状的旋转壳可用来光顺地连接不同直径的两段端点切线与轴线平行的旋转壳(如: 圆柱壳)。这种几何形状的等强度旋转壳由 Tölke 提出<sup>[1]</sup>, 故称之为“Tölke 型等强度壳”。Tölke 型等强度壳自身不封闭, 不能用作压力容器, 但可作为连接结构, 光顺地连接不同直径的旋转壳。设 Tölke 型等强度壳小端和大端半径比为  $\beta$ , 由文献[1]知  $\beta = \omega$ , 故 Tölke 型等强度壳线型由  $\beta$  唯一确定。从 Tölke 型等强度壳段长度的变化(表 1)可知, 当  $\beta = 0.75 \sim 0.90$  时, Tölke 型等强度壳长度( $L$ )约为其小端半径( $r_B$ )的 3 倍~4 倍。

表 1  $L/r_B$  随  $\beta$  的变化

Table 1 Values of  $L/r_B$  varying with respect to  $\beta$

$\beta$	0.75	0.80	0.85	0.90
$L/r_B$	3.646	3.523	3.413	3.314

对于输液、输气管道, 管道自身长度很长, 因此连接不同管径的连接结构的长度, 一般不受限制, Tölke 型等强度壳在这些领域可以广泛应用, 该内容将另文讨论。而对于潜艇耐压船体、化工工业压力容器等, 受耐压船体或压力容器总长度的限制, 连接结构的长度不能太长, 这限制了 Tölke 型等强度壳在上述领域的应用。为拓宽 Tölke 型等强度壳的应用范围, 作者提出一种新型的连接结构——“改型等强度壳”(简称“改型壳”)。改型壳是通过适当缩短 Tölke 型等强度壳的轴向长度得到的, 其过程如下(见图 2)。

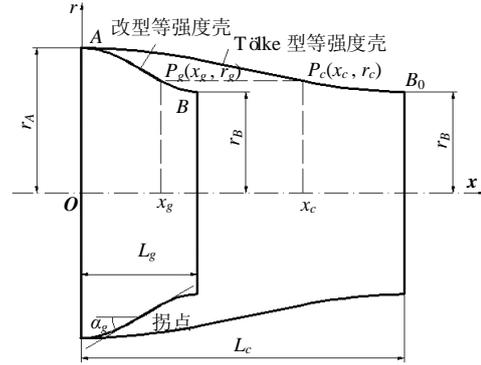


图 2 Tölke 型等强度壳的“改型”

Fig.2 Modification of Tölke type shell of constant strength

建立如图 2 所示坐标系, 将 Tölke 型等强度壳母线上任意一点  $P_c(x_c, r_c)$ , 转变为点  $P_g(x_g, r_g)$ , 使满足如下关系:

$$\text{当 } \frac{x_c}{L_c} = \frac{x_g}{L_g} \text{ 时, } r_c = r_g \quad (4)$$

Tölke 型等强度壳母线上每一点都进行上述变换后, 其长度由  $L_c$  变为  $L_g$ , Tölke 型等强度壳即转变为“改型壳”。

由上述改型过程可知, 改型壳的形状由  $\beta$  和  $L_g$  共同确定。设改型壳拐点处切线倾角为  $\alpha_g$ , 在  $\beta$  值一定时,  $L_g$  与改型壳拐点处切线倾角  $\alpha_g$  是对应的, 故改型壳的形状也可由  $\beta$  和  $\alpha_g$  共同确定。

定义无量纲参数:  $K_c = L_g / L_c$ , 由 Tölke 型等强度壳母线方程式(2)可得出改型壳母线方程为:

$$\eta = K_c \cdot \int_1^\xi \frac{(\xi^2 + \beta)}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2 - \beta^2)}} d\xi \quad (5)$$

从而得出改型壳母线的法线与旋转轴夹角  $\varphi$  和母线方向无量纲主曲率半径  $\rho_s$  的表达式为:

$$\varphi = \pi - \arctan\left(\frac{(\xi^2 + \beta)}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2 - \beta^2)}}\right) \quad (6)$$

$$\rho_s = \frac{r_1}{r_A} = \frac{[(1-\xi^2) \cdot (\xi^2 - \beta^2) + K_c^2 \cdot (\xi^2 + \beta)^2]^{\frac{3}{2}}}{K_c \xi (\xi^2 - \beta) \cdot (\beta + 1)^2} \quad (7)$$

式中,  $r_1$  为改型壳母线方向主曲率半径。由式(5)可以看出, 在改型壳端点  $A(\xi=1)$ 、 $B(\xi=\beta)$  处满足:  $\varphi = \pi/2$ , 这表明改型壳的形状与 Töke 型等强度壳的形状有共同的特点——两 endpoint 处切线均与旋转轴平行。改型壳形状的这一特点, 使得它也可用作连接结构, 光顺地连接不同直径的两段端点切线与旋转轴平行的旋转壳。

假设改型壳无量纲长度为:  $\bar{L}_g = L_g / r_B$ ,  $\bar{L}_g$  随参数  $\beta$  和  $\alpha_g$  的变化而变化(表 2), 当  $\beta$  和  $\alpha_g$  增大时,  $\bar{L}_g$  随之减小。

表 2 改型壳段长度  $\bar{L}_g$  随  $\beta$  和  $\alpha_g$  的变化

Table 2 Length of modified shell of constant strength  $\bar{L}_g$  varying with respect to  $\beta$  and  $\alpha_g$

$\alpha_g$	改型壳段长度			
	$\beta=0.75$	$\beta=0.80$	$\beta=0.85$	$\beta=0.90$
$10^\circ$	2.985	2.234	1.575	0.991
$15^\circ$	1.964	1.470	1.036	0.652
$20^\circ$	1.446	1.082	0.763	0.480
$25^\circ$	1.129	0.845	0.595	0.375
$30^\circ$	0.912	0.682	0.481	0.303

## 2 改型壳与两段不同直径的圆柱壳相连接时的应力分析

改型壳光顺连接两段不同直径旋转壳构成的组合壳如图 3 所示, 设载荷为均布内压  $p$ 。

定义旋转壳单元中面的内力、内力矩及外载荷的正方向如图 4。假设  $s$  为沿母线方向坐标,  $\theta$  为环向角坐标,  $x$  为沿旋转轴的坐标,  $r_1$ 、 $r_2$  分别为母线方向和环向主曲率半径。  $r$  为母线上点的半径,  $\varphi$  为母线的法线与旋转轴的夹角。

改型壳在两端分别与两段圆柱壳(I 分段、II 分段)光顺连接, 故改型壳  $A$ 、 $B$  处法线倾角  $\varphi_A = \varphi_B =$

$\pi/2$ (如图 3)。假设各分段壳板厚度均相同, 并假定  $L_I$  和  $L_{II}$  较长, 不考虑 I 分段左端边界和 II 分段右端边界对  $A$ 、 $B$  处弯曲应力的影响, 即满足:  $L_I > \delta_A$ 、 $L_{II} > \delta_B$ ,  $\delta_A$ 、 $\delta_B$  的表达式分别为<sup>[14]</sup>:

$$\delta_A = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{t \cdot r_A}}, \quad \delta_B = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{t \cdot r_B}} \quad (8)$$

式中  $\mu$  为泊松比。

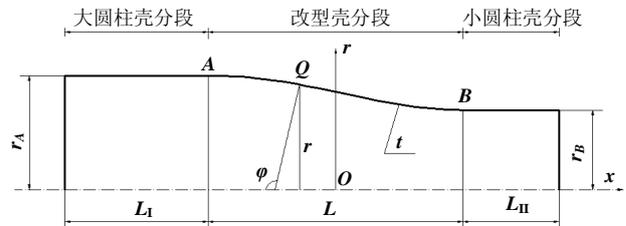


图 3 改型壳光顺连接两段不同直径圆柱壳

Fig.3 Two cylindrical shells of different diameter smoothly connected by modified shell of constant strength

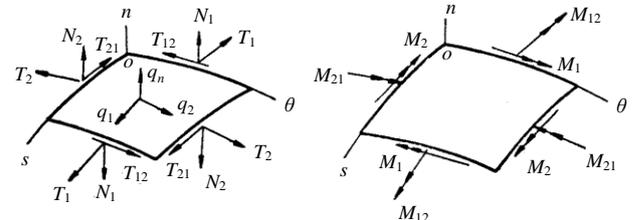


图 4 壳单元中面内力、内力矩和外载荷定义

Fig.4 Definition of inner forces, inner moments and load of shell element

旋转壳的内力解由薄膜应力状态和弯曲应力状态两部分的内力解组成, 假设薄膜应力状态的内力和位移变量用上标  $m$  标识, 弯曲应力状态的内力和位移变量用上标  $b$  标识, 下文将分别讨论薄膜应力状态和弯曲应力状态的内力求解。

### 2.1 组合壳各分段薄膜应力状态内力和位移的求解

根据旋转壳薄膜理论, 可得出在均布内压作用下, 改型等强度壳连接两不同直径圆柱壳时, 组合壳各分段薄膜应力状态的内力和位移(推导过程略), 如表 3。需要说明的是, 改型壳主要应用于对

表 3 结合部  $A$  点、 $B$  点处薄膜内力和位移

Table 3 Membrane force and displacement at conjunction region

位置		$T_1^m$	$T_2^m$	$w^m$
A	改型壳	$pr_A / 2$	$pr_A [1 - r_A / (2r_{1A})]$	$[1 - \mu/2 - r_A / (2r_{1A})] pr_A^2 / (Et)$
	大圆柱	$pr_A / 2$	$pr_A$	$(1 - \mu/2) pr_A^2 / (Et)$
B	改型壳	$pr_B / 2$	$pr_B [1 - r_B / (2r_{1B})]$	$[1 - \mu/2 - r_B / (2r_{1B})] pr_B^2 / (Et)$
	小圆柱	$pr_B / 2$	$pr_B$	$(1 - \mu/2) pr_B^2 / (Et)$

注:  $r_{1A}$ 、 $r_{1B}$  分别为  $A$  点、 $B$  点处改型壳母线方向主曲率半径。

连接结构长度要求较严的一类压力容器, 故在“柱-改型-柱”组合壳计算模型中, 假想其两端设有端盖以构成封闭的压力容器。

## 2.2 组合壳各分段弯曲应力状态内力和位移的求解

定义  $s$  为组合壳上某点与左端点之间母线的弧长,  $s_A$ 、 $s_B$  分别为改型壳与两段旋转壳的结合部 A、B 与左端点之间母线的弧长。假设 A、B 处的弯矩和横剪力分别为:  $M_{1A}^b$ 、 $M_{1B}^b$ 、 $N_{1A}^b$ 、 $N_{1B}^b$ , 若将组合壳划分为 3 个分段——大圆柱壳分段(分段 I,  $s \leq s_A$ )、改型壳分段( $s_A \leq s \leq s_B$ )和小圆柱壳分段(分段 II,  $s \geq s_B$ ),  $M_{1A}^b$ 、 $M_{1B}^b$ 、 $N_{1A}^b$ 、 $N_{1B}^b$  可看作 3 个分段的边界力。3 个分段弯曲应力状态的内力和位移可用  $M_{1A}^b$ 、 $M_{1B}^b$ 、 $N_{1A}^b$ 、 $N_{1B}^b$  表示<sup>[14]</sup>, 其中法向位移  $w^b$  和子午面内转角  $\gamma^b$  表达式为:

1) 大圆柱壳分段( $s \leq s_A$ )

$$w^b = \frac{1}{2D\delta_A^3} \{-N_{1A}^b e^{\delta_A(s-s_A)} \cos \delta_A(s-s_A) + \delta_A M_{1A}^b \cdot e^{\delta_A(s-s_A)} [\cos \delta_A(s-s_A) + \sin \delta_A(s-s_A)]\} \quad (9)$$

$$\gamma^b = -\frac{1}{2D\delta_A^2} \{N_{1A}^b e^{\delta_A(s-s_A)} [\cos \delta_A(s-s_A) - \sin \delta_A(s-s_A)] - 2\delta_A M_{1A}^b e^{\delta_A(s-s_A)} \cos \delta_A(s-s_A)\} \quad (10)$$

2) 小圆柱壳分段( $s \geq s_B$ )

$$w^b = \frac{1}{2D\delta_B^3} \{N_{1B}^b e^{-\delta_B(s-s_B)} \cos \delta_B(s-s_B) + \delta_B M_{1B}^b e^{-\delta_B(s-s_B)} [\cos \delta_B(s-s_B) - \sin \delta_B(s-s_B)]\} \quad (11)$$

$$\gamma^b = -\frac{1}{2D\delta_B^2} \{N_{1B}^b e^{-\delta_B(s-s_B)} [\cos \delta_B(s-s_B) + \sin \delta_B(s-s_B)] + 2\delta_B M_{1B}^b e^{-\delta_B(s-s_B)} \cos \delta_B(s-s_B)\} \quad (12)$$

3) 改型壳分段( $s_A \leq s \leq s_B$ )

$$w^b = \frac{1}{2D\delta_A^3} \{N_{1A}^b e^{-\delta_A(s-s_A)} \cos \delta_A(s-s_A) + \delta_A M_{1A}^b e^{-\delta_A(s-s_A)} [\cos \delta_A(s-s_A) - \sin \delta_A(s-s_A)]\} + \frac{1}{2D\delta_B^3} \{-N_{1B}^b e^{\delta_B(s-s_B)} \cos \delta_B(s-s_B) + \delta_B M_{1B}^b e^{\delta_B(s-s_B)} [\cos \delta_B(s-s_B) + \sin \delta_B(s-s_B)]\} \quad (13)$$

$$\gamma^b = -\frac{1}{2D\delta_A^2} \{N_{1A}^b e^{-\delta_A(s-s_A)} [\cos \delta_A(s-s_A) + \sin \delta_A(s-s_A)] + 2\delta_A M_{1A}^b e^{-\delta_A(s-s_A)} \cos \delta_A(s-s_A)\} -$$

$$\frac{1}{2D\delta_B^2} \{N_{1B}^b e^{\delta_B(s-s_B)} [\cos \delta_B(s-s_B) - \sin \delta_B(s-s_B)] - 2\delta_B M_{1B}^b \cdot e^{\delta_B(s-s_B)} \cos \delta_B(s-s_B)\} \quad (14)$$

同理还可得出由边界内力表示的内力分量, 具体形式见文献[15]。

在改型壳与分段 I 和分段 II 的结合部 A、B 点, 相邻两段旋转壳的位移需满足如下连续条件(其中, 下标“I”、“II”分别代表分段 I、II, “改”代表改型壳):

1) A 点法向位移连续:

$$w_{AI}^m + w_{AI}^b = w_{A改}^m + w_{A改}^b \quad (15)$$

2) A 点转角连续:

$$\gamma_{AI}^b = \gamma_{A改}^b \quad (16)$$

3) B 点法向位移连续:

$$w_{BII}^m + w_{BII}^b = w_{B改}^m + w_{B改}^b \quad (17)$$

4) B 点转角连续:

$$\gamma_{BII}^b = \gamma_{B改}^b \quad (18)$$

利用这些连续条件, 结合薄膜应力状态和弯曲应力状态的位移表达式, 可求解出结合部弯矩和横剪力  $M_{1A}^b$ 、 $M_{1B}^b$ 、 $N_{1A}^b$ 、 $N_{1B}^b$ 。运用由边界力表示的各分段弯曲应力状态内力和位移的表示式, 可得出各分段弯曲应力状态的内力和位移, 具体形式见文献[15]。

## 2.3 组合壳应力状态的求解和应力的无量纲化

综合薄膜应力状态和弯曲应力状态的内力解, 可得出组合壳完整的内力解  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $M_1$ 、 $M_2$ , 从而各点外表面纵向应力  $\sigma_{1外}$ 、内表面纵向应力  $\sigma_{1内}$  和中面环向应力  $\sigma_2^0$  为:

$$\sigma_{1外} = \frac{T_1}{t} - \frac{6M_1}{t^2} \quad \sigma_{1内} = \frac{T_1}{t} + \frac{6M_1}{t^2} \quad \sigma_2^0 = \frac{T_2}{t} \quad (19)$$

为便于比较和分析, 以改型壳小端半径  $r_B$  和厚度  $t$  为基础, 将应力结果无量纲化, 定义如下无量纲参数:

1) 无量纲应力:

$$\bar{\sigma}_{1外} = \frac{\sigma_{1外}}{pr_B/t} \quad \bar{\sigma}_{1内} = \frac{\sigma_{1内}}{pr_B/t} \quad \bar{\sigma}_2^0 = \frac{\sigma_2^0}{pr_B/t} \quad (20)$$

2) 无量纲坐标:

$$\bar{x} = x/r_B \quad (21)$$

## 2.4 “柱-改型-柱”组合壳应力分析

保持小柱壳半径  $r_B$  和壳板厚度  $t$  不变, 分别取半径比  $\beta=0.75$ 、 $\beta=0.80$ 、 $\beta=0.85$ 、 $\beta=0.90$ , 拐点倾

角  $\alpha_g=10^\circ$ 、 $\alpha_g=15^\circ$ 、 $\alpha_g=20^\circ$ 、 $\alpha_g=25^\circ$ 、 $\alpha_g=30^\circ$ ，可得出一系列“柱-改型-柱”组合壳。利用上述方法求解这些“柱-改型-柱”组合壳的应力分布，并将其无量纲化。 $\beta=0.80$  时“柱-改型-柱”组合壳应力分布如图 5、图 6，假设轴向坐标原点  $O$  在改型壳轴向长度中点。改型壳段的坐标范围为： $\alpha_g=10^\circ$ ， $-1.117 \leq \bar{X} \leq 1.117$ ； $\alpha_g=15^\circ$ ， $-0.735 \leq \bar{X} \leq 0.735$ ； $\alpha_g=20^\circ$ ， $-0.541 \leq \bar{X} \leq 0.541$ ； $\alpha_g=25^\circ$ ， $-0.422 \leq \bar{X} \leq 0.422$ ； $\alpha_g=30^\circ$ ， $-0.341 \leq \bar{X} \leq 0.341$ 。

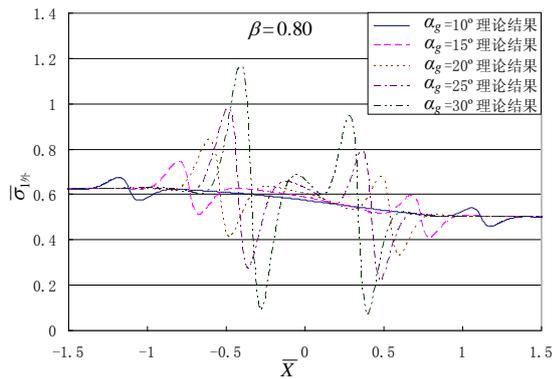


图 5  $\beta=0.80$ ，改变  $\alpha_g$  “柱-改型-柱”组合壳  $\bar{\sigma}_{1^{\text{外}}}$  分布  
Fig.5 Distribution of  $\bar{\sigma}_{1^{\text{外}}}$  of the combined shell varying with respect to  $\alpha_g$ , when  $\beta=0.80$

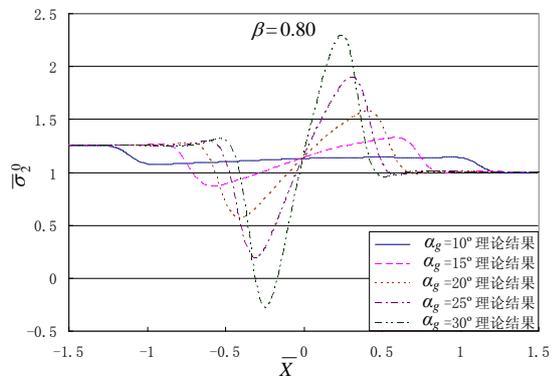


图 6  $\beta=0.80$ ，改变  $\alpha_g$  “柱-改型-柱”组合壳  $\bar{\sigma}_2^0$  分布  
Fig.6 Distribution of  $\bar{\sigma}_2^0$  of the combined shells varying with respect to  $\alpha_g$ , when  $\beta=0.80$

由图 5 和图 6 可知“柱-改型-柱”组合壳最大表面纵向应力( $\bar{\sigma}_{1^{\text{外}}\text{max}}$ 、 $\bar{\sigma}_{1^{\text{内}}\text{max}}$ )出现在大圆柱壳与改型壳结合部附近，除  $\alpha_g \leq 15^\circ$  情形外，最大中面环向应力  $\bar{\sigma}_{2^{\text{max}}}^0$  出现在改型壳段与小圆柱壳邻近的部位。

当代工程实践中，不同直径圆柱壳之间常用圆锥壳连接，构成“柱-锥-柱”组合壳，为研究“柱-改型-柱”组合壳应力分布的优劣，与“柱-改型-柱”组合壳相对应，建立一系列“柱-锥-柱”组合壳计算模型，使圆锥壳小端与大端半径比与改型壳参数  $\beta$  相等，圆锥壳半锥角与改型壳拐点倾角  $\alpha_g$  相等。

“柱-锥-柱”组合壳最大应力通常出现在锥、柱结合点上，采用文献[16]理论公式计算，具体形式如表 4，参照本文 2.3 节方法将计算得到的“柱-锥-柱”组合壳最大应力无量纲化，并与“柱-改型-柱”组合壳最大应力进行比较，结果见表 5。

“柱-锥-柱”组合壳由于凸/凹锥柱结合部母线倾角不连续，该部位存在很高的应力集中。由上述最大应力值的比较可知，“柱-改型-柱”组合壳最大表面纵向应力大大低于“柱-锥-柱”组合壳，除了极少数参数( $\beta=0.90$ ， $\alpha_g=30^\circ$ )外，“柱-改型-柱”组合壳最大中面环向应力也明显优于“柱-锥-柱”组合壳。这说明改型壳作为连接结构大大削减了结合部应力峰值，其力学性能显著优于用锥壳作为连接结构。

作为两段不同直径圆柱壳之间的连接结构，一方面希望尽可能降低应力峰值；一方面希望尽可能缩短连接结构长度。从上述应力变化规律可见，采用改型壳连接两段不同直径的圆柱壳， $\beta$  越小、 $\alpha_g$  越小，其应力水平越低。结合改型壳长度变化规律(见表 2)，作者认为，采用改型壳作为两段不同直径圆柱壳的连接结构，比较有利的适用范围是：小端与大端半径比  $\beta \leq 0.85$ ，改型壳的倾角  $\alpha_g$  在  $15^\circ \leq \alpha_g \leq 25^\circ$  范围。

表 4 凸/凹锥柱结合部应力计算公式

Table 4 Equation of stress calculation for the joint section of convex / concave cone-cylinder shell combination

	凸锥柱结合部	凹锥柱结合部
$\sigma_{1^{\text{外}}}$	$[1 - 1.165\sqrt{R/t} \tan(\alpha_g)]pR/(2t)$	$[1 + 1.165\sqrt{R/t} \tan(\alpha_g)]pR/(2t)$
$\sigma_{1^{\text{内}}}$	$[1 + 1.165\sqrt{R/t} \tan(\alpha_g)]pR/(2t)$	$[1 - 1.165\sqrt{R/t} \tan(\alpha_g)]pR/(2t)$
$\sigma_2^0$	$[1 - 0.321\sqrt{R/t} \tan(\alpha_g)]pR/t$	$[1 + 0.321\sqrt{R/t} \tan(\alpha_g)]pR/t$

注：表中  $R$  为与锥柱结合部相邻柱壳半径， $t$  为壳板厚度。

表5 “柱-改型-柱”组合壳与“柱-锥-柱”组合壳最大应力的比较

Table 5 Comparison of the Maximum stress of two different type of combined shell

$\beta$		$\alpha_g=10^\circ$		$\alpha_g=15^\circ$		$\alpha_g=20^\circ$		$\alpha_g=25^\circ$		$\alpha_g=30^\circ$	
		①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
0.75	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}$	0.708	1.478	0.763	1.986	0.844	2.519	0.958	3.315	1.112	4.264
	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}^0$	0.708	2.172	0.762	2.955	0.844	3.775	0.958	4.649	1.115	5.597
	$\bar{\sigma}_{2\max}^0$	1.338	1.539	1.344	1.819	1.457	2.112	1.725	2.425	2.064	2.765
0.80	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}$	0.676	1.478	0.742	1.986	0.840	2.519	0.979	3.086	1.167	3.850
	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}^0$	0.675	1.992	0.742	2.702	0.841	3.446	0.980	4.240	1.172	5.100
	$\bar{\sigma}_{2\max}^0$	1.256	1.539	1.321	1.819	1.569	2.112	1.890	2.425	2.287	2.765
0.85	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}$	0.654	1.478	0.740	1.986	0.867	2.519	1.046	3.086	1.291	3.702
	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}^0$	0.654	1.836	0.740	2.485	0.868	3.164	1.050	3.889	1.301	4.675
	$\bar{\sigma}_{2\max}^0$	1.193	1.539	1.423	1.819	1.733	2.112	2.123	2.425	2.599	2.765
0.90	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}$	0.651	1.478	0.777	1.986	0.964	2.519	1.225	3.086	1.580	3.702
	$\bar{\sigma}_{1\beta\max}^0$	0.651	1.701	0.777	2.296	0.968	2.920	1.255	3.585	1.641	4.306
	$\bar{\sigma}_{2\max}^0$	1.281	1.539	1.593	1.819	1.996	2.112	2.480	2.425	3.047	2.765

注：①表示“柱-改型-柱”组合壳；②表示“柱-锥-柱”组合壳

### 3 结束语

对连接结构长度要求较严的一类压力容器，采用改型壳作为连接结构单元，光顺地连接两不同直径的旋转壳，可大大削减结合部的应力集中，有很高的工程应用价值。采用改型壳光顺地连接两段不同直径圆柱壳，比较有利的参数范围是： $\beta \leq 0.85$ ， $\alpha_g$  在  $15^\circ \leq \alpha_g \leq 25^\circ$  范围。

由于改型壳的形状具有两端点处切线均与旋转轴平行这一特点，它还可作为连接结构单元，光顺连接两不同直径半球壳，构成“半球-改型-半球”组合壳，对改型壳的这一应用将另文讨论。

#### 参考文献：

- [1] Dokmeci M C. A shell of constant strength [J]. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik, 1966, 17: 545~547.
- [2] Meyers A. Rotationsschalen gleicher vergleichsspannung [J]. Ingenieur-Archiv, 1984, 54(3): 161~167.
- [3] Csonka P. Hyperboloid shaped cooling tower with a mantle-wall of equal strength [J]. Acta Technica of Hungary, 1963, 44: 215~221.
- [4] Royles R, Sofoluwe A B, Baig M M. Behaviour of underwater enclosures of optimum design [J]. Strain, 1980, 16(1): 2~20.
- [5] Timonin A M. Shape of zero-moment equal-strength shell of minimum mass [J]. Mechanics of Solids, 1984, 19: 172~175.
- [6] Schumann W, Wuethrich W. Über schalen gleicher

- festigkeit [J]. Acta Mechanica, 1972, 14: 189~197.
- [7] Megareus G. Die kuppel gleicher festigkeit [J]. Bauing, 1939, 20: 232~234.
- [8] Dasek V. Zur berechnung von behalterboden gleicher festigkeit [J]. Betonung und Eisen, 1937, 36: 54~55.
- [9] Federhofer K. Über schalen gleicher festigkeit [J]. Bauing, 1939, 20: 366~370.
- [10] Ziegler H. Kuppeln gleicher festigkeit [J]. Ingenieur Archiv, 1958, 26: 378~382.
- [11] Issler W. Eine kuppeln gleicher festigkeit [J]. Zeitschrift Angewandt Mathematic und Physik, 1959, 10: 576~578.
- [12] Issler W. Membranschalen gleicher festigkeit [J]. Ingenieur Archiv, 1964, 32: 330~345.
- [13] Tärke. Über rotationsschalen gleicher festigkeit für konstanten Innen-order Außendruck [J]. Zeitschrift Angewandt Mathematic und Mechanica, 1939, 19: 338~343.
- [14] 黄克智, 夏之熙, 薛明德. 板壳理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.  
Huang Kezhi, Xia Zhixi, Xue Mingde. Theory of plate and shell [M]. Beijing: Press of Tsinghua University, 1987. (in Chinese)
- [15] 白雪飞. Riccati 传递矩阵法分析组合加肋旋转壳及等强度旋转壳的理论和应用[D]. 武汉: 海军工程大学, 2006.  
Bai Xuefei. Analysis of the ring-stiffened combined shell of revolution by riccati transfer matrix method and the theory and applications of the constant strength shell of revolution [D]. Wuhan: Naval University of Engineering, 2006. (in Chinese)
- [16] 许辑平. 潜艇强度[M]. 北京: 国防工业出版社, 1980.  
Xu Jiping. Strength of submarine [M]. Beijing: Press of National Defense Industry, 1980. (in Chinese)