文章编号：1000-4750(2007)10-0001-05

具有最佳超收敛阶的 EEP 法计算格式：I 算法公式

*袁 驷，王 旭，邢沁妍，叶康生

(清华大学土木工程系结构工程与振动教育部重点实验室，北京 100084)

摘 要：对一维 C^0 问题的高次有限元后处理中超收敛计算的 EEP(单元能量投影)法提出改进的最佳超收敛计算格式，即用 m 次单元对足够光滑问题的有限元解答，采用该格式计算的任意一点的位移和应力都可以达到 h^{2m} 阶的最佳超收敛结果。整个工作分为 3 个部分，分别给出算法公式、数值算例和数学证明。该文是系列工作的第一部分，针对高次单元提出了凝聚形函数的概念，并证明了相关的逼近定理和等价定理，在此基础上给出了具体的算法公式。

关键词：有限元；一维问题；超收敛；最佳收敛阶；单元能量投影；凝聚形函数

中图分类号：TU318 **文献标识码：**A

A SCHEME WITH OPTIMAL ORDER OF SUPER-CONVERGENCE BASED ON EEP METHOD: I FORMULATION

*YUAN Si , WANG Xu , XING Qin-yan , YE Kang-sheng

(Key Laboratory Structural Engineering and Vibration of China Education Ministry,

Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on the Element Energy Projection (EEP) method, the present paper presents, for one-dimensional C^0 FEM, an improved scheme with optimal order of super-convergence, i.e., FEM sulotions can be obtained through the scheme for the elements with sufficient smooth property and m degrees. The proposed scheme is capable of producing $O(h^{2m})$ super-convergence for both displacements and stresses at any point on an element in post-processing stage. To achieve that, the concept of condensed shape functions was developed and the associated theorems of approximation and equivalence were proved. The whole work consists of three parts, i.e., formulation, numerical results and mathematical analysis. The present paper is the first in the series and gives the formulation of the proposed scheme.

Key words: FEM; one-dimensional problem; super-convergence; optimal convergence order; element energy projection; condensed shape functions

根据一维有限元法超收敛理论[1]，若问题及其解答足够光滑，则 m 次单元端结点位移具有 h^{2m} 阶的超收敛性[2]，这一收敛阶被认为是最佳的[3]，一般不能再提高了。袁驷等基于力学原理[4~6]，在文献[7]中提出了有限元后处理超收敛计算的单元能量投影(Element Energy Projection，简称 EEP)

收稿日期：2006-09-26；修改日期：2007-05-30

基金项目：国家自然科学基金资助项目(50678093)

作者简介：*袁 驷(1953)，男，北京人，教授，博士，院长，中国土木工程学会副理事长，中国力学学会结构工程专业委员会主任，从事结构工程研究(E-mail: yuans@tsinghua.edu.cn)；

王 旭(1980)，男，北京人，博士生，从事结构工程研究；

邢沁妍(1981)，女，大连人，博士生，从事结构工程研究(E-mail: xingqy99@mails.tsinghua.edu.cn)；

叶康生(1972)，男，江苏人，副教授，博士，从事结构工程研究(E-mail: yeks@mails.tsinghua.edu.cn).

法，并采用了线性权函数 v^h 导出了一组超收敛计算公式。其后，又将 EEP 法推广到 C^1 问题[8]、Timoshenko 梁单元[9]和 Galerkin 有限元[10]。该法简便易行、行之有效，可以快捷方便地给出任意一单元上任一点的超收敛位移和应力(导数)。新近的理论分析和超高精度的数值试验都表明：将文献[7]中的 EEP 格式用于不高于二次单元时，确实有最佳的 h^{2m} 超收敛阶；但是对 m (>2)次单元的超收敛解，端点导数仍可以达到最佳的 h^{2m} 超收敛阶，而单元内点的位移和应力一般只具有 h^{m+2} 阶的强超收敛性，尚未能达到最佳的 h^{2m} 超收敛阶。

本研究旨在改进和完善文献[7]中提出的 EEP 法对高次单元的应用，系统完整地给出使单元内点位移和应力也能达到 h^{2m} 阶超收敛性的 EEP 法计算格式，整个工作由三部分组成，分别给出算法公式、数值算例和数学证明。本文是系列工作的第一部分，对高次单元提出了凝聚形函数的概念，并证明了相关的逼近定理和等价定理。在凝聚形函数概念的基础上，本文提出了具有 h^{2m} 阶超收敛性的 EEP 法计算公式。

1 问题描述

本节给出文献中(特别是文献[7]中)一些必要的理论结果，并略去证明。

1.1 模型问题和有限元解

考虑一类二阶椭圆型两点边值问题：

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu')' + qu = f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$p > p_0 > 0$，p_0 为常数；$q \geq 0$，$(\,)' = \mathrm{d}(\,)/\mathrm{d}x$。定义双线性型(能量内积)和线性型：

$$a(u,v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)\mathrm{d}x\,,\quad (f,v) = \int_0^1 f\,v\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

则常规的位移型有限元解归结为求解 $u^h \in S^h$ 使得：

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h)\,,\quad \forall v^h \in S^h \tag{3}$$

其中，S^h 为通常意义下的有限元试探空间。以下记 u、$u^h \in S^h$ 和 $v^h \in S^h$ 分别为广义精确解、有限元解和任一检验(权)函数，它们满足熟知的投影定理[1]：

$$a(e^h, v^h) = 0\,,\quad \forall v^h \in S^h \tag{4}$$

其中，误差 $e^h = u - u^h$。值得注意的是：投影定理是定义在整体求解域[0,1]上的，在单个单元上一般不精确成立。

1.2 精确形函数和单元投影定理

将任一单元记为 e，其两端结点坐标记为 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$，单元长度记为 h。对于一维 Ritz 有限元法，若形函数 $N_{Ei}(x)$ 除了在单元两端结点满足非 0 即 1 的条件($N_{Ei}(\bar{x}_j) = \delta_{ij}$)以外，还满足问题(1)的齐次方程(即 $LN_{Ei} = 0$，$x \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$)，则称为精确形函数，记为 $N_{Ei}(x)$。用精确形函数构造的单元称为精确单元，其解能给出精确的结点位移，并使投影定理在单个单元上成立[7]，即：

$$a^e(e^h, v^h) = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} (pe^{h\prime}v^{h\prime} + qe^h v^h)\mathrm{d}x = 0\,,$$

$$\forall v^h \in S_e^h = \left\{ v^h \middle| v^h = \sum\nolimits_{i=1}^{2} N_{Ei} v_i^h, v_i^h \in R \right\} \tag{5}$$

相应地，将上式称为单元投影定理。

1.3 精确单元的精确解

由单元投影定理式(5)，利用分部积分，可导出单元端点导数和单元内点位移、导数的精确解的计算公式[7]：

$$u_i' = u_i^{h\prime} + (-1)^{i-1}\frac{1}{p_i}\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} f N_{Ei}\mathrm{d}x\,,\ i = 1,2 \tag{6a}$$

$$u_a = u_a^h + \frac{1}{p_a v_a}\left(N_{E1a}\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_a} f N_{E2}\mathrm{d}x + N_{E2a}\int_{\bar{x}_a}^{\bar{x}_2} f N_{E1}\mathrm{d}x \right) \tag{6b}$$

$$u_a' = u_a^{h\prime} + \frac{1}{p_a v_a}\left(N_{E1a}'\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_a} f N_{E2}\mathrm{d}x + N_{E2a}'\int_{\bar{x}_a}^{\bar{x}_2} f N_{E1}\mathrm{d}x \right) \tag{6c}$$

$$v_a = N_{E1a}N_{E2a}' - N_{E2a}N_{E1a}' \tag{6d}$$

其中：$(\,)_i$ 表示端结点 $\bar{x}_i$ 处的值；$(\,)_a$ 表示内点 $\bar{x}_a \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 处的值。

1.4 近似单元的超收敛公式

对于一般的有限元形函数 N_i，具备在结点上非 0 即 1 的性质，却不满足 $LN_i = 0$ 的条件，称之为近似形函数，相应的单元称为近似单元。近似单元得到的端点位移一般不是精确的，但是却具有 h^{2m} 阶的超收敛性质[2]。文献[7]将单元投影定理近似地应用于近似单元(对任意线性的 v^h 令 $a^e(e^h, v^h) = 0$)，导出了单元端点导数和单元内点位移、导数的超收敛计算公式：

$$u_i'^{*} = u_i^{h\prime} + (-1)^{i-1}\frac{1}{p_i}\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} (f - Lu^h)\bar{N}_i\mathrm{d}x,\ i = 1,2 \tag{7a}$$

$$u_a^* = u_a^h + \frac{h}{p_a}\left(\bar{N}_{1a}\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_a}(f - Lu^h)\bar{N}_2\mathrm{d}x + \bar{N}_{2a}\int_{\bar{x}_a}^{\bar{x}_2}(f - Lu^h)\bar{N}_1\mathrm{d}x\right) \tag{7b}$$

$$u_a'^* = u_a^{h\prime} + \frac{h}{p_a}\left(\bar{N}'_{1a}\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_a}(f - Lu^h)\bar{N}_2\mathrm{d}x + \bar{N}'_{2a}\int_{\bar{x}_a}^{\bar{x}_2}(f - Lu^h)\bar{N}_1\mathrm{d}x\right) \tag{7c}$$

其中，$\bar{N}_1$ 和 $\bar{N}_2$ 为线性形函数。计算公式(7a)也可以在精确单元的计算公式(6a)中用线性形函数 $\bar{N}_i$ 取代精确形函数 N_{Ei}，并用 $f - Lu^h$ 取代 f 来获得。注意：当 $\bar{x}_a$ 取两端点时，u_a^* 与有限元的解 u_i^h 相等，而 $u_a'^*$ 则与式(7a)的结果相一致。式(7a)中线性形函数的导数 $\bar{N}'_{ia}$ 可以进一步简化为常数，但为了便于比较，保留了导数形式。

如前所述，新近的理论分析和超高精度的数值试验表明：上述公式用在高次元($m > 2$)时，端点的导数确实可以达到最佳的 h^{2m} 超收敛阶，而单元内点的位移和导数一般只具有 h^{m+2} 阶的强超收敛性，未能达到最佳的 h^{2m} 阶。本文将提出改进公式，对此加以完善。

2　高次单元的凝聚

$m(>1)$次单元的试探函数可以表示为：

$$v = \sum_{i=1}^{m+1} N_i v_i = N_1 v_1 + \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{v}} + N_{m+1}v_{m+1} \tag{8}$$

其中：$\hat{\boldsymbol{N}}$ 为内部形函数行向量；$\hat{\boldsymbol{v}}$ 为内部结点位移列向量，分别为：

$$\hat{\boldsymbol{N}} = (N_2\ N_3 \cdots N_m),\quad \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}} = (v_2\ v_3 \cdots v_m) \tag{9}$$

这里，凡与内部结点相关的矩阵和向量，都在其上加了一个“^”。利用式(2)可将单元刚度系数和荷载系数表示为：

$$k_{ij} = a^e(N_i, N_j) = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}(pN'_i N'_j + qN_i N_j)\mathrm{d}x \tag{10a}$$

$$P_i = (f, N_i) = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} f N_i \mathrm{d}x \tag{10b}$$

熟知，单元的内部结点自由度与其他单元无关，由整体投影定理知，在单元分析时即可将其消去。对此，最常用的方法是对单元刚度矩阵和荷载向量进行凝聚。记原单元刚度方程(未集成且未引入任何边界条件)为：

$$\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{P}^e \tag{11}$$

将式(11)中的矩阵和向量分块表示为：

$$\boldsymbol{k}^e = \left(\begin{array}{c|c|c} k_{11} & \hat{\boldsymbol{k}}_1^{\mathrm{T}} & k_{1,m+1} \\ \hline \hat{\boldsymbol{k}}_1 & \hat{\boldsymbol{k}} & \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1} \\ \hline k_{m+1,1} & \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1}^{\mathrm{T}} & k_{m+1,m+1} \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{d}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}} \\ v_{m+1} \end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \hat{\boldsymbol{P}} \\ P_{m+1} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

其中：$\hat{\boldsymbol{k}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}_{m+1}$ 均为列向量；$\hat{\boldsymbol{k}}$ 为可逆方阵。这样，单元刚度方程式(11)可写为：

$$\left(\begin{array}{c|c|c} k_{11} & \hat{\boldsymbol{k}}_1^{\mathrm{T}} & k_{1,m+1} \\ \hline \hat{\boldsymbol{k}}_1 & \hat{\boldsymbol{k}} & \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1} \\ \hline k_{m+1,1} & \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1}^{\mathrm{T}} & k_{m+1,m+1} \end{array}\right)\begin{Bmatrix} v_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}} \\ v_{m+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \hat{\boldsymbol{P}} \\ P_{m+1} \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix}(13a)\\(13b)\\(13c)\end{matrix}$$

由单元内部结点的刚度方程式(13b)可解出：

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \hat{\boldsymbol{k}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{P}} - \hat{\boldsymbol{k}}_1 v_1 - \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1}v_{m+1}) \tag{14}$$

代入原来的矩阵方程式(13a)和式(13c)中，即可得凝聚后的单元刚度方程(凝聚后的量上面添加“~”)：

$$\tilde{\boldsymbol{k}}^e\tilde{\boldsymbol{d}}^e = \tilde{\boldsymbol{P}}^e \tag{15}$$

其中：

$$\tilde{\boldsymbol{k}}^e = \begin{pmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} - \hat{\boldsymbol{k}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_1 & k_{1,m+1} - \hat{\boldsymbol{k}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_{m+1} \\ k_{m+1,1} - \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_1 & k_{m+1,m+1} - \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_{m+1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{d}}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{m+1} \end{Bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{P}}^e = \begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 - \hat{\boldsymbol{k}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{P}} \\ P_{m+1} - \hat{\boldsymbol{k}}_{m+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{P}} \end{Bmatrix} \tag{16}$$

将式(14)的解代入试探函数式(8)，凝聚后的试探函数可表示为：

$$\tilde{v} = (N_1 - \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_1)v_1 + (N_{m+1} - \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_{m+1})v_{m+1} + \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{P}} \tag{17}$$

熟知，在做有限元计算时，采用式(11)或式(15)给出的端结点位移是相同的，而将有限元端点位移代入式(17)后的 $\tilde{v}$ 就等效于原有限元解 u^h。

3　凝聚形函数

矩阵的凝聚相当于将所有内部自由度凝聚到两个端点，$\boldsymbol{k}^e$ 和 $\boldsymbol{P}^e$ 分别凝聚成 $\tilde{\boldsymbol{k}}^e$ 和 $\tilde{\boldsymbol{P}}^e$。试问：什么样的端点形函数 $\tilde{N}_i\ (i = 1, 2)$ 可以直接生成 $\tilde{\boldsymbol{k}}^e$ 和 $\tilde{\boldsymbol{P}}^e$ 以及 $\tilde{v}$？易见，式(17)中最后一项泡状函数与结点位移无关，不出现在单元刚度矩阵 $\tilde{\boldsymbol{k}}^e$ 中；

而与 v_1 和 v_{m+1} 相乘项即为可直接生成 $\tilde{\boldsymbol{k}}^e$ 和 $\tilde{\boldsymbol{P}}^e$ 以及 $\tilde{v}$ 的形函数 $\tilde{N}_i\,(\,i=1,2\,)$，分别为：

$$\tilde{N}_1 = N_1 - \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_1\,,\quad \tilde{N}_2 = N_{m+1} - \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_{m+1} \tag{18}$$

以下将 $\tilde{N}_i\,(\,i=1,2\,)$称为 m 次凝聚形函数。同时，将式(17)中最后一项泡状函数记为 $\tilde{N}_0 = \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}$。

定理 1：凝聚形函数逼近定理。

① m 次凝聚形函数 $\tilde{N}_i\,(\,i=1,2\,)$分别是精确形函数 $N_{Ei}\,(\,i=1,2\,)$的一个 m 次单元的有限元逼近解。

② m 次泡状函数 $\tilde{N}_0$ 是一个 m 次单元对原问题在单元两端位移为零时的有限元逼近解。

证：为证①，在式(13)中令 $\boldsymbol{P}^e = 0$，再分别令 $v_1=1,\ v_{m+1}=0$ 和 $v_1=0,\ v_{m+1}=1$，即得到一个 m 次元对精确形函数 $N_{Ei}\,(\,i=1,2\,)$的有限元解的定解条件，由式(14)得到两个解答：

$$i=1:\quad \hat{\boldsymbol{v}}_1 = -\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_1\,;$$

$$i=2:\quad \hat{\boldsymbol{v}}_2 = -\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_{m+1} \tag{19}$$

将以上解答代入式(8)，并与式(18)对比，即可得证①。为证②，式(13)中令 $v_1=0,\ v_{m+1}=0$，即得到一个 m 次元对原问题在单元两端位移为零时的有限元解的定解条件，由式(14)得解 $\hat{\boldsymbol{v}}_0 = \hat{\boldsymbol{k}}^{1}\ \hat{}\ $i，将其用于式(8)，并与 $\tilde{N}_0 = \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}$ 对比，即可得证②。

注：由于凝聚形函数 $\tilde{N}_i$ 是精确形函数 N_{Ei} 的一个 m 次单元的有限元近似解，其逼近精度符合常规的有限元误差分析和估计，这一点将在第三部分数学证明中用到。

定理 2：凝聚形函数等价定理。

m 次凝聚形函数 $\tilde{N}_i\,(\,i=1,2\,)$直接生成的单元刚度矩阵和荷载向量分别为 m 次单元凝聚后的 $\tilde{\boldsymbol{k}}^e$ 和 $\tilde{\boldsymbol{P}}^e$，并可按式(17)生成凝聚试探函数 $\tilde{v}$，亦即对形函数凝聚同对单元刚度矩阵和荷载向量凝聚对 $\tilde{\boldsymbol{k}}^e$ 和 $\tilde{\boldsymbol{P}}^e$ 以及 $\tilde{v}$ 的生成是等价的。

证：$\tilde{N}_i$ 生成 $\tilde{\boldsymbol{k}}^e$ 和 $\tilde{v}$ 是显然的，只须证明 $\tilde{N}_i$ 生成的单元荷载向量是 $\tilde{\boldsymbol{P}}^e$ 即可。以下将以 $\tilde{P}_1$ 为例，证明 $(\,f,\tilde{N}_i) = \tilde{P}_1$；$\tilde{P}_2$ 的证明类似。展开：

$$(\,f,\tilde{N}_1) = (\,f, N_1 - \hat{\boldsymbol{N}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}_1) = P_1 - \hat{\boldsymbol{k}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}^{-1}\hat{\boldsymbol{P}} \tag{20}$$

对比式(16)，即得到证明。

注：等价定理保证了求出的端结点位移等价，而单元内部的解按式(17)计算也等价。

以上两个定理表明：用 m 次单元的常规有限元解答，等价于用 m 次凝聚形函数单元的解答。而 m 次凝聚形函数又是对精确形函数的 m 次有限元逼近。因此，不断提高单元次数 m，相当于不断提高凝聚形函数对精确形函数的逼近精度，从而越来越接近精确形函数，解答也越来越接近精确单元的解答。亦即，随着单元次数 m 的提高，单元投影定理越来越接近成立，且精确单元的所有计算公式也都越来越适用，只须将精确形函数换为凝聚形函数即可。

4 采用凝聚形函数的 EEP 超收敛计算公式

前已证明，m 次单元的解答等价于用 m 次凝聚形函数单元的解答；但在后处理 EEP 超收敛计算中，采用凝聚形函数使得 EEP 超收敛计算公式的构造十分直接和简便。

由于凝聚形函数单元越来越接近精确单元，其超收敛计算公式可在精确单元的公式(6a)~公式(6d)中用凝聚形函数 $\tilde{N}_i$ 取代精确形函数 N_{Ei}，并用 $f - Lu^h$ 取代 f，即有：

$$u_i'^{*} = u_i^{h\prime} + (-1)^{i-1}\frac{1}{p_i}\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}(\,f - Lu^h)\,\tilde{N}_i\,\mathrm{d}x\,,\quad i=1,2 \tag{21a}$$

$$u_a^{*} = u_a^h + \frac{1}{p_a\tilde{v}_a}\left(\tilde{N}_{1a}\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_a}(\,f - Lu^h)\,\tilde{N}_2\mathrm{d}x + \tilde{N}_{2a}\int_{\bar{x}_a}^{\bar{x}_2}(\,f - Lu^h)\,\tilde{N}_1\mathrm{d}x\right) \tag{21b}$$

$$u_a'^{*} = u_a^{h\prime} + \frac{1}{p_a\tilde{v}_a}\left(\tilde{N}_{1a}'\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_a}(\,f - Lu^h)\,\tilde{N}_2\mathrm{d}x + \tilde{N}_{2a}'\int_{\bar{x}_a}^{\bar{x}_2}(\,f - Lu^h)\,\tilde{N}_1\mathrm{d}x\right) \tag{21c}$$

$$\tilde{v}_a = \tilde{N}_{1a}\tilde{N}_{2a}' - \tilde{N}_{2a}\tilde{N}_{1a}' \tag{21d}$$

以上是一组完整的 EEP 超收敛计算公式，虽然是用凝聚形函数表示的，但是利用式(18)很容易转化为用常规形函数表示。对于端点导数的计算，用 $\tilde{N}_i$ 表示的式(21a)和用线性形函数 $\bar{N}_i$ 表示的式(7a)完全等效(后边将会证明)，所以实际计算中可以采用式(7a)，计算上也比较简单。

后面将证明：这组公式可给出最佳的超收敛阶，即对于充分光滑的问题和解答，可给出 h^{2m} 阶的最佳超收敛结果。

5 结语

作为系列工作的第一部分，本文提出了凝聚形函数的概念，并证明了相关的逼近定理和等价定理；在此基础上，对于 m 次单元的 EEP 超收敛计算，提出了一组用凝聚形函数表示的 EEP 超收敛公式；后续文章中将从数值试验和数学分析两方面证明它们具有最佳的 h^{2m} 超收敛阶。

参考文献：

[1] Strang G, Fix G. An analysis of the finite element method [M]. London: Prentice-Hall, 1973.

[2] Douglas J, Dupont T. Galerkin approximations for the two point boundary problems using continuous piecewise polynomial spaces [J]. Numerlcal Mathematics, 1974, 22: 99~109.

[3] 陈传淼. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2002.
Chen Chuanmiao. Structure theory of superconvergence of finite elements [M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2002. (in Chinese)

[4] 袁驷. 从矩阵位移法看有限元应力精度的损失与恢复[J]. 力学与实践, 1998, 20(4): 1~6.
Yuan Si. The loss and recovery of stress accuracy in FEM as seen from matrix displacement method [J]. Mechanics and Practice, 1998, 20(4): 1~6. (in Chinese)

[5] 袁驷, 王枚. 有限元(线)法超收敛应力计算的新方案及其若干数值结果[A]. 中国计算力学大会论文集[C]. 北京: 科学出版社, 2001. 43~52.
Yuan Si, Wang Mei. New strategy and some numerical results of super-convergent calculation of stresses in both FEM and FEMOL [A]. Proceedings of National Computational Mechanics [C]. Beijing: Science Press, 2001. 43~52. (in Chinese)

[6] 袁驷, 王枚, 林永静, 袁征. 有限元(线)法超收敛应力计算的新思路[C]. 工程力学, 2002, (增刊 I): 112~ 118.
Yuan Si, Wang Mei, Lin Yongjing, Yuan Zheng. New throughts in super-convergent computation of stresses in FEM(OL) [C]. Engineering Mechanics, 2002, (Supp.I): 112~118. (in Chinese)

[7] 袁驷, 王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2004, 21(2): 1~9.
Yuan Si, Wang Mei. An element-energy-projection method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional FEM [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(2): 1~9. (in Chinese)

[8] 袁驷, 王枚, 和雪峰. 一维 C^1 有限元超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2006, 23(2): 1~9.
Yuan Si, Wang Mei, He Xuefeng. Computation of super-convergent solutions in one-dimensional C^1 FEM by EEP method [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(2): 1~9. (in Chinese)

[9] Wang Mei, Yuan Si. Computation of super-convergent nodal stresses of Timoshenko beam elements by EEP method [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(11): 1228~1240.

[10] 袁驷, 林永静. 二阶非自伴两点边值问题 Galerkin 有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 计算力学学报, 2007, 24(2): 142~147.
Yuan Si, Lin Yongjing. An EEP method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional Galerkin FEM for second order non-self-adjoint Boundary-Value Problem [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(2): 142~147. (in Chinese)

(上接第 73 页)

参考文献：

[1] Teresa S Miller, Linda K Kliment, Kamran Rokhsaz. Analytical investigation of co-rotating vortex filaments with experimental verification [C]. AIAA paper 2003-3601, Orlando Florida, 23~26 June, 2003.

[2] Kamran Rokhsaz, Linda K Kliment. Experimental investigation of co-rotating vortex filaments in a water tunnel [C]. AIAA paper 2002-3303, Saint Louis, June 24~26, 2002.

[3] Carsten W Schwaz, Hahn Klaus-Uwe. Simplified hazard areas for wake vortex encounter avoidance [C]. AIAA paper 2005-5903, San Francisco, August 15~18, 2005.

[4] 王良益. 翼涡与体涡的相互干扰及其对翼涡破裂的影响[J]. 南京航空航天大学学报, 1994, 26(2): 267~272.
Wang Liangyi. Interaction of wing-body vortex system and influence of vortex interaction on vortex-burst location of leading-edge-vortex of wings [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 1994, 26(2): 267~272. (in Chinese)

[5] Greene G C. An approximate model of vortex decay in the atmosphere [J]. Journal of Aircraft, 1986, 23(7): 566~576.

[6] Saffman P G. Votex dynamics [M]. New York: Cambridge University Press, 1997.

[7] Meunier P, Leweke. Merging and three dimensional instability of a corotating vortex pair [R]. Rouen, France, Vortex Structure and Dynamics, 1999. 241~251.

[8] Jacob J D, Savas O. Vortex dynamics in trailing wakes of flapped rectangular wings [C]. AIAA paper 1997-0048, Reno NV, January 6~9, 1997.

[9] Jacob J D. Experiments on trailing vortex merger [C]. AIAA paper 1999-0547, Reno NV, January 11~14, 1999.

[10] Yao C-S, Lin J C. Flow-field measurement of device-induced embedded streamwise vortex on a flat plate [C]. AIAA paper 2002-3162, Saint Louis, Mo, June 24~26, 2002.

[11] Thomas Bertenyi, Will Graham. An experimental study of the merging of aircraft wake vortices [C]. AIAA paper 2000-4129, Denver, Co, August 14~17, 2000.