

文章编号: 1000-4750(2007)10-0051-06

不同模量简支梁均布荷载下的弹性力学解

*何晓婷, 陈山林, 孙俊贻

(重庆大学土木工程学院, 重庆 400045)

摘 要: 利用半逆解法, 寻求了不同模量简支梁在均布荷载下的弹性力学解, 并比较了现有的近似解。分析表明: 由于材料不同模量的引入, 应力较大程度地重新分布, 使得材料力学解答中的最大正应力被低估; 解答误差随着材料的不同模量上下波动, 深梁情况下还会加剧。

关键词: 弹性力学; 不同模量; 梁; 平截面假设; 应力; 位移

中图分类号: O343.5 文献标识码: A

ELASTICITY SOLUTION OF SIMPLE BEAMS WITH DIFFERENT MODULUS UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

*HE Xiao-ting, CHEN Shan-lin, SUN Jun-yi

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: A semi-inverse method from stress functions is used to obtain elasticity solutions of a simply supported beam with different modulus under uniformly distributed load and its approximate solutions derived from mechanics of material are also checked. The results show that because the materials with different modulus are employed, the stress redistributes across section in a large extent and the maximum normal stress obtained from mechanics of materials is underestimated to a certain degree. These errors fluctuate according to different modulus of materials and enlarge especially in the case of deep beams.

Key words: elasticity; different modulus; beam; plane section assumption; stress; displacement

工程结构存在着不同模量材料的弹性力学问题, 材料具有拉压不同模量的弹性力学问题本质上是非线性问题(双线性)^[1,2]。历史上研究者对不同模量梁弯曲理论的研究, 可分为解析解和分析数值解法^[3,4]。文献[5,6]用流动坐标系及分段积分法导出了复合荷载作用下弯压柱的解析解, 文献[7]在对结构进行中性层判定的基础上, 处理了平面复杂应力状态下的横力弯曲梁问题。本文采用半逆解法, 利用边界条件和应力连续条件得到了不同模量简支梁在均布荷载下的应力和位移解, 分析了材料力学解答的误差。

1 不同模量简支梁均布荷载下的弹性力学解

利用平截面假设, 文献[5]得到了纯弯曲梁的应力以及受拉受压区的截面高度, 在此基础上文献[7]利用剪应力对中性轴的位置无贡献这一结论得到了横力弯曲梁的正应力、剪应力以及中性轴的位置。本文放弃平截面假设, 但同时假定剪应力对中性轴位置无影响。

1.1 应力分量

如图 1 所示, 设有矩形截面的不同模量简支梁,

收稿日期: 2006-03-06; 修改日期: 2006-08-02

作者简介: *何晓婷(1971), 女, 四川邛崃人, 讲师, 博士生, 从事结构工程研究(E-mail: cinderella711121@yahoo.com.cn);

陈山林(1942), 男, 四川内江人, 教授, 硕士, 博导, 从事固体力学研究(E-mail: a65123754@cta.cq.cn);

孙俊贻(1961), 男, 山东莱州人, 副教授, 硕士, 从事土木水利施工研究(E-mail: sun.junyi@yahoo.com.cn).

深度为 h ，长度为 $2l$ ，体力可以不计，受均布荷载 q ，由两端的反力 ql 维持平衡。为方便取单位宽度的梁来考虑。注意：由于不同模量的引入，使得中性轴不再位于 $h/2$ 处，设受拉区和受压区的截面高度分别为 h_1 和 h_2 。在这两个区域的应力和位移分量的表达式各不相同，因此需要分拉压区进行讨论。

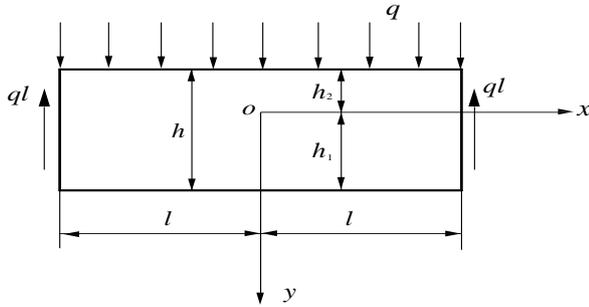


图 1 不同模量简支梁受均布荷载

Fig.1 Simple beam with different modulus under uniformly distributed load

采用半逆解法，假设 $\sigma_y = f(y)$ ^[8]，得到 $\varphi = \frac{x^2}{2}f(y) + xf_1(y) + f_2(y)$ 。同时假定：在拉压区内的应力函数要满足的相容方程与同模量情况一致，故由 $\nabla^4\varphi = 0$ 得到 φ 含待定常数的表达式，求得相应的应力分量并且利用对称性可得受拉区和受压区的应力分量为：

$$\begin{cases} \sigma_x^+ = \frac{x^2}{2}(6A^+y + 2B^+) - 2A^+y^3 - 2B^+y^2 + 6H^+y + 2K^+ & 0 \leq y \leq h_1 \\ \sigma_y^+ = A^+y^3 + B^+y^2 + C^+y + D^+ \\ \tau_{xy}^+ = -x(3A^+y^2 + 2B^+y + C^+) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_x^- = \frac{x^2}{2}(6A^-y + 2B^-) - 2A^-y^3 - 2B^-y^2 + 6H^-y + 2K^- & -h_2 \leq y \leq 0 \\ \sigma_y^- = A^-y^3 + B^-y^2 + C^-y + D^- \\ \tau_{xy}^- = -x(3A^-y^2 + 2B^-y + C^-) \end{cases} \quad (2)$$

上式中， σ_x ， σ_y ， τ_{xy} 表示应力分量， A ， B ， C ， D ， H ， K 为待定常数，带+号的表示与受拉区有

$$\int_{-h_2}^0 \left[\frac{l^2}{2}(6A^-y + 2B^-) - 2A^-y^3 - 2B^-y^2 + 6H^-y + 2K^- \right] dy + \int_0^{h_1} \left[\frac{l^2}{2}(6A^+y + 2B^+) - 2A^+y^3 - 2B^+y^2 + 6H^+y + 2K^+ \right] dy = 0 \quad (16)$$

关的量，带-号的表示与受压区有关的量。确定拉压区的待定常数时，不仅要借用原来已有的边界条件，还要用到在中性轴即 $y=0$ 处的应力连续条件，这是不同模量弹性力学问题的求解特点。

首先，在受拉区的应力边界条件为：

$$y = h_1, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3)$$

同理，在受压区也有两个应力边界条件：

$$y = -h_2, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (4)$$

在次要边界上运用圣维南原理，由于对称性(弯矩对称而剪力反对称)，考察右端边界即在 $x=l$ 处，有以下三个积分方程成立：

$$\int_{-h_2}^0 \sigma_x^- dy + \int_0^{h_1} \sigma_x^+ dy = 0 \quad (5)$$

$$\int_{-h_2}^0 \sigma_x^- y dy + \int_0^{h_1} \sigma_x^+ y dy = 0 \quad (6)$$

$$\int_{-h_2}^0 \tau_{xy}^- dy + \int_0^{h_1} \tau_{xy}^+ dy = -ql \quad (7)$$

现在边界条件个数不足以确定 12 个待定常数，还需用到中性轴处的应力连续条件：

$$y = 0, \quad \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- \quad (8)$$

同时，中性轴上所有点的应力分量需满足：

$$y = 0, \quad \sigma_x^+ = \sigma_x^- = 0 \quad (9)$$

求解时先从应力连续条件入手。将式(8)代入式(1)和式(2)，要求对所有的 x 满足，可得：

$$D^+ = D^-, \quad C^+ = C^- \quad (10)$$

将式(9)代入式(1)和式(2)，有：

$$\sigma_x^+ = B^+x^2 + 2K^+ = 0, \quad \sigma_x^- = B^-x^2 + 2K^- = 0,$$

要对所有的 x 均满足，可得：

$$B^+ = B^- = K^+ = K^- = 0 \quad (11)$$

现得到有关这 12 个待定常数的 6 个方程，即式(10)和式(11)，此外还需要 6 个方程。将主要边界条件即式(3)、式(4)代入式(1)、式(2)，有：

$$A^+h_1^3 + B^+h_1^2 + C^+h_1 + D^+ = 0 \quad (12)$$

$$3A^+h_1^2 + 2B^+h_1 + C^+ = 0 \quad (13)$$

$$-A^-h_2^3 + B^-h_2^2 - C^-h_2 + D^- = -q \quad (14)$$

$$3A^-h_2^2 - 2B^-h_2 + C^- = 0 \quad (15)$$

将式(1)和式(2)代入式(5)和式(6)，有：

$$\int_{-h_2}^0 \left[\frac{l^2}{2}(6A^-y + 2B^-) - 2A^-y^3 - 2B^-y^2 + 6H^-y + 2K^- \right] ydy + \int_0^{h_1} \left[\frac{l^2}{2}(6A^+y + 2B^+) - 2A^+y^3 - 2B^+y^2 + 6H^+y + 2K^+ \right] ydy = 0 \quad (17)$$

由方程(12)~方程(17)并结合式(10)、式(11)可求解出 12 个待定常数为:

$$\begin{aligned} A^+ &= -\frac{q}{2h_1^2h}, \quad A^- = -\frac{q}{2h_2^2h}, \quad B^+ = B^- = 0, \\ C^+ &= C^- = \frac{3q}{2h}, \quad D^+ = D^- = -\frac{qh_1}{h}, \\ H^+ &= \frac{ql^2}{4h_1^2h} - \frac{q}{10h} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{h_2}{h_1} + \frac{1}{6} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right] \\ H^- &= \frac{ql^2}{4h_2^2h} - \frac{q}{10h} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{h_1}{h_2} + \frac{1}{6} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$K^+ = K^- = 0$$

至此, 式(7)尚未用到, 将已确定的待定常数代入, 积分以后这一条件自动满足。若取 $h_1 = h_2 = h/2$, 以上待定常数全部可以退化到同模量时的待定常数^[8]:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2q}{h^3}, \quad B = 0, \quad C = \frac{3q}{2h}, \quad D = -\frac{q}{2}, \\ H &= \frac{ql^2}{h^3} - \frac{q}{10h}, \quad K = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

因此从一个侧面验证了求解过程的正确性。拉压区应力分量的最后表达式为:

$$\begin{cases} \sigma_x^+ = \frac{3q}{2h_1^2h} (l^2 - x^2)y + \frac{q}{h} y \left(\frac{y^2}{h_1^2} + N^+ \right) \\ \sigma_y^+ = -\frac{q}{2h_1^2h} y^3 + \frac{3q}{2h} y - \frac{qh_1}{h} \\ \tau_{xy}^+ = \frac{3q}{2h_1^2h} xy^2 - \frac{3q}{2h} x \end{cases} \quad (20) \quad 0 \leq y \leq h_1$$

$$\begin{cases} \sigma_x^- = \frac{3q}{2h_2^2h} (l^2 - x^2)y + \frac{q}{h} y \left(\frac{y^2}{h_2^2} + N^- \right) \\ \sigma_y^- = -\frac{q}{2h_2^2h} y^3 + \frac{3q}{2h} y - \frac{qh_1}{h} \\ \tau_{xy}^- = \frac{3q}{2h_2^2h} xy^2 - \frac{3q}{2h} x \end{cases} \quad (21) \quad -h_2 \leq y \leq 0$$

其中 N^+ , N^- 是与不同模量有关的两个常数。

$$\begin{aligned} N^+ &= -\frac{3}{5} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{h_2}{h_1} + \frac{1}{6} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right], \\ N^- &= -\frac{3}{5} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{h_1}{h_2} + \frac{1}{6} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (22)$$

1.2 位移分量

由平面应力状态下的物理方程和几何方程:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{cases} \quad (23)$$

考虑拉压泊松比 μ^+ 和 μ^- , 先求受拉区的位移。

将式(20)代入式(23)的第一式, 有:

$$\frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{1}{E^+} \left\{ \frac{3q}{2h_1^2h} (l^2 - x^2)y + \frac{\mu^+qh_1}{h} + \frac{q}{h} \left[\left(1 + \frac{\mu^+}{2} \right) \frac{y^2}{h_1^2} + N^+ - \frac{3}{2} \mu^+ \right] y \right\}$$

对 x 积分一次, 得到:

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{1}{E^+} \left\{ \frac{q}{2h_1^2h} (3l^2 - x^2)xy + \frac{\mu^+qh_1}{h} x + \frac{q}{h} \left[\left(1 + \frac{\mu^+}{2} \right) \frac{y^2}{h_1^2} + N^+ - \frac{3}{2} \mu^+ \right] xy \right\} + f_1(y) \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $f_1(y)$ 为待定函数。同理, 将式(20)代入式(23)的第二式, 有:

$$\frac{\partial v^+}{\partial y} = \frac{1}{E^+} \left\{ -\frac{3\mu^+q}{2h_1^2h} (l^2 - x^2)y - \frac{qh_1}{h} - \frac{q}{h} \left[\left(\mu^+ + \frac{1}{2} \right) \frac{y^2}{h_1^2} + \mu^+N^+ - \frac{3}{2} \right] y \right\}$$

对 y 积分一次, 得到:

$$\begin{aligned} v^+ &= \frac{1}{E^+} \left\{ -\frac{3\mu^+q}{4h_1^2h} (l^2 - x^2)y^2 - \frac{qh_1}{h} y - \frac{q}{h} \left[\left(\frac{\mu^+}{4} + \frac{1}{8} \right) \frac{y^2}{h_1^2} + \frac{\mu^+N^+}{2} - \frac{3}{4} \right] y^2 \right\} + f_2(x) \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $f_2(x)$ 为待定函数。将式(24)和式(25)代入式(23)的第三式, 分离变量整理得:

$$\frac{df_2(x)}{dx} + \frac{1+\mu^+}{E^+} \frac{3q}{h} x + \frac{q}{2E^+h_1^2h} (3l^2 - x^2)x + \frac{q}{E^+h} \left(N^+ - \frac{3}{2}\mu^+ \right) x = -\frac{df_1(y)}{dy}$$

令上式两端等于待定常数 ω^+ , 左端对 x 积分得:

$$f_2(x) = -\frac{q}{8E^+h_1^2h} (6l^2 - x^2)x^2 - \frac{q}{E^+h} \left(\frac{3}{2} + \frac{N^+}{2} + \frac{3}{4}\mu^+ \right) x^2 + \omega^+ x + v_0^+ \quad (26)$$

右端对 y 积分得:

$$f_1(y) = -\omega^+ y + u_0^+ \quad (27)$$

式(26)和式(27)中的 ω^+ , u_0^+ , v_0^+ 为刚体位移项。利用简支梁的支座约束条件(左边铰支, 右边为连杆支座), 有:

$$\begin{cases} x = -l, y = 0, u^+ = v^+ = 0 \\ x = l, y = 0, v^+ = 0 \end{cases} \quad (28)$$

将其代入式(24)和式(25)并结合式(26)和式(27)后, 求得刚体位移项为:

$$\begin{cases} u_0^+ = \frac{\mu^+ q h_1 l}{E^+ h}, \\ v_0^+ = \frac{5q l^4}{8E^+ h_1^2 h} + \frac{q l^2}{E^+ h} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} N^+ + \frac{3}{4} \mu^+ \right), \\ \omega^+ = 0 \end{cases} \quad (29)$$

最后得到受拉区 ($0 \leq y \leq h_1$) 位移表达式:

$$\begin{cases} u^+ = \frac{q}{2E^+h_1^2h} (3l^2 - x^2)xy + \frac{\mu^+ q h_1}{E^+ h} (x+l) + \frac{q}{E^+ h} \left[\left(1 + \frac{\mu^+}{2} \right) \frac{y^2}{h_1^2} + N^+ - \frac{3}{2}\mu^+ \right] xy \\ v^+ = -\frac{3\mu^+ q}{4E^+h_1^2h} (l^2 - x^2)y^2 - \frac{q}{E^+ h} \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{\mu^+}{4} \right) \frac{y^2}{h_1^2} + \frac{\mu^+ N^+}{2} - \frac{3}{4} \right] y^2 - \frac{q h_1}{E^+ h} y + \frac{q}{8E^+h_1^2h} (x^2 - l^2)(x^2 - 5l^2) + \frac{q}{E^+ h} \left(\frac{3}{2} + \frac{N^+}{2} + \frac{3}{4}\mu^+ \right) (l^2 - x^2) \end{cases} \quad (30)$$

同理, 利用式(21)经计算得到受压区 ($-h_2 \leq y \leq 0$) 的位移分量表达式:

$$\begin{cases} u^- = \frac{q}{2E^-h_2^2h} (3l^2 - x^2)xy + \frac{\mu^- q h_1}{E^- h} (x+l) + \frac{q}{E^- h} \left[\left(1 + \frac{\mu^-}{2} \right) \frac{y^2}{h_2^2} + N^- - \frac{3}{2}\mu^- \right] xy \\ v^- = -\frac{3\mu^- q}{4E^-h_2^2h} (l^2 - x^2)y^2 - \frac{q}{E^- h} \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{\mu^-}{4} \right) \frac{y^2}{h_2^2} + \frac{\mu^- N^-}{2} - \frac{3}{4} \right] y^2 - \frac{q h_1}{E^- h} y + \frac{q}{8E^-h_2^2h} (x^2 - l^2)(x^2 - 5l^2) + \frac{q}{E^- h} \left(\frac{3}{2} + \frac{N^-}{2} + \frac{3}{4}\mu^- \right) (l^2 - x^2) \end{cases} \quad (31)$$

当 $h_1 = h_2 = h/2$ 时, 式(30)和式(31)能退化到同模量的情况^[9], 即:

$$\begin{cases} u = \frac{2q}{Eh^3} (3l^2 - x^2)xy + \frac{\mu q}{2E} (x+l) + \frac{q}{Eh} \left[(4 + 2\mu) \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} - \frac{3}{2}\mu \right] xy \\ v = -\frac{3\mu q}{Eh^3} (l^2 - x^2)y^2 - \frac{q}{Eh} \left[\left(\frac{1}{2} + \mu \right) \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{10}\mu - \frac{3}{4} \right] y^2 - \frac{q}{2E} y + \frac{q}{2Eh^3} (x^2 - l^2)(x^2 - 5l^2) + \frac{q}{Eh} \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{4}\mu \right) (l^2 - x^2) \end{cases} \quad (32)$$

从一个侧面验证了求解的正确性。

2 两种解答之间的误差分析

将梁任一横截面上的弯矩和剪力值 $M = \frac{q}{2}(l^2 - x^2)$, $Q = -qx$ 分别代入式(20)和式(21)的第一式第三式, 注意到截面宽度 $b=1$, 且引入不同模量梁的抗弯刚度^[2]:

$$D = \frac{b}{3}(E^- h_2^3 + E^+ h_1^3)$$

应力分量可表示为:

$$\begin{cases} \sigma_x^+ = \frac{E^+}{D}My + \frac{q}{h}y\left(\frac{y^2}{h_1^2} + N^+\right), \\ \sigma_y^+ = -\frac{q}{2h_1^2h}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{qh_1}{h}, \\ \tau_{xy}^+ = \frac{3Q}{2h}\left[1 - \frac{(\sqrt{E^+} + \sqrt{E^-})^2}{E^+h^2}y^2\right], \end{cases} \quad (33)$$

$0 \leq y \leq h_1$

$$\begin{cases} \sigma_x^- = \frac{E^-}{D}My + \frac{q}{h}y\left(\frac{y^2}{h_2^2} + N^-\right), \\ \sigma_y^- = -\frac{q}{2h_2^2h}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{qh_1}{h}, \\ \tau_{xy}^- = \frac{3Q}{2h}\left[1 - \frac{(\sqrt{E^+} + \sqrt{E^-})^2}{E^+h^2}y^2\right], \end{cases} \quad (34)$$

$-h_2 \leq y \leq 0$

与等模量情况相类似：剪应力 τ_{xy} 与材料力学解答^[5,7]完全一致； σ_y 是不同模量梁各纵向纤维的挤压应力，近似解答中一般不考虑。在弯应力 σ_x 的表达式中，第一项是主要项，和材料力学中的解答相同，第二项是弹性力学提出的修正项。与单一模量情况不同的是，修正值不仅依赖于梁的跨长与深度比值，还依赖于材料的不同模量性，并且在受拉区和受压区的变化不一致。

令 $n = E^- / E^+$ ^[10]， $y = h_1, x = 0$ ，梁的跨长为截面深度的两倍($l = h$)，则在受拉区最大弯应力的修正值为：

$$\delta\sigma_{x,\max}^+ = \frac{\frac{q}{h}y\left(\frac{y^2}{h_1^2} + N^+\right)}{\frac{3q}{2h_1^2h}(l^2 - x^2)y} = \frac{4}{15}\left(\frac{h_1}{l}\right)^2\left(1 + \frac{9}{\sqrt{n}} - \frac{9}{n}\right) = \frac{4}{15}\frac{n + 9\sqrt{n} - 9}{(1 + \sqrt{n})^2} \quad (35)$$

同理，令 $y = -h_2$ ，受压区最大弯应力的修正值为

$$\delta\sigma_{x,\max}^- = \frac{\frac{q}{h}y\left(\frac{y^2}{h_2^2} + N^-\right)}{\frac{3q}{2h_2^2h}(l^2 - x^2)y} = \frac{1}{15}\left(\frac{h_2}{l}\right)^2(4 + \sqrt{n} - n) = \frac{1}{15}\frac{4 + \sqrt{n} - n}{(1 + \sqrt{n})^2} \quad (36)$$

绘制出拉压区最大正应力修正值与模量比的变化曲线，如图 2、图 3 所示，可以得出以下结论：

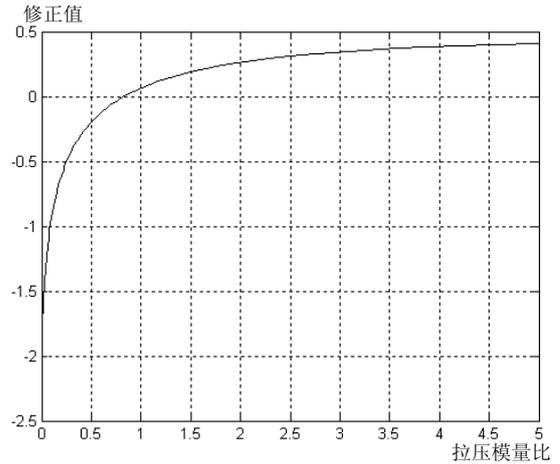


图 2 $\delta\sigma_{x,\max}^+$ 随 $n = E^- / E^+$ 变化曲线

Fig.2 Variable curve of $\delta\sigma_{x,\max}^+$ with n

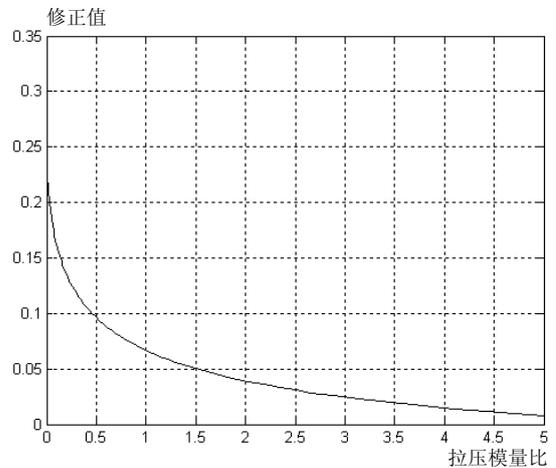


图 3 $\delta\sigma_{x,\max}^-$ 随 $n = E^- / E^+$ 变化曲线

Fig.3 Variable curve of $\delta\sigma_{x,\max}^-$ with n

1) 当 $n=1$ 即 $E^+ = E^-$ 时，拉压区最大正应力修正值 $\delta\sigma_{x,\max}^+ = \delta\sigma_{x,\max}^- = 1/15$ ，与同模量情形吻合。

2) 若 $n < 1$ 即 $E^+ > E^-$ 时，曲线走势陡峭，表明拉压区的最大正应力修正值 $\delta\sigma_{x,\max}^+$ 和 $\delta\sigma_{x,\max}^-$ 随不同模量变化剧烈；若 $n > 1$ 即 $E^- > E^+$ 时，曲线走势平缓，表明 $\delta\sigma_{x,\max}^+$ 和 $\delta\sigma_{x,\max}^-$ 随不同模量变化微弱。

3) 压区最大正应力修正值 $\delta\sigma_{x,\max}^-$ 一直随着 n 的增大而减小，说明平截面假设在受压区的影响减弱；拉区修正值 $\delta\sigma_{x,\max}^+$ 一直随着 n 的增大而增大，说明平截面假设在受拉区的影响增强。

4) 当 $n < 0.8255$ 时，拉区修正值 $\delta\sigma_{x,\max}^+ < 0$ ，表明平截面假设带来的误差是减小正应力；当 $n > 6.5616$ 时，压区修正值 $\delta\sigma_{x,\max}^- < 0$ ，平截面假设产生的误差同样是减小正应力。

5) 以上曲线都是针对跨长两倍于深度的情形即 $l=h$ 时, 若跨长四倍于深度即 $l=2h$ 时, 所有的修正值均乘以 $1/4$, 说明修正值在深梁情况下会加大, 在浅梁时则减小。

参考文献:

- [1] Gianluca Medri. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression [J]. Transactions of the ASME, 1982, 104(1): 26~28.
- [2] 阿姆巴尔楚米扬 C A, 著. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986. Ambartsumyan C A. Elasticity theory of different modulus [M]. Translated by Wu Ruifeng, Zhang Yunzhen. Beijing: China Railway Press, 1986. (in Chinese)
- [3] 叶志明, 陈彤, 姚文娟. 不同模量弹性问题理论及有限元法研究进展[J]. 力学与实践, 2004, 26(2): 9~14. Ye Zhiming, Chen Tong, Yao Wenjuan. Progresses in elasticity theory with different moduli in tension and compression and related FEM [J]. Mechanics in Engineering, 2004, 26(2): 9~14. (in Chinese)
- [4] 何晓婷, 陈山林. 不同模量弹性力学问题研究进展[J]. 重庆建筑大学学报, 2005, 27(6): 136~141. He Xiaoting, Chen Shanlin. Study progresses in elasticity problem with different modulus [J]. Journal of

- Chongqing Jianzhu University, 2005, 27(6): 136~141. (in Chinese)
- [5] Yao Wenjuan, Ye Zhiming. Analytical solution of bending-compression column using different tension-compression modulus [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(9): 983~993.
- [6] 姚文娟, 叶志明. 不同模量理论挡土墙结构解析解及数值解[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 1022~1027. Yao Wenjuan, Ye Zhiming. The analytical and numerical solution of retaining wall based on elastic theory of different modulus [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(6): 1022~1027. (in Chinese)
- [7] Yao Wenjuan, Ye Zhiming. Analytical solution for bending beam subject to lateral force with different modulus [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(10): 1107~1117.
- [8] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 1990. Xu Zhilun. Elasticity [M]. 3rd Edition. Beijing: Higher Education Press, 1990. (in Chinese)
- [9] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956. Chien Wei-zang, Ye Kaiyuan. Elasticity [M]. Beijing: Science Press, 1956. (in Chinese)
- [10] Li Longyuan. The rationalism theory and its finite element analysis method of shell structures [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1990, 11(4): 395~402.

(上接第 45 页)

参考文献:

- [1] 卓家寿. 弹塑性力学中的广义变分原理(第二版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002. Zhuo Jiashou. Generalized variational principles in elasticity and plasticity (2nd Edition) [M]. Beijing: China Water Power Press, 2002. (in Chinese)
- [2] Gao Y C. A new description of the stress state at a point with applications [J]. Archive of Applied Mechanics, 2003, 73(3/4): 171~183.
- [3] 高玉臣. 固体力学基础[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1999. Gao Yuchen. Foundation of solid mechanics [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1999. (in Chinese)
- [4] Gao Y C. Large strain analysis of a rubber wedge compressed by a line load at its tip [J]. International Journal of Engineering Science, 1998, 36(7/8): 831~842.
- [5] Gao Y C, Mai Y W. The contact problem of a rubber half-space dented by a rigid cone apex [J]. Archive of Applied Mechanics, 2002, 72(4/5): 213~228.
- [6] Gao Y C. Analysis of the interface crack for rubber-like materials [J]. Journal of Elasticity, 2002, 66(1): 1~19.
- [7] Gao Y C, Zhou L M. Interface crack tip field of rubber materials [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(34/35): 6227~6240.
- [8] Gao Y C, Zhou Z. Large strain contact of a rubber wedge with a rigid notch [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(48/49): 8921~8928.
- [9] Gao Y C, Gao T J. Large deformation contact of a rubber notch with a rigid wedge [J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(32): 4319~4334.
- [10] Gao Y C, Liu B. A rubber cone under the tension if a concentrated force [J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, 32(11): 1485~1493.
- [11] Gao Y C. Asymptotic analysis of the nonlinear Boussinesq problem for a kind of incompressible rubber material (compression case) [J]. Journal of Elasticity, 2001, 64(2/3): 111~130.
- [12] Timoshenko S, Goodier J N. Theory of elasticity (3rd Edition) [M]. New York: McGraw-Hill, 1970.