文章编号：1000-4750(2007)08-0037-06

正交各向异性空心圆柱体中的周向超声导波

吴　斌，*禹建功，何存富

(北京工业大学机电学院，北京 100022)

摘　要：周向导波适于大直径管道纵向缺陷的超声无损检测。基于三维弹性理论，采用一种正交多项式法研究正交各向异性无限长管道中的周向导波。为验证方法的正确性与适用性，首先计算了各向同性和横观各向同性管道中的周向导波并与已有数据相比较。其次，计算了单向复合材料中不同纤维增强强度下的频散曲线，论证了纤维增强强度变化对于频散曲线的影响。最后，求解了不同径厚比下正交各向异性管道的周向导波的频散曲线，论述了径厚比的变化对频散曲线的影响。

关键词：周向导波；频散曲线；正交多项式；正交各向异性空心圆柱体；径厚比

中图分类号：O348　　**文献标识码**：A

GUIDED CIRCUMFERENTIAL WAVES IN ORTHOTROPIC HOLLOW CYLINDERS

WU Bin , *YU Jian-gong , HE Cun-fu

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronic Technology, Beijing university of technology, Beijing 100022, China)

Abstract: In ultrasonic nondestructive inspection of large-diameter pipes, longitudinal cracks can be detected more efficiently by using guided circumferential waves. Based on linear three-dimensional elasticity，an orthogonal polynomial approach is used for determining the guided circumferential waves in homogeneous infinitely long orthotropic hollow cylinders. Results are compared with those published earlier to check up the accuracy and applicability of this polynomial approach. Guided circumferential wave dispersion curves for unidirectional composite pipes under different fiber intensity are calculated, and the effect of the variety of the fiber intensity on dispersion curves is shown. Finally, the guided circumferential wave dispersion curves for orthotropic pipes under different ratios of outer radius to thickness are calculated and the inherited influence of the variety of ratio on the dispersion curves is discussed.

Key words: guided circumferential waves; dispersion curves; orthogonal polynomial; orthotropic hollow cylinders; ratio of outer radius to thickness

导波技术作为新的无损检测方法，其传播特性与检测机理受到学者的广泛关注[1,2]。目前，文献[3,4]对空心圆柱体轴向传播的柱面超声导波进行了研究，Grace and Goodman[5]，Brekhovskikh[6]，Cerv[7]，Liu and Qu[8,9]和 Valle、Qu 和 Jacobs[10]分别对各向同性空心圆柱体周向导波的多个方面进行了研究。随着材料智能化和多样化的发展，管道的制备也已不再局限于各向同性材料。文献[11~13]研究了各向

收稿日期：2005-12-20；修改日期：2006-03-24

基金项目：国家自然科学基金项目(10372009)

作者简介：吴　斌(1962)，男，山西大同人，教授，博士，博导，从事结构动力行为及应用和测控技术方面的研究(E-mail: wb@bjut.edu.cn)；
*禹建功(1975)，男，河南开封人，博士生，从事现代测控技术与方法的研究(E-mail: yu@emails.bjut.edu.cn)；
何存富(1958)，男，山西大同人，教授，博士，博导，从事测控技术方面的研究(E-mail: hecuntu@bjut.edu.cn).

异性管道中纵向导波，Towfighi S 等[14]使用傅里叶级数展开的方法，研究了各向异性管道中周向导波问题。

1972 年由 Maradudin A A[15]提出了一种使用正交多项式展开法求解动力学问题的思想，使用拉盖尔正交多项式求解了有限大晶体的边缘振动模态。至 1999 年，Lefebvre J E 等[16]基于这种思想开发了利用勒让德正交多项式展开的方法研究了多层板的波动问题。这种方法利用正交多项式的正交特性把耦合的波动方程转化为特征值问题，使得问题得到简化，收敛速度也比较快。本文利用勒让德正交多项式级数展开法，从正交各项异性材料出发，求解了各向异性管道中的周向导波问题；讨论了单向复合材料纤维增强程度对导波频散特征的影响；分析了径厚比的变化对正交各向异性管道中周向导波频散曲线的影响。

1 问题的描述与基本方程

基于三维弹性体理论，考虑一均匀正交各向异性(与柱坐标 $z\theta$ 重合)、无限长、内外表面均为自由表面的空心圆柱体。图 1 所示为一柱坐标系中的空心圆柱体，其内径为 a，外径为 b。

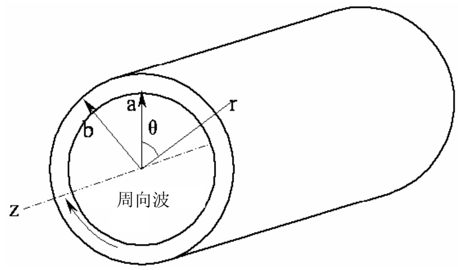


图 1 空心圆柱体中的周向导波

Fig.1 Guided circumferential wave of hollow cylinder

由于周向导波研究的是 (r,θ) 平面上沿 θ 方向传播的时间简谐波。Z 轴垂直于 (r,θ) 平面，对于无限长空心圆柱体，弹性场与 z 坐标无关，即，未知的位移场可以写为

$$u_r = u_r(r,\theta),\quad u_\theta = u_\theta(r,\theta),\quad u_z = 0 \tag{1}$$

因此，问题化简为 (r,θ) 平面内的二维问题。假设正交各向异性弹性体的密度为 ρ，弹性常数为 $\{C_{ij}\}$。在小变形假设下，此二维柱坐标系的几何关系为

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{2}$$

根据正交各向异性材料的广义胡克定律，可以得到问题的应力-位移关系

$$\begin{Bmatrix} T_{rr} \\ T_{\theta\theta} \\ T_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(r) & C_{12}(r) & 0 \\ & C_{22}(r) & 0 \\ \text{对称} & & C_{66}(r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

此时的运动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = \rho(r)\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{2T_{r\theta}}{r} = \rho(r)\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \end{cases} \tag{4}$$

考虑到空心圆柱体的边界问题，弹性常数受到位置的约束，即

$$C_{ij}(r) = C_{ij}\pi(a,b),\quad \rho(r) = \rho\pi(a,b) \tag{5}$$

这里，$\pi(a,b)$ 是矩形窗函数

$$\pi(a,b) = \pi(r) = \begin{cases} 1, & a \le r \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

文献[17]指出，把约束条件(5)代入到式(3)使得材料常数在空心圆柱体的内外边界上消失。这样处理的结果相当于求解运动方程后代入表面边界条件(在 $r=a$ 和 $r=b$ 时 $T_{rr}=0$，$T_{r\theta}=0$)。其中 $\pi(a,b)$ 对 r 的导数是 $\delta(r-a)-\delta(r-b)$。

把式(2)、式(3)、式(5)代入式(4)可得位移形式表示的运动方程：

$$\begin{aligned} &\left[C_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - C_{22}\frac{u}{r^2} + C_{66}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ &\left.(C_{12}+C_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta} - (C_{22}+C_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]\pi(a,b) + \\ &\left[C_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12}\left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)\right](\delta(r-a)-\delta(r-b)) = \\ &\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\pi(a,b) \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} &\left[(C_{12}+C_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta} + (C_{22}+C_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \right. \\ &\left.C_{66}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) + C_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}\right]\pi(a,b) + \\ &\left[C_{66}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)\right](\delta(r-a)-\delta(r-b)) = \\ &\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}\pi(a,b) \end{aligned} \tag{6b}$$

对于无限长空心圆柱体周向谐波的传播，可以把位移分量表示为：

$$u_r(r,\theta,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikb\theta-i\omega t)U(r) \tag{7a}$$

$$u_\theta(r,\theta,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikb\theta-i\omega t)V(r) \tag{7b}$$

其中，k 是波数，ω 是角频率，$U(r)$ 、$V(r)$ 是未知连续函数，把它们展开成一组正交归一函数组的线性组合[18]，即

$$U(r)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m^1Q_m(r)\,,\quad V(r)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m^2Q_m(r) \tag{8}$$

这里 $p_m^i(i=1,2)$ 是 Q_m 的待定系数。

$$Q_m(r)=\sqrt{\frac{2m+1}{b-a}}P_m\left(\frac{2r-b+a}{b-a}\right)$$

其中 P_m 代表第 m 阶勒让德多项式，那么 Q_m 就形成了一组完备的正交归一的多项式组。理论上 m 从 0 到 ∞，实际上对于求和多项式(8)，当 m 取到有限值 M 时，更高阶的项可以认为是高阶小量，忽略不计。M 的取值要根据所需要的模态阶数确定，所需的频散曲线模态阶数越高，则 M 的取值也越高。

把式(7)、式(8)代入式(6)得：

$$\begin{aligned}&\left[C_{11}\left(r^2\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}\right)-(C_{22}+k^2b^2C_{66})U+\right.\\&\left.ikb(C_{12}+C_{66})r\frac{\partial V}{\partial r}-ikb(C_{22}+C_{66})V\right]\pi(a,b)+\\&\left[C_{11}r^2\frac{\partial U}{\partial r}+C_{12}(rU+ikbrV)\right](\delta(r-a)-\delta(r-b))=\\&-\rho r^2\omega^2U\pi(a,b)\end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned}&\left[ikb(C_{12}+C_{66})r\frac{\partial U}{\partial r}+ikb(C_{22}+C_{66})U+\right.\\&\left.C_{66}\left(r^2\frac{\partial^2V}{\partial r^2}+ikbr\frac{\partial V}{\partial\theta}-V\right)-k^2b^2C_{22}V\right]\pi(a,b)+\\&\left[C_{66}\left(ikbrU+r^2\frac{\partial V}{\partial r}-rV\right)\right](\delta(r-a)-\delta(r-b))=\\&-\rho r^2\omega^2V\pi(a,b)\end{aligned} \tag{9b}$$

对于式(9)，两边同乘以 $Q_j^*(r)$，j 从 0 到 M，然后各式对 r 从 a 到 b 积分，利用勒让德正交多项式的正交性质，可以得到下面 $2(M+1)$ 个方程：

$$\begin{bmatrix}A_{11}^{j,m} & A_{12}^{j,m}\\ A_{21}^{j,m} & A_{22}^{j,m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_m^1\\ p_m^2\end{Bmatrix}=\eta^2\begin{bmatrix}M_m^j & 0\\ 0 & M_m^j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_m^1\\ p_m^2\end{Bmatrix} \tag{10}$$

这里求和指标 m 从 0 到 M 。$A_{\alpha\beta}^{j,m}(\alpha,\beta=1,2)$ 和 M_m^j 是矩阵的元素，在附录中给出。

方程(10)可以写成如下形式：

$$[M^{-1}A]_{j,m}^{\alpha,\beta}p_m^\beta=\eta^2p_j^\alpha$$

这里 $\eta=-\rho\omega^2$，是 $[M^{-1}A]_{j,m}^{\alpha,\beta}$ 的特征值，特征向量 p_j^α 代表了位移场的分布。使用数学软件 Mathmatica 函数 Eigenvalues 可以求解这个特征值问题。对于 $2(M+1)$ 维的方阵，将返回 $2(M+1)$ 个特征值。而问题的解只是那些随着 M 的增加，数值上收敛的特征值，即随 M 的增加，该阶模态已趋于稳定。

2　数值示例

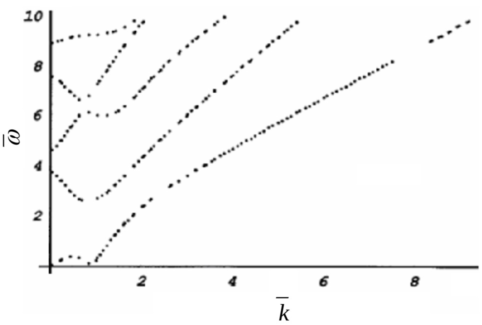
基于上述理论，开发了数值计算正交各向异性空心圆柱体周向导波频散关系的 Mathematica 程序。为了证明这种算法及程序的正确性，首先把程序应用于各向同性与横观各向同性材料，与已有结果进行比较；然后计算了单向纤维复合材料不同纤维增强强度对周向导波的影响；最后计算了不同径厚比的正交各向异性空心圆柱体周向导波的频散关系。

2.1　各向同性圆柱体的周向导波

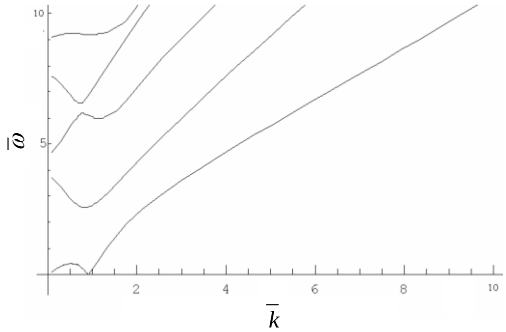
为与文献[14]得到的的各向同性均匀空心圆柱体中的周向导波的频散关系进行比较，这里采用同样的材料及几何尺寸进行计算。文献[14]采用的材料是铝，密度 $\rho=2700\text{kg/m}^3$，弹性常数为：$C_{11}=C_{22}=10.78\times10^{10}\text{Pa}$，$C_{12}=5.494\times10^{10}\text{Pa}$，$C_{66}=2.645\times10^{10}\text{Pa}$ 。几何尺寸为 $a=0.01\text{m}$，$b=0.1\text{m}$ 。两种方法(本文方法中 $M=5$)求得的频散曲线如图 2 所示。图中，$\bar{\omega}=\omega(b-a)\sqrt{\rho/\mu}$，$\bar{k}=k(b-a)$，均为无量纲量。图 2(a)是文献[14]中的图 13，可以看出，两者的结果是一致的。

2.2　横观各向同性圆柱体的周向导波

采用本文的方法对单向复合材料(纤维方向在 u_θ 方向)空心圆柱体中的周向导波的频散关系进行计算，与文献[14]所得结果比较。材料密度 $\rho=1580\text{kg/m}^3$，弹性常数为：$C_{11}=1.495\times10^{10}\text{Pa}$，$C_{22}=12.82\times10^{10}\text{Pa}$，$C_{12}=0.69\times10^{10}\text{Pa}$，$C_{66}=0.673\times10^{10}\text{Pa}$，几何尺寸为 $a=0.009\text{m}$，$b=0.01\text{m}$ 。两种方法求得的频散曲线如图 3 所示，图 3(a)是文献[14]中的图 15(b)。可见，两种方法所求结果同样也是一致的；但本文方法中取 $M=7$，文献[14]所用的傅里叶级数取到 $M=30$ 。



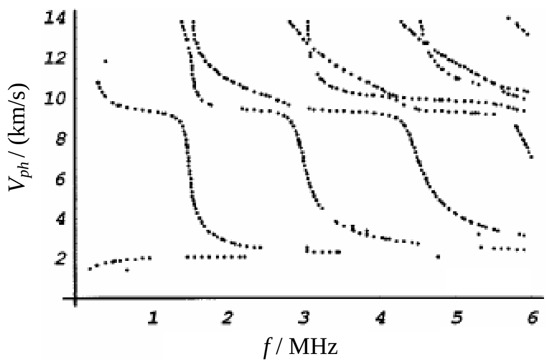
(a) Towfighi 等的结果



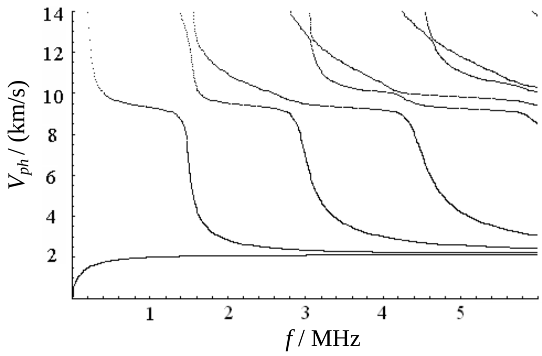
(b) 作者的结果

图 2 铝管中的周向导波的频散曲线

Fig.2 Guided circumferential wave dispersion curves for aluminum pipe



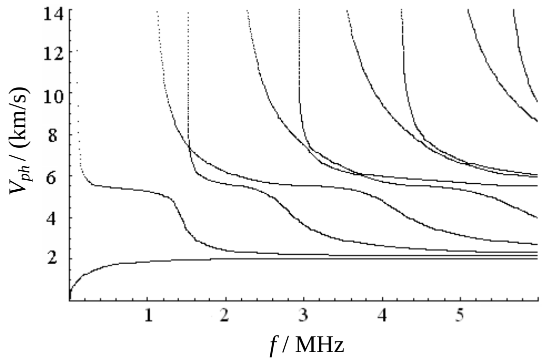
(a) Towfighi 等的结果



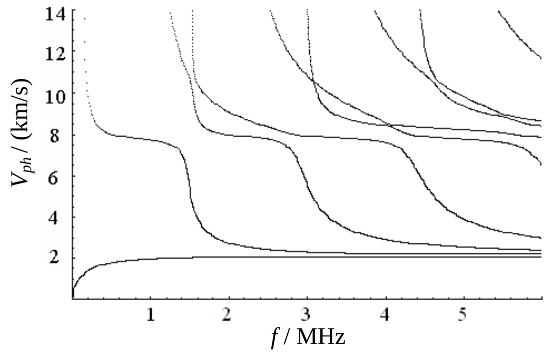
(b) 作者的结果

图 3 单向复合材料管道中周向导波的相速度频散曲线

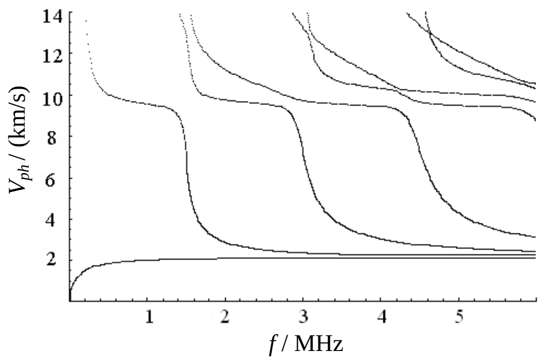
Fig.3 Guided circumferential wave dispersion curves for unidirectional composite pipe



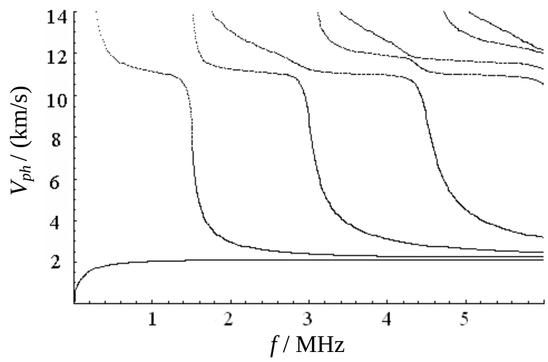
(a) $C_{22}=3C_{11}$



(b) $C_{22}=6C_{11}$



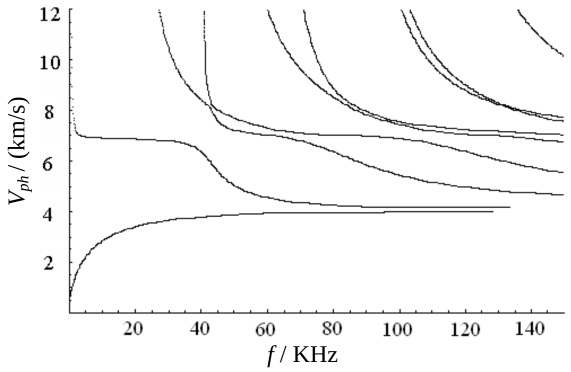
(c) $C_{22}=9C_{11}$



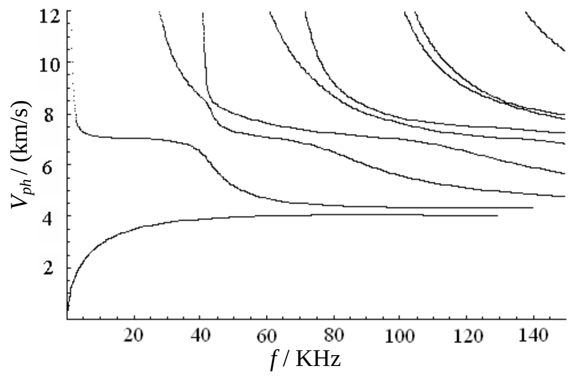
(d) $C_{22}=12C_{11}$

图 4 单向复合材料管道中纤维增强强度对频散曲线的影响

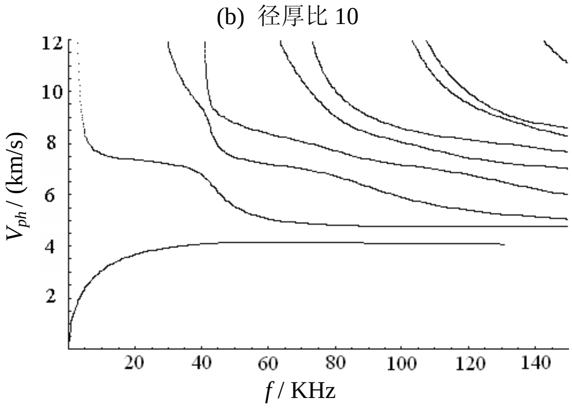
Fig.4 The effect of the variety of the fiber intensity on dispersion curves for unidirectional composite pipes



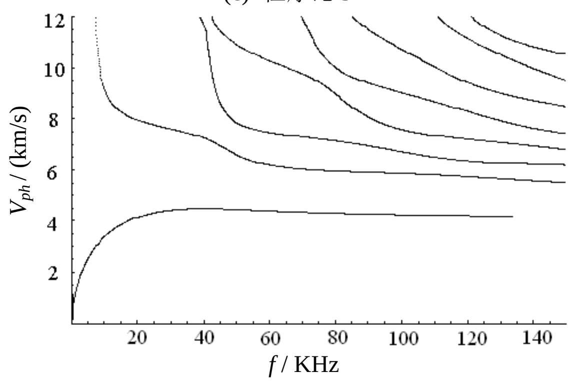
(a) 径厚比 20



(b) 径厚比 10



(c) 径厚比 5



(d) 径厚比 2.5

图 5　SiC-Si3N4 管道在相同壁厚不同径厚比下的周向导波频散曲线

Fig.5　Guided circumferential wave dispersion curves for SiC-Si3N4 orthotropic pipes under different ratios of outer radius to thickness

2.3　单向复合材料纤维增强强度对周向导波的影响

为了研究单向复合材料纤维增强强度对周向导波的影响，分别计算了四种不同纤维增强(纤维方向均在 u_θ 方向)强度的材料参数的管道周向导波。假设材料的密度 $\rho = 1580\text{kg/m}^3$ 和参数 $C_{11} = 1.495\times 10^{10}\text{Pa}$，$C_{12} = 0.69\times 10^{10}\text{Pa}$，$C_{66} = 0.673\times 10^{10}\text{Pa}$ 都不变，而 C_{22} 分别取为 C_{11} 的 3 倍、6 倍、9 倍和 12 倍。其相速度频散曲线如图 5 所示。可以看出，在此类问题中，相速度各模态频散曲线均有两个相对的平坦区域，即频散现象不严重的频率段；纤维方向增强强度的改变只对相速度较高的那个平坦区域有影响，即随着纤维增强强度的增加，这个平坦区域的相速度值随之增高。我们看一下沿纤维方向传播的竖直剪切波波速和纵波波速[19] $Vsv = \sqrt{C_{66}/\rho} = 2064\text{m/s}$、4 种不同情形下的纵波波速分别为 $V_p = \sqrt{C_{22}/\rho} = 5328\text{m/s}$，$V_p = 7535\text{m/s}$，$V_p = 9228\text{m/s}$，$V_p = 10656\text{m/s}$。可以看出，这两个平坦区域的相速度值与沿周向传播的纵波波速及竖直剪切波波速很接近。

2.4　正交各向异性空心圆柱体的周向导波

为了观察外径厚度比对管道周向导波频散情况的影响，计算了 4 种相同壁厚不同径厚比的正交各向异性耐磨材料 SiC-Si3N4 管道中周向导波的相速度频散曲线。材料密度 $\rho = 2510\text{kg/m}^3$，弹性常数为：$C_{11} = 20.65\times 10^{10}\text{Pa}$，$C_{22} = 12\times 10^{10}\text{Pa}$，$C_{12} = 3.188\times 10^{10}\text{Pa}$，$C_{66} = 4.52\times 10^{10}\text{Pa}$，对于几何尺寸，保持壁厚为 0.1m 不变，$a$ 分别取 1.9m、0.9m、0.4m 和 0.15m，即它们的外径厚度比分别为 20、10、5 和 2.5。计算时取 $M = 7$。求得的频散曲线如图 5 所示。从图中可以看出：在一定频率范围内，随着径厚比的减小，周向导波模态数成减小的趋势，各模态相速度随频率增加而向一起聚拢则越来越慢；径厚比的变化对高阶模态的影响要比低阶模态大；当径厚比从 20 减到 10 时，径厚比对频散曲线的影响并不十分显著，但随着径厚比越来越小，径厚比的变化对频散曲线的影响越来越大。

3　结论

利用正交多项式展开法研究了正交各向异性空心圆柱体中的周向导波。可以得到以下结论：

(1) 该方法利用正交多项式的正交特性把耦合

的波动方程转化为特征值问题，使得问题得到简化。

(2) 通过与已有各向同性和横观各向同性的数据相比，说明了该方法的可行性，且具有收敛速度快的特点。

(3) 对于单向复合材料，纤维方向与波传播方向一致时，纤维增强强度的变化对于周向导波影响仅限于频散曲线中接近纵波波速的平坦区数值，增强纤维的强度越高，这个相速度平坦区域的数值越高。

(4) 通过求解不同外径厚度比的正交各向异性空心圆柱体中的周向超声导波的频散曲线，说明了径厚比的变化对周向导波频散的影响：在一定频率范围内，随着径厚比的减小，周向导波模态数呈减小的趋势，各模态相速度随频率增加而向一起聚拢则越来越慢；径厚比的变化对高阶模态的影响要比低阶模态大；随着径厚比越来越小，径厚比的变化对频散曲线的影响越来越大。

参考文献：

[1] 何存富，吴斌，范晋伟. 超声柱面导波技术及其应用研究进展[J]. 力学进展, 2001, 31(2): 203~214.
He Cunfu, Wu Bin, Fan Jinwei. Advances in ultrasonic cylindrical guided waves techniques and their applications [J]. Advances in M Ecttanics, 2001, 31(2): 203~214. (in Chinese)

[2] 焦敬品，何存富，吴斌. 管道超声导波检测技术研究进展[J]. 实验力学, 2002, 17(1): 1~9.
Jiao Jingpin, He Cunfu, Wu Bin. Application of ultrasonic guided waves in pipes [J]. NDT Journal of Experimental Mechanics, 2002, 17(1): 1~9. (in Chinese)

[3] Rose J L, James B. Using ultrasonic guided wave mode cutoff for corrosion detection and classification [C]. IEEE Ultrasonics Symposium, 1998, 1(8): 851~853.

[4] Alleyne D N, Cawley P. Long range propagation of Lamb waves in chemical plant pipework [J]. Materials Evaluation, 1997, 55(4): 505~508.

[5] Grace O D, Goodman R R. Circumferential waves on solid cyliners [J]. J. Acoust. Soc. Am., 1966, 39: 173~174.

[6] Brekhovskikh L M. Surface waves confined to the curvature of the boundary in solid [J]. Sov. Phys. Acoust., 1968, 13: 462~472.

[7] Cerv J. Dispersion of elastic waves and Rayleigh-type waves in a thin disc [J]. Acta Tech. CSAV, 1988, 89: 89~99.

[8] Liu Guo, Qu Jianmin, Guided circumferential waves in a circular annulus [J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 1998, 65(3): 424~430.

[9] Liu Guo, Qu Jianmin. Transient wave propagation in a circular annulus subjected to transient excitation on its outer surface [J]. Journal Acoustical Society of America, 1998, 104(3): 1210~1220.

[10] Valle C, Qu J, Jacobs L J. Guided circumferential waves in layered cylinders [J]. Int. J. Eng. Sci., 1999, 37: 1369~1387.

[11] Armenakas A E, Reitz E S. Propagation of harmonic waves in orthotropic, circular cylindrical shell [J]. ASME J. Appl. Mech., 1973, 40: 168~174.

[12] Lefebvre J E, Zhang V, Haddou A. Acoustic modes in cylindrically orthotropic hollow cylinders [A]. Proceedings of the 2001 IEEE Ultrasonics Symposium. Proceedings [C]. An International Symposium (Cat. No.01CH37263), 2001, 1(1): 769~772.

[13] Elmaimouni Lahoucine, Lefebvre J E, Zhang V. A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length [J]. Wave Motion, 2005, 42(2): 177~189.

[14] Towfighi S, Kundu T, Ehsani M. Elastic wave propagation in circumferential direction in anisotripic cylindrical curved plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(3): 283~291.

[15] Maradudin A A, Wallis R F, Mills D L. Vibrational edge modes in finite crystals [J]. Physical Review B (Solid State), 1972, 6(4): 1106~1111.

[16] Lefebvre J E, Zhang V, Gazalet J. Legendre polynomial approach for modeling free-ultrasonic waves in multilayered plates [J]. Journal of Applied Physics, 1999, 85(7): 3419~3427.

[17] Ludwig W, Lengeler B. Surface waves and rotational invariance in lattice theory [J]. Solid State Commun., 1964, 2: 83~86.

[18] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京：北京大学出版社, 2000. 35~40.
Wang Zhuxi, Guo Dunren. Introduction to special function [M]. Beijing: Peking University Press, 2000. 35~40. (in Chinese)

[19] Auld B A. Acoustic fields and waves in solids (Vol.1) [M]. New York: John Wiley and Sons Inc., 1973. 308~313.

附录：

$$A_{11}^{j,m} = C_{11}[u(m,j,2,2)+u(m,j,1,1)] - [(kb)^2 C_{66}+C_{22}]u(m,j,0,0)+C_{11}k(m,j,2,1)+C_{12}k(m,j,1,0);$$

$$A_{12}^{j,m} = ikb(C_{66}+C_{12})u(m,j,1,1) - ikb(C_{66}+C_{22})u(m,j,0,0)+ikbC_{12}k(m,j,1,0);$$

$$A_{21}^{j,m} = ikb(C_{66}+C_{12})u(m,j,1,1) + ikb(C_{66}+C_{22})u(m,j,0,0)+ikbC_{66}k(m,j,1,0);$$

$$A_{22}^{j,m} = C_{66}[u(m,j,2,2)+u(m,j,1,1)] - [C_{66}+(kb)^2 C_{22}]u(m,j,0,0)+C_{66}(k(m,j,2,1)-k(m,j,1,0));$$

$$M_m^j = u(m,j,2,0)\text{ ；}$$

$$u(m,j,n,l) = \int_a^b Q_j^*(r) r^n \frac{\partial^l Q_m(r)}{\partial r^l}\mathrm{d}r\text{ ；}$$

$$k(m,j,n,l) = \int_a^b Q_j^*(r) r^n \frac{\partial \pi(r)}{\partial r}\frac{\partial^l Q_m(r)}{\partial r^l}\mathrm{d}r\text{ 。}$$