第2卷 第4期　　工 程 力 学　　Vol.2, NO.4
1985年12月　　Engineering Mechanics　　December, 1985

连续壁梁的弹性力学精确解

李映辉

（重庆建筑工程学院）

摘　　要

本文根据连续壁梁的不同支座宽度，用级数表示的应力函数给出了弹性力学的精确解。并和热莫奇金的解答作了比较，指出了热莫奇金解答中连续壁梁某些部分应力出现错误的原因。本文解答可用于连续壁梁设计。

一、公式的推导

现有一无穷多跨跨度相等的连续壁梁。如图1所示，每跨跨度为$2L$，高为H，厚为1，下边支于柱顶，柱宽为$2b$。

因为跨数为无穷多，中间各跨情况可看成完全相同，故可只取其一跨来分析。设壁梁上受均布荷载，集度为q，支座反力的一半为qL。如图2所示。若支座反力为斜直

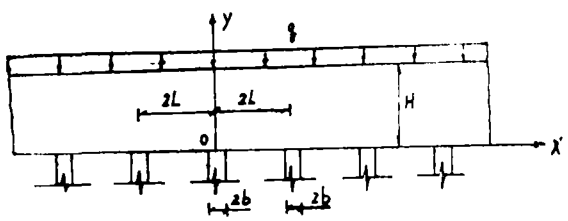


图1

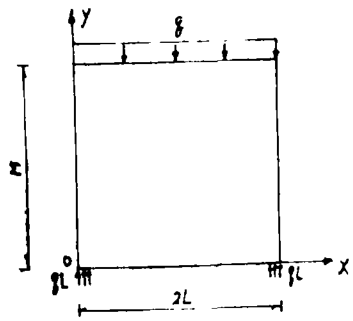


图2

线分布，当H为$2L$，$b=0.1L$，$\mu=0.3$时，可算出支座中点反力集度为$-0.06q$，支座边缘反力集度为$-19.94q$。但考虑到梁、柱接触处的塑性变形，当边缘处反力达到一定值时，变形增加变快。荷载继续增加，边缘处反力增加很少，其余部分反力增加较多，这就使支座反力接近均匀分布。所以可假设反力为均匀分布。在$0\leqslant x\leqslant 2L$范围内将反力展开为级数。可得级数表示的反力：

$$q_1=q+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2qL}{n\pi b}\sin\frac{n\pi b}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

• 本文于1985年1月收到

因 σ_x、 σ_y是x的偶函数，应力函数的形式取为

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\left(C_1 sh\frac{n\pi y}{L}+C_2 ch\frac{n\pi y}{L}+C_3 y sh\frac{n\pi y}{L}+C_4 y ch\frac{n\pi y}{L}\right)$$
$$+D_1x^2+D_2xy+D_3y^2$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\left[\frac{n\pi}{L}\left(C_1 sh\frac{n\pi y}{L}+C_3 ch\frac{n\pi y}{L}+C_3 y sh\frac{n\pi y}{L}\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_4 y ch\frac{n\pi y}{L}\right)+2\left(C_3 ch\frac{n\pi y}{L}+C_4 sh\frac{n\pi y}{L}\right)\right]+2D_3$$

$$\sigma y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\cos\frac{n\pi y}{L}\left(C_1 sh\frac{n\pi y}{L}+C_2 ch\frac{n\pi y}{L}+C_3 y sh\frac{n\pi y}{L}\right.$$
$$\left.+C_4 y ch\frac{n\pi y}{L}\right)+2D_1$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[\frac{n\pi}{L}\left(C_1 ch\frac{n\pi y}{L}+C_2 sh\frac{n\pi y}{L}+C_3 y ch\frac{\pi y}{Ln}\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_4 y sh\frac{n\pi y}{L}\right)+C_3 sh\frac{n\pi y}{L}+C_4 ch\frac{n\pi y}{L}\right]-D_2$$

因τ_{xy}是x的奇函数，可知$D_2=0$。

由边界条件和平衡条件：

1)．$(\tau_{xy})_{x=0}=0$，自然满足，

2)．$(\tau_{xy})_{x=2L}=0$，自然满足，

3)．半跨长的任一水平面应满足$\int_0^L\sigma_y dx=-qL$，

4)．　$(\tau_{xy})_{y=0}=0$，　　　5)．$(\sigma_y)_{y=0}=-q_1$，

6)．$(\tau_{xy})_{y=H}=0$，　　　7)．$\sigma)_{y=H}=-q$，

8)．任一铅直面内$\int_0^H\sigma_x d_y=0$、

由以上条件可求出

$$\sigma_x=2q\sum_{n-1}^{\infty}\frac{L}{n\pi b}\sin\frac{n\pi b}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\left[sh\frac{n\pi y}{L}\left(\alpha_n-\frac{n\pi y}{L}\beta_n\right)\right.$$
$$\left.+ch\frac{n\pi y}{L}\left(1-2\beta_n+\frac{n\pi y}{L}\alpha_n\right)\right] \quad (1)$$

$$\sigma_y=-2q\sum_{n-1}^{\infty}\frac{L}{n\pi b}\sin\frac{n\pi b}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\left[-sh\frac{n\pi y}{L}\left(\alpha_n+\frac{n\pi y}{L}\beta_n\right)\right.$$
$$\left.+ch\frac{n\pi y}{L}\left(1+\frac{n\pi y}{L}\alpha_n\right)\right]-q \quad (2)$$

$$\tau_{xy}=2q\sum_{n-1}^{\infty}\frac{L}{n\pi y}\sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi y}{L}\left(sh\frac{n\pi x}{L}\left(1-\beta n+\frac{n\pi y}{L}\alpha_n\right)\right.$$

$$-\frac{n\pi y}{L}\beta_n ch\frac{n\pi y}{L}\Big)$$

其中 $$\alpha_n=\frac{\frac{n\pi H}{L}+sh\frac{n\pi H}{L}ch\frac{n\pi H}{L}}{sh^2\frac{n\pi H}{L}-\frac{n^2\pi^2H^2}{L^2}}\qquad \beta_n=\frac{sh^2\frac{n\pi H}{L}}{sh^2\frac{n\pi H}{L}-\frac{n^2\pi^2H^2}{L^2}}$$

设原点为固定点，即 $U\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$，$U\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$。可求出

$$U=\frac{2q}{E}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\frac{L}{n\pi b}\sin\frac{n\pi b}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big\{sh\frac{n\pi y}{L}\Big[(1-\mu)\alpha_n-\frac{n\pi y}{L}(1+\mu)\beta_n\Big]$$
$$+ch\frac{n\pi y}{L}\Big[1+\mu-2\beta_n+\frac{n\pi y}{L}(1+\mu)\alpha_n\Big]\Big\}+\frac{q\mu x}{E}\tag{4}$$

$$U=-\frac{2q}{E}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\cdot\frac{L}{n\pi b}\sin\frac{n\pi b}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big\{-ch\frac{n\pi y}{L}\Big[2\alpha_n+\frac{n\pi y}{L}(1+\mu)\beta_n\Big]$$
$$+sh\frac{n\pi y}{L}\Big[1+\mu+(1-\mu)\beta_n+\frac{n\pi y}{L}(1+\mu)\alpha_n\Big]\Big\}$$
$$-\frac{2q}{E}\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha_n\frac{L}{n\pi}\cdot\frac{L}{n\pi b}\sin\frac{n\pi b}{L}-\frac{q}{E}y\tag{5}$$

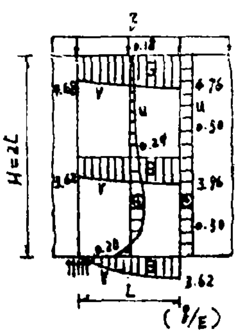
上列5个表达式就是计算连续壁梁应力和位移的公式。可供设计使用。

二、计算实例

设梁高$H=2L$，支座宽的一半$b=0.1L$，$\mu=0.3$，当n较大时，$\alpha_n=\beta_n=1$。算出各点位移如图3所示，各点应力如图4所示。

由计算可知，支座宽度越小，支座处σ_x和σ_y值就越大。当支座宽$2b\to0$时，

$$\sin\frac{n\pi b}{L}\doteq\frac{n\pi b}{L}$$



3 $\left(\frac{q}{E}\right)$

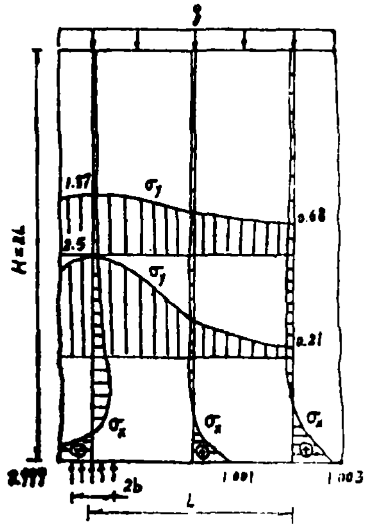


图4 (q)

$$\sigma_x = 2q\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L}\left(sh\frac{n\pi y}{L}(\alpha_n - \frac{n\pi y}{L}\beta_n) + ch\frac{n\pi y}{L}(1 - 2\beta_n + \frac{n\pi y}{L}\alpha_n)\right)$$

$$\sigma_y = -2q\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi y}{L}\left(-sh\frac{n\pi y}{L}(\alpha_n + \frac{n\pi y}{L}\beta_n) + ch\frac{n\pi y}{L}(1 + \frac{n\pi y}{L}\alpha_n)\right) - q$$

在支座处，即当$x=0$，$y=0$时，$\sigma_y\to\infty$，$\sigma_x\to\infty$。

三、和热莫奇金解法比较

热莫奇金用级数求解这一问题时[1][2][3]，把支座反力看成集中力作用在梁上，取下边界条件为$(\sigma_y)_{y=0}=0$，作出应力图（图5）。从图中可见，梁的下边全部受拉，这是不可能的。另外在$x=0$的横截面$\sigma_x>0$，这和任一横截面的平均条件$\int_0^H \sigma_x dy = 0$是矛盾的。在$x=0$，$y=0$处σ_x不应为q而应趋于无穷大。这些都是下边界条件不正确引起的。本文正确地描述了下边界条件，所以不会出现矛盾的结果。而且还可以取原点为固定点求铅直位移。

本文在写作过程中得到肖明心同志的热情指导和帮助，特此致以衷心的感谢！

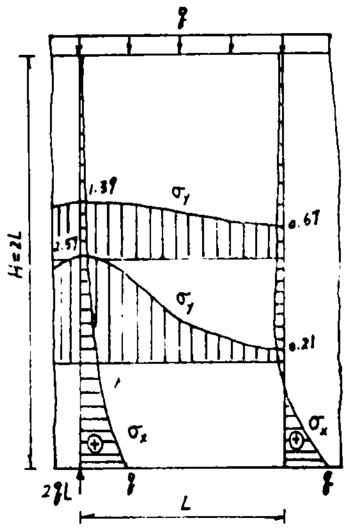


图5（q）

参考文献

〔1〕林钟祺，《弹性力学及其数学方法》，重庆建筑工程学院出版社（1965）
〔2〕热莫奇金著，徐芝编、吴永祺译，《弹性理论》，建筑工业出版社（1959）
〔3〕杨桂通，《弹塑性力学》，人民教育出版社）1980）

·办刊动态·

由钱伟长教授主持的上海国际非线性力学学术交流会议对《工程力学》很感兴趣受到广泛的欢迎。现摘来函如下：

"今收到《工程力学》编辑部送来《工程力学》杂志贰百本，并已在国际非线性力学会议上散发给各位代表（国内外专家学者），受到广泛欢迎。感谢您们对会议的支持"。

国际非线性力学会议会务组
上海市应用数学和力学研究所（代章）
一九八五年十一月四日

THE ACCURATE SOLUTION OF CONTINUOUS WALL BEAM ON MANY SUPPORTS BASED ON THEORY OF ELASTICITY

Li Yinghui

(Chongqiug Institute of Architectural Engineering)

Abstract

According to the different width of the Pillars of continuous wall beam on many supports, this paper gives the accurate solution of the problem, which is based on theory of elastieity, with tie help of stress function expressed by series. Compare the solution with ЖеМоЧКИН's solution, we point oat why there is inccorrect stress distribution in some part of continuous wall beam in ЖеМочкИН's solution. The solution of thie paper may be applied to design continuous wall beam on many supports.

·新信息·

纽约帝国大厦的安全系数有多大？

三十年代初，美国华尔于百万富翁拉斯科布请著名建筑师威廉·拉姆修建摩天楼。这座大楼为102层，高为381米（即1250英尺），高宽比为9.3，结构体系为框架—剪力墙共同工作体系，建筑周期为一年零45天，取名叫纽约帝国大厦。大厦的结构安全系数很大，倒底有多大？1945年一架B_{25}轰炸机以每小时321.86公里的速度（即200英里／每小时）横撞在帝国大厦第79层上，而大厦只晃动几下，依然屹立，没有倒塌，至今使用良好。这就可以想像纽约帝国大厦的安全系数有多大了。

（本刊记者：华坦）