

文章编号: 1000-4750(2005)06-0007-08

# 平衡矩阵理论的探讨及一索杆梁杂交空间结构的静力和稳定性分析

\*张志宏<sup>1</sup>, 张明山<sup>2</sup>, 董石麟<sup>1</sup>

(1. 浙江大学空间结构研究中心, 杭州 310027; 2. 浙江大学建筑设计研究院, 杭州 310027)

**摘 要:** 首先对索杆杂交结构采用平衡矩阵理论进行了探讨。对于索杆杂交结构而言, 可以根据平衡矩阵确定体系在初状态几何下的整体预应力分布和大小, 但是必须考虑变形相容条件和本构关系即各个单元的柔度分布。只有满足体系柔度分布的杆件截面尺寸的结构才能最终施工张成给定的预应力分布和设计几何。由相容方程和平衡方程提出了包含局部超静定结构的索杆杂交结构的柔度分布确定方法和独立柔度分布模态这一概念。算例分析结果验证了方法的正确性。其次, 对一索杆梁杂交空间结构的计算分析方法及其初步的静力及其稳定性进行了研究。基于局部分析法对索杆梁体系的预应力分布和大小进行了优化分析。在优化目标下, 最优的预应力分布是外环预应力较大, 中环、内环预应力要小很多。并以预应力作为整体自平衡的初始内力情况下对其进行了初步静力和稳定性分析。结果表明柔性体系和刚性体系的杂交实际上只能为刚性体系提供大变形的安全储备, 而并不能有效的降低体系的挠度, 但是预应力的存在却可以有效的改变梁单元轴力的性质和水平。相比单层网壳, 索杆梁体系的稳定性能有了较大提高。

**关键词:** 找力分析; 柔度分布; 弦支穹顶; 静力分析; 稳定性; 预应力; 优化

中图分类号: TU394 文献标识码: A

## DISCUSSION ON THE EQUILIBRIUM MATRIX THEORY AND STATIC AND STABILITY ANALYSIS OF A HYBRID SPATIAL STRUCTURE COMPOSED OF CABLES, BARS AND BEAMS

\*ZHANG Zhi-hong<sup>1</sup>, ZHANG Ming-shan<sup>2</sup>, DONG Shi-lin<sup>1</sup>

(1. Space Structures Research Center of Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. Zhejiang University Architecture Design and Research Institute, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** The equilibrium matrix theory in the analysis of cable-bar hybrid structures is discussed in this paper. For cable-bar hybrid structures the initial pre-stress distribution can be determined using the equilibrium matrix theory. The flexibility distribution of each cable or bar element should be considered at the same time. Bar elements with section sizes satisfying the flexibility distribution, can be used to construct the structure successfully eventually. A new method for flexibility distribution determination of cable-bar hybrid structures is proposed utilizing the compatible equation and the equilibrium equation. A new concept, independent flexibility distribution mode, is presented here. It is verified by a numerical example. In addition, a computational analysis

收稿日期: 2003-11-07; 修改日期: 2004-06-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50278086)

作者简介: \*张志宏(1974), 男, 山东昌邑人, 博士后, 主要从事大跨度空间结构的理论分析和数值方法及风振分析方面的研究  
(E-mail: zhangzh@arch.t-kougei.ac.jp);

张明山(1971), 男, 安徽萧县人, 工学博士, 主要从事大跨度空间结构的理论分析和设计工作;

董石麟(1932), 男, 浙江杭州人, 中国工程院院士, 长期从事大跨度空间结构的学科研究和设计工作。

method of a hybrid structure composed of cables, bars and beams and its preliminary static and stability properties are presented in this paper. Based on the local analysis method the distribution and magnitude of pre-stress of this hybrid structure is analyzed using optimal theory. The outmost ring has larger pre-stress than the middle one and the inner one. Static and stability properties are analyzed by taking the pre-stress as self-equilibrium initial internal force. It is found that the flexible cable-bar system and pre-stress in the whole structure cannot reduce the deflection dramatically. But the pre-stress can affect the axial force distribution in beams very much. In comparison with single-layer reticulated shells this type of hybrid structures has high stability.

**Key words:** force finding; flexibility distribution; suspension dome; static analysis; stability; pre-stress; optimization

平衡矩阵理论最初由 Pellegrino<sup>[1~3]</sup>提出,该方法对于确定一阶或高阶无穷小机构的初始预应力分布理论上是完善的,但在实际应用时却存在问题。本文在研究过程中发现不能认为任何的结构体系都可以仅仅采用体系的平衡矩阵就能确定其初始预应力分布,对于通常的超静定杆系结构和包含一阶无穷小机构的索梁杂交空间结构还须考虑相容条件,各个单元的截面尺寸的确定并不是任意的。

所谓索杆杂交结构是指由索单元和杆单元组成的刚柔杂交的空间结构体系。本文认为在初始自平衡内力确定的情况下索杆杂交结构体系还必须确定各个单元的截面特性分布。问题的引申意义在于判断索杆杂交体系是否整体施工可行。根据平衡矩阵理论<sup>[1~5]</sup>确定的体系初始预应力分布不一定能够实现。初始几何构形(设计构形)未必能够张成,如果放松主动张拉单元,被动张拉单元的内力未必能够完全释放。该问题和包含一阶或高阶无穷小机构的杂交结构的施工过程密切相关的。问题的提出和解决是对平衡矩阵理论的补充和进一步完善,是索杆杂交结构体系单元截面设计和施工可行性分析必须考虑的因素。

通常结构体系分为动不定、静定体系(超静定结构);动定、静定体系(静定结构);动不定、静不定体系;动定、静不定体系(不可刚化机构)。根据结构力学的一般概念,可以得到以下结论。

(1) 动定、静定体系(静定结构)和动定、静不定体系(不可刚化机构)是不存在这个问题的。因为对动定、静定体系而言,没有多余约束,只需要平衡方程就能确定结构体系的各个力学变量。而动定、静不定体系不可以作为传递力流的结构。

(2) 可刚化的动不定、静不定体系可能存在多余约束,应该考虑多余约束方程即相容方程和材料

本构关系进行验算。

(3) 对于不包括局部超静定结构和局部已刚化的张拉整体单元的静不定、动不定体系,由于体系整体和各个局部都是一个欠约束体系,放松主动张拉单元之后,体系的被动张拉单元的内力释放没有多余约束的强制作用,因此,其各个单元的截面分布和大小的确定可以完全根据单元本身的内力水平来确定,理论上是任意的。只是不同的截面分布和大小下的体系的零状态几何不同,但可以整体张成同样的初状态几何。

(4) 对于超静定结构、包含可刚化一阶无穷小机构的杂交结构,如张弦梁结构、弦支穹顶结构等,单元的截面分布必须满足施工过程中的相容条件。

基于上述讨论,本文首次推导并提出了索杆杂交结构独立柔度分布模态这一概念。

弦支穹顶是由日本法政大学川口卫教授将索穹顶等张拉整体结构的思路应用于单层球面网壳而形成的一种新型杂交空间结构体系。单层球面网壳由于整体稳定性较差而使其应用和发展受到极大的限制,同时单层球面网壳对支座存在较大的水平推力,往往需要在其周边设置受拉环梁,索穹顶等完全柔性结构需要对拉索施加较大的预拉力才能使结构成形,同时要求在周边支座设置强大的受压环梁以平衡拉索预拉力。通过杂交得到的弦支穹顶一方面改善了单层球面网壳结构的稳定性,使结构能跨越更大的空间,另一方面新结构体系具有一定的刚度,使其设计、施工及节点构造与索穹顶等完全柔性结构相比得到了较大简化。同时,两种结构体系对支座的作用相互抵消,使结构体系的自平衡程度得到极大的提高。弦支穹顶在我国已有工程应用,如昆明柏联广场 15m 穹顶<sup>[6]</sup>、天津保税区一商务中心<sup>[7]</sup>。

与以往弦支穹顶的研究不同的是,本文的索杆

梁体系中的上部网壳结构采用梁单元描述，并且是以设计几何为参考构形同时考虑梁单元的初始内力的静力和稳定性分析。该种梁单元描述的类型弦支穹顶的结构和同时考虑初始自平衡内力的分析方法国内外文献中还未见。

静力和稳定性分析是结构计算分析中重要的分析内容，本文静力和稳定性分析的具体内容包括：对 1/10 矢跨比肋环型索杆梁张拉结构采用杆单元来描述索段，采用局部分析法<sup>[8]</sup>确定结构最终的内力分布。引入优化理论对其做进一步的分析。在确定了体系初始态内力分布之后，考察该种结构在最优的预应力分布和大小下的静力性能和多种预应力模式及梁截面尺寸下的稳定性。

## 1 索杆杂交结构采用平衡矩阵理论的探讨

基本假设：体系初始几何(建筑方案)给定；体系的预应力分布已确定；体系的单元种类已确定即已经确定那些单元为索单元、杆单元。

待求：体系的截面特性的分布。

原因：体系基于初始几何的平衡矩阵只和初始几何的节点坐标和体系的单元种类的分布有关，而和体系各个单元的截面分布和材料特性无关。由体系平衡矩阵可以求得体系的各个单元的自平衡内力(不考虑自重)，如果任意确定体系的截面尺寸和截面分布，通过本构关系可求得各个单元的相对变形  $\varepsilon$ ，则单元本身满足平衡条件、本构关系(物理条件)，整个体系也已经满足平衡条件，接下来有两个问题，一是后续的荷载分析；二是在初状态几何以前的零状态几何的确定问题。实际的结构施工过程中总是通过张拉主动张拉单元来获取自平衡的内力，因此，考虑自重影响的施工过程，体系的各个单元总是由无内力状态(主动张拉单元)或自重内力状态(被动张拉单元)到初始自平衡内力与考虑自重引起的内力叠加的内力态。在施工张拉过程中并不是所有的体系在任意假设的截面分布和大小下都能准确的达到初始几何构形在自重作用下的几何。因为施工过程的每一时刻都必须满足  $A^T U = \bar{\varepsilon}$ ，这便要求施工结束时  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ ，而这一条件必须在一定的截面分布和大小下才能满足。反过来，如果放松主动张拉单元，并不是所有的单元的自平衡内力都能得到释放，这可以通过一个简单的索杆杂交结构体系来说明，如果放松主动张拉单元之后的体系包

含通常所说的局部超静定结构，那么局部超静定结构的单元内力释放过程中，其各个节点的位移必须满足多余约束条件即相容条件，显然，任意假设的单元截面分布和大小并不总能满足施工反分析过程的相容性条件，不满足施工反分析过程相容条件的单元的内力就得不到完全释放。因此，任意假设的体系的截面分布就不总是整体施工可行的。

### 1.1 基本方程

$$[A]\{t\} = \{f\} \quad (1)$$

$$[B]\{U\} = \{\varepsilon\} \quad (2)$$

其中  $[A]^T = [B]$ ，式(1)、(2)中， $[A]$  为体系基于初始几何平衡矩阵； $[B]$  为体系基于初始构形的相容矩阵； $\{t\}$  为单元独立内力矢量； $\{f\}$  为节点外荷载矢量； $\{U\}$  为节点位移矢量； $\{\varepsilon\}$  为单元相对变形矢量，对杆单元而言即为单元的伸长量  $\Delta l$ 。注意，式(1)、(2)适用于小变形假设，或者说适用于加载过程中各个微小荷载步的某一邻域。

令杆单元  $i$  的长度为  $l_i$ ，面积为  $A_i$ ，材料弹性模量  $E_i$ ，杆单元或索单元的轴向内力为  $t_i$ ，单元的相对伸长量为  $\Delta l_i$ 。由本构关系可得

$$\frac{t_i l_i}{E_i A_i} = \Delta l_i \quad (3)$$

则

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \vdots \\ \Delta l_i \\ \vdots \\ \Delta l_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 l_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & t_i l_i & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & t_n l_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/(E_1 A_1) \\ \vdots \\ 1/(E_i A_i) \\ \vdots \\ 1/(E_n A_n) \end{Bmatrix} = [h]\{S\} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)可得

$$[B]\{U\} = \{\varepsilon\} = [h]\{S\} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \{U\} = [B]^+ [h]\{S\} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \{U\} = [R]\{S\}, [R] = [B]^+ [h] \quad (7)$$

由奇异值分解可得

$$[R] = [u]^T [v][w]^T \quad (8)$$

由平衡矩阵理论， $[R]$  的奇异值分解可得到  $\{S\}$  的独立分布模态，而  $\{S\}$  为体系的单元柔度分布矢量，因此本文提出由式(8)可得体系初始几何的独立单元柔度分布模态  $\{S_i\}$ ，任意的柔度分布必定是  $\{S_i\}$  的线性组合，即

$$\{S\} = \sum_{i=1}^k \gamma_i \{S_i\} \quad (9)$$

$k$  为体系独立单元柔度分布模态总数, 接下来的工作应当是确定系数  $\gamma_i$  的取值问题, 显然, 截面分布必须满足体系施工的整体可行,  $\gamma_i$  的取值问题是一个优化问题, 不同的优化目标可以得到不同的结果。由式(4)还可以看出向量  $\{S\}$  实际上是体系的柔度分布向量, 因此, 从这一意义上说, 体系的柔度分布或刚度分布问题实际上是单元截面确定问题, 而结构的刚度、强度和稳定性是结构设计的三要素。

另外, 由式(7)也可得

$$\{S\} = [h]^{-1} [B] \{U\} \quad (10)$$

式(10)表明, 如果施工过程的位移  $\{U\}$  已知且满足小变形的假设, 则可以确定唯一的体系截面分布形式。由式(6)则可以求出施工过程中各节点的位移增量, 条件是小变形。如大变形则要采用增量的形式。

## 1.2 算例

算例 1: 一简单的杂交结构如图 1

首先, 确定结构的独立自应力模态(表 1), 由表 1 可见该结构有 2 个独立自应力模态, 因此须增加两个条件来确定组合因子。本文为验证截面特性的分布问题根据单元的内力为 100N 和单元、内力相等确定一组单元内力分布和大小为  $f_1$ , 根据单元的内力为 100N、单元内力为单元内力的一半来确定第二组单元内力分布和大小为  $f_2$ (如表 2 所示)。其次, 由  $f_1$  或  $f_2$  组装结构的截面特性矩阵, 进行奇异值分解得到结构截面特性分布矢量(如表 3、4 所示), 对杆单元为单元柔度分布矢量。

为验证上述结构的正确性, 采用文献[4]提出的局部分析法按照上述截面特性分布矢量、截断单元来验证上述内力分布的正确性。

由表 3、4 可见只有在表中所示矢量张成的柔度分布矢量空间内, 假定的内力分布才是能够实现的、整体施工可行的。由表 3、4 还可以看出在本算例假定的内力分布下单元和、单元和的柔度必须一样, 而单元的柔度为零, 也就是必须为刚性杆, 这怎样解释呢? 本文认为由矩阵理论, 式(8)得到的单元独立柔度分布模态为式(7)的零空间基底, 所谓矩阵的零空间是指  $[A]\{x\} = 0$  的  $\{x\}$  形成的矢量空间, 所以要在初状态几何下求解单元的独立柔度分布矢量则单元的柔度必须为零, 否则便会有节点位移。实际的结构, 单元是不可能采

用刚性杆的, 可以认为柔度为零的单元的柔度是任意的或只和施工过程的要求有关。

## 2 索杆梁杂交结构静力和稳定性分析

### 2.1 局部分析法

文献[6]提出了将梁单元分离结构分块的方法-局部分析法。由体系总平衡矩阵求解体系独立自应力模态的方法, 总平衡矩阵描述的是体系各个单元的几何信息, 只和体系有限元模型的各个单元节点的初始坐标和单元类型有关。

体系的总体平衡方程可写成矩阵形式为:

$$[A]\{t\} = [A_{bar} \quad A_{beam}] \begin{Bmatrix} t_{bar} \\ t_{beam} \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (11)$$

$$[A_{bar}]\{t_{bar}\} + [A_{beam}]\{t_{beam}\} = \{F\}$$

式(11)中,  $[A]$ 称为平衡矩阵,  $\{t\}$ 为结构单元的内力矢量,  $\{F\}$ 为节点荷载矢量,  $[A_{bar}]$ 为由体系所有索、杆单元组成的平衡矩阵,  $[A_{beam}]$ 为体系所有梁单元组成的平衡矩阵,  $\{t_{bar}\}$ 为杆、索单元内力向量,  $\{t_{beam}\}$ 为梁单元内力向量。

由式(11)可见体系总平衡矩阵可以分成两部分,  $[A_{bar}]$ 和分离出来的索杆体系的平衡矩阵的列数是相同的, 并且两者所包含的信息是相同的。这就是局部分析法的理论依据。具体步骤如下:

第一步, 将杂交结构体系中的梁单元同索、杆单元分离, 体系分块, 索杆体系添加边界约束, 使其各成独立的结构(如图 3 所示)。

第二步, 对下部结构索杆体系进行找力分析, 可得到其独立自应力模态、独立机构位移模态, 对独立自应力模态进行组合可得下部结构的初始预应力分布。

第三步, 将下部结构和上部结构相联接的单元内力作为荷载加到上部结构上, 对上部结构的平衡方程求解或直接进行线性有限元分析均可得到上部结构的内力分布。

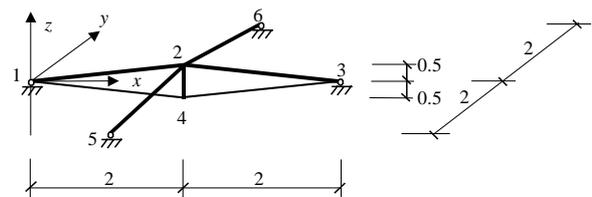


图 1 索杆杂交结构

Fig.1 The hybrid structure composed of cables, bars and beams

表 1 单元独立自应力模态

Table 1 The independent self-equilibrium mode of each element

单元 编号							
自应 力模态							
$s_1$	0.57208	0.57208	0.27015	0.27015	-0.13104	-0.30193	-0.30193
$s_2$	0.00000	0.00000	0.48591	0.48591	-0.23570	0.48591	0.48591

表 2 单元自内力分布确定(单位: N)

Table 2 Self-equilibrium force distribution of each element

单元 编号							
自内 力分布							
$f_1$	103.0783	103.0783	206.1567	206.1567	-100.0000	103.0784	103.0784
$f_2$	68.7176	68.7176	206.1565	206.1565	-100.0000	137.4389	137.4389

表 3 由  $f_1$  确定的单元截面分布确定Table 3 Flexibility distribution of each element by  $f_1$ 

单元 编号							
单元 柔度 分布							
$S_1$	0.632674	0.632674	0.315246	0.315246	0.00000	-0.018544	-0.018544
$S_2$	0.000000	0.000000	0.041523	0.041523	0.00000	0.705887	0.705887

表 4 由  $f_2$  确定的单元截面分布确定Table 4 Flexibility distribution of each element by  $f_2$ 

单元 编号							
单元 柔度 分布							
$S_1$	0.671027	0.671027	0.222304	0.222304	0.00000	-0.017436	-0.017436
$S_2$	0.000000	0.000000	0.05529	0.05529	0.00000	0.70494	0.70494

## 2.2 算例及下部索杆体系的预应力确定和优化

本文以大型肋环型索杆梁张拉结构体系为例分析其初始预应力分布(如图 2), 结构跨度为 60m, 矢跨比为 1/10, 径向网格数为 6, 环向网格数为 24, 中心环半径为 4m, 采用梁单元为矩形薄壁钢管截面为宽 250mm、高 400mm、厚度为 10mm。竖腹杆长度由外到内依次为 4m、3m、2m。

对下部索杆体系采用平衡矩阵理论分析可得

独立自应力模态数为 3, 独立机构位移模态数为 3。由图 3 可见下部结构添加约束后形成 3 个独立的环。因此独立自应力模态应该是分别各环独立的应力分布, 又由于结构的对称性, 每一种独立自应力模态中只有三类单元, 即下斜索、环索和竖腹杆, 表 5 给出了外环、中环和内环的内力分布分别对应 3 种独立自应力模态, 如独立自应力模态 1 只有外环下斜索、环索及竖腹杆内力不为零, 中环和内环单元内力均为零。

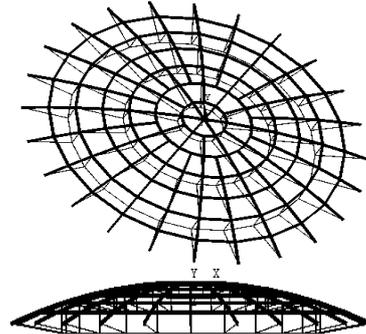


图 2 矢跨比 1/10 杂交结构体系

Fig.2 A hybrid structure with 1/10 rise to span ratio

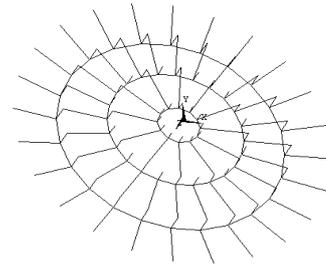


图 3 下部结构

Fig.3 The lower structure

表 5 下部结构独立自应力模态

Table 5 The independent self-equilibrium mode of the lower structure

独立自应力模态	下斜索	环索	竖腹杆
1(外环)	-0.2039	-0.7722	0.0309
2(中环)	-0.2035	-0.7718	0.0278
3(内环)	-0.5220	-1.0000	0.0654

对下部结构采用局部分析法实际上已经将其分成独立的三个子结构, 外环、中环及内环都是相对独立的, 因此每一环的内力分布不受其它环的影响, 各环预应力水平可任意确定。至于上部结构初始内力的确定可参考文献[4、6]。

## 2.3 下部索杆体系的预应力优化

文献[9]对张弦梁结构的预应力确定做了详细

的讨论,提出梁节点外力实功最小的预应力确定准则。目前,对于索杆梁体系的研究还是非常不成熟,特别是体系预应力分布和大小的确定问题。对于大型的索杆梁体系将不再是一个只关于预应力水平的单参数问题,而是一个多参数的优化问题。下部索杆体系的预应力的分布和大小问题可等价于对应内环、中环、外环的三个独立自应力模态的组合因子为 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 的确定问题。文献[10]提到下部索杆系统的预应力由支座环梁的轴向力最小的原则来决定,但没有详细的论述。文献[11]对张拉结构的预应力分析作了定性的概括和分析,明确指出结构设计的核心是结构的刚度设计,即体系内力流的设计。而体系内力流的设计便是体系内力的分布和大小的设计,预应力的引入使内力流的设计更加灵活和主动,结构设计就不仅仅是一个被动的内力和变形的计算问题,还包括内力的调节和变形的控制。

结构优化设计就是在满足各种规范或某些特定要求的条件下,使结构在某种广义性能指标为最佳。要对预应力的分布和大小进行优化,便要确定优化的数学模型,包括优化目标函数和约束条件。

#### 目标函数

假设体系的单元内力分布矢量为 $\{t\}$ ,体系的独立自内力模态数为 $S$ ,独立自内力模态为 $\{t_i\}$ ,独立自内力模态的组合因子为 $\alpha_i$ ,其中 $i=1\sim S$ , $\{t_{pl}\}$ 为体系在永久荷载设计几何构形下引起的体系内力变化矢量,则

$$\{t\} = \sum_{i=1}^S \alpha_i \{t_i\} + \{t_{pl}\} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_S \end{bmatrix} + \{t_{pl}\} \quad (12)$$

对于包含内部一阶无穷小机构的大型索杆梁体系可以取上部单层网壳结构梁单元的内力分布,这样 $\{t\}$ 就变为 $\{t_{beam}\}$ ,相应的 $\{t_i\}$ 为 $\{t_i^{beam}\}$ , $\{t_{pl}\}$ 为 $\{t_{pl}^{beam}\}$ 。目标函数可取为:

$$\min. \psi(\alpha_i) = \|\{t_{beam}\}\|, \quad i=1\sim S \quad (13)$$

#### 约束条件

本节为不把问题复杂化,约束条件取的比较简单,如:

$$S. T. \quad \alpha_i > 0, \quad i=1\sim S \quad (14)$$

即保证每条索都受拉,上述优化问题可由成熟

的优化算法来求解。

具体步骤:

(1) 求上部单层网壳结构在永久荷载作用下的各单元的内力,组装 $\{t_{pl}^{beam}\}$ ;

(2) 求对应下部结构独立自应力模态的上部网壳结构梁单元内力矢量 $\{t_i^{beam}\}$ ;

(3) 由式(13、14)所描述的优化问题进行求解可得整个体系的独立自应力模态组合因子 $\alpha_i$ ,从而得到最终满足优化目标的预应力分布和大小。计算结果:

本文以一任意假定的预应力模式二(如表 9)为基础向量进行的优化分析,结果如表 6、表 7 所示。

表 6 优化分析结果

Table 6 Results of optimal analysis

组数	$\alpha_1$ (外环)	$\alpha_2$ (中环)	$\alpha_3$ (内环)
	2.2699	0.6099	0.2607

表 7 最优预应力分布和大小(N)

Table 7 Optimal pre-stress distribution and magnitude

下部索杆	下斜索	环索	竖腹杆
外环	689482.1	2611179.5	-104487.6
中环	139201.0	527937.6	-19016.1
内环	34559.6	66206.2	-4329.9

#### 2.4 最优预应力模式下的静力分析

下部索杆系统的预应力确定之后便可以由局部分析法确定上部结构的初始内力。由于所求得的预应力分布为自平衡的初始内力,故在通常的有限元静动力和稳定性分析之前必须先对整体结构的预应力进行初始化。屋面均布荷载为 $1.0\text{kN/m}^2$ 。“SS”为单层网壳,“HS”为相应的添加下部索杆系统的杂交结构

(1) 节点位移:

图 6 为节点 1~6(如图 4)的竖向位移,在最优预应力模式下与单层网壳的对比,可见预应力对节点位移的影响不大。而并不能有效的降低体系的挠度。

(2) 梁单元内力分布:

图 7~图 9 中的单元次序 1~7 依次对应 265、1、13、61、109、157、205 号单元(如图 5 所示),分析这三幅图可见,预应力模式下整体模型中梁单元的内力分布变化较大,预应力分布和大小对梁单元的

内力分布影响非常明显。对各个单元构件而言，预应力的存在可有效的改变梁单元轴力的性质和水平，但是预应力的存在却使梁单元的剪力和弯矩值有较大改变，这是一种不利的影响。

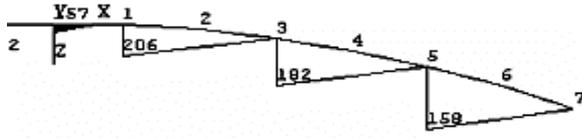


图4 单榀节点编号

Fig.4 The node number of a frame

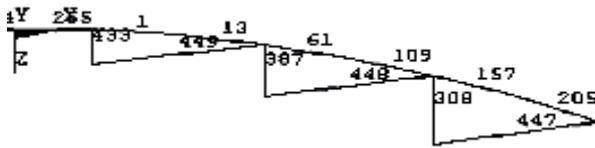


图5 单榀单元编号

Fig.5 The element number of a frame

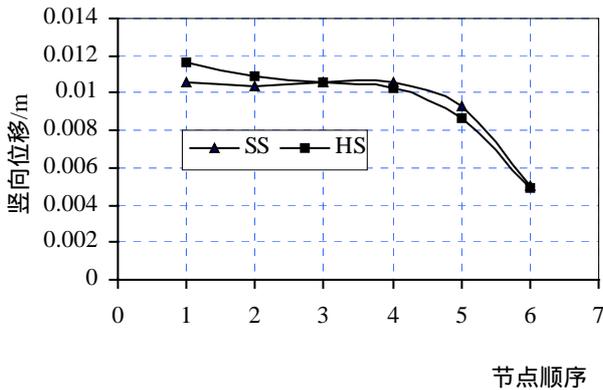


图6 节点竖向位移

Fig.6 Nodal vertical displacement

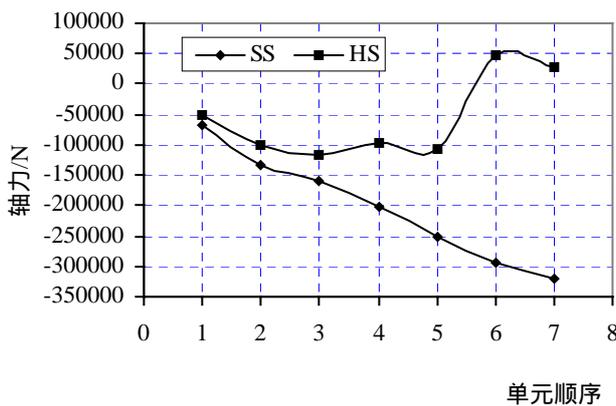


图7 单元轴力分布

Fig.7 Element axial force distribution

此外，本文还对不同梁截面和不同预应力模式下的杂交结构作过参数分析，得出的结论于上述基本相同。不同的是上部单层网壳结构越柔，下部索杆系统的协调变形的能力就越明显。

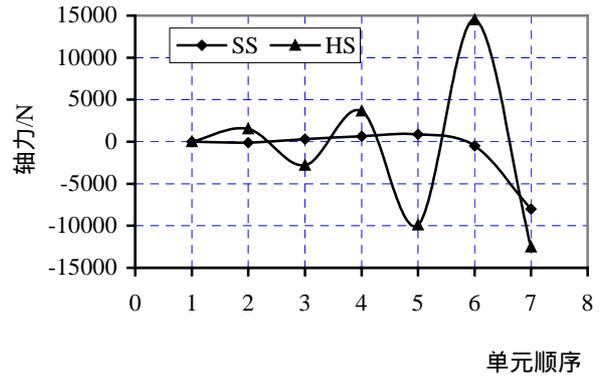


图8 单元剪力分布

Fig.8 Element shear force distribution

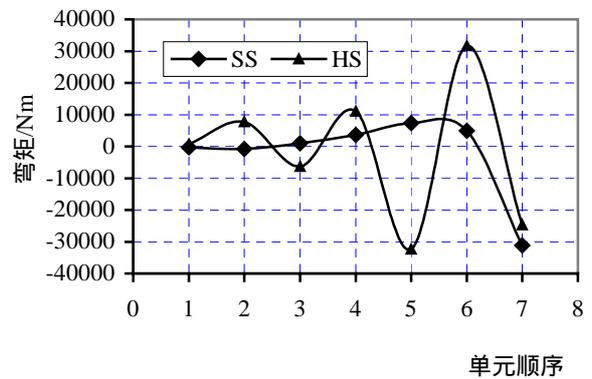


图9 单元弯矩分布

Fig.9 Element moment distribution

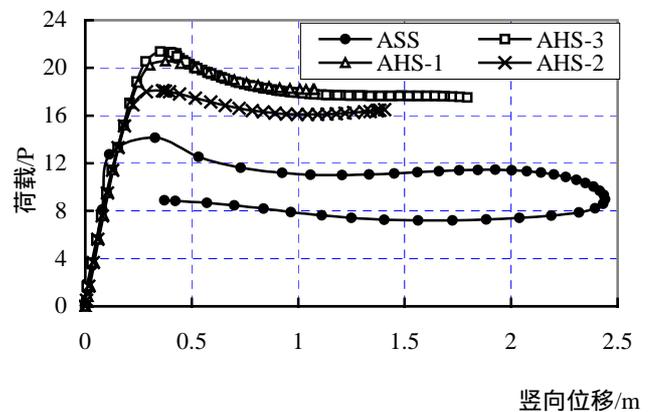


图10 荷载位移曲线

Fig.10 Load-displacement curve

### 2.5 稳定性分析

表8和表9是任意假定的两种下部索杆系统的预应力分布。表10为不同梁截面和不同预应力模式下的稳定性参数分析。“ASS”、“BSS”、“CSS”为截面A、B、C下的单层网壳，“AHS”、“BHS”、“CHS”为梁单元采用截面A、B、C下添加下部索杆系统的杂交结构。矩形薄壁钢管截面A尺寸为宽250mm、高250mm、厚度为10mm，矩形薄壁钢管

截面 B 尺寸为宽 150mm、高 150mm、厚度 10mm，矩形薄壁钢管截面 C 采用梁单元为宽 250mm、高 400mm、厚度 10mm。 $P$  为比例荷载  $1.0\text{kN/m}^2$ 。对于截面 C 而言表 3 为其最优预应力分布。图 10 为梁单元采用截面 A 的单层网壳和杂交结构时在表 7、8、9 所示预应力分布下特征节点的荷载-竖向位移曲线。由图 10 和表 10 可见在三种预应力模式下，相比单层网壳，索杆梁体系的稳定性能有了较大提高，特别是实际设计并不会采用的梁截面 B 下的索杆梁体系，稳定性提高了一倍以上。因此，可以认为随着上部网壳刚度的减弱，下部索杆系统的作用在增强。三种预应力模式中，以预应力模式一的效果最明显，预应力模式二的效果最差，而表 7 预应力模式效果和表 8 预应力模式一相当。

表 8 下部结构预应力模式一(N)

Table 8 Pre-stress mode 1

下部索杆	下斜索	环索	竖腹杆
外环	737466.7	2792897.3	-111759.3
中环	339667.9	1288234.5	-46401.8
内环	128052.2	245310.7	-16043.3

表 9 下部结构预应力模式二(N)

Table 9 Pre-stress mode 2

下部索杆	下斜索	环索	竖腹杆
外环	303750.0	1150350.0	-46031.8
中环	228235.7	865613.3	-31179.1
内环	132564.8	253955.6	-16608.7

表 10 极限荷载参数分析

Table 10 Parametric analysis of limit load

		预应力模式一	预应力模式二	表 3 预应力
截面	CSS	$34.7P$	$34.7P$	$34.7P$
	C	$44.4P$	$39.1P$	$43.3P$
截面	ASS	$14.1P$	$14.1P$	$14.1P$
	A	$20.6P$	$18.8P$	$21.4P$
截面	BSS	$3.27P$	$3.27P$	$3.27P$
	B	$6.98P$	$5.93P$	$5.74P$

### 3 结语

本文对索杆张拉结构采用平衡矩阵理论进行了讨论。对于索杆杂交结构而言，可以根据平衡条件，要确定体系在初状态几何下的整体预应力分布

和大小，但是必须考虑变形相容条件和本构关系即各个单元的柔度分布，只有满足体系柔度分布的杆件截面尺寸的结构才能最终张成给定的自平衡内力状态和设计几何。本文由相容方程和平衡方程提出了包含局部超静定结构的索杆杂交结构的柔度分布确定方法。算例分析结果验证了本文方法的正确性。

本文对索杆梁体系的合理的预应力分布和大小进行了研究，在本文的优化目标下，合理的预应力分布是外环预应力较大，中环、内环预应力要小很多。设计者可根据自己的目的来设定优化目标。对整体而言，对上部单层网壳刚度较大的杂交结构预应力的分布和大小对体系的整体刚度影响不大。对各个单元构件而言，预应力的存在可有效的改变梁单元轴力的性质和水平，但是预应力的存在却使梁单元的剪力和弯矩值有较大改变，这是一种不利的影 响。相比单层网壳，索杆梁体系的稳定性能有了较大提高。随着上部网壳刚度的减弱，下部索杆系统协调变形的作用在增强。该种体系是由一刚度很大的单层网壳和一可刚化的一阶无穷小机构组成，单层网壳由于其刚度很大承受了大部分的荷载，力流大部分由单层网壳传递。柔性体系和刚性体系的杂交实际上只能为刚性体系提供大变形的安全储备，而不能有效的降低体系的挠度。

### 参考文献：

- [1] S Pellegrino, C R Calladine. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frame-works [J]. Int. J. Solids Struct., 1986, 22: 409~428.
- [2] S Pellegrino. Analysis of prestressed mechanisms [J]. Int. J. Solids Structures, 1990, 26(12): 1329~1350.
- [3] S Pellegrino. Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix [J]. Int. J. Solids Structures, 1993, 30(2): 3025~3036.
- [4] 张志宏, 董石麟. 索杆梁混合单元体系初始预应力分布的确定[J]. 空间结构, 2003, 9(3): 13~18.  
Zhang Zhihong, Dong Shilin. The determination of initial pre-stress distribution of structural system composed of cables, bars and beams [J]. Space Structures, 2003, 9(3): 13~18. (in Chinese)
- [5] 邓华. 拉索预应力空间网格结构的理论研究和优化设计[D]. 杭州: 浙江大学, 1997.  
Deng Hua. Theoretical study of the pre-stress spatial reticulated structure and its optimal design [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1997. (in Chinese)

(参考文献[6]~[10]转第 20 页)

泉在[3]中将式(35)做了如下拓展,

$$F(\sigma) = [M_1(\sigma_x - \sigma_y)^2 + M_2(\sigma_y - \sigma_z)^2 + M_3(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2M_4\tau_{xy}^2 + 2M_5\tau_{yz}^2 + 2M_6\tau_{zx}^2]^{1/2} + (M_7\sigma_x + M_8\sigma_y + M_9\sigma_z) - 1 = 0 \quad (37)$$

其中,  $M_i, i=1,2,\dots,9$  为材料参数。当  $M_i=0, i=7,8,9$  时, 式(37)退化为式(36)Hill 准则。

显然, 本文提出平均剪切屈服准则与拓展的 Hill 准则有相同的形式。若不考虑平均正应力对屈服的影响,  $\beta=0$ , 平均剪切屈服准则与 Hill 准则具有相同的形式。进一步地, 若取

$$M_i = \mu^2 a_i, i=1,2,3; \quad M_i = \mu^2 a_i / 2, i=4,5,6; \quad M_i = \beta a_i, i=7,8,9 \quad (38)$$

则平均剪切屈服准则与拓展的 Hill 准则完全一致。

## 5 结论

本文从方向函数(ODF)<sup>[1]</sup>的概念入手, 将各方向截面的剪应力和正应力综合度量直接取为所有方向截面上的剪应力和正应力的平均。对各向同性材料, 提出了平均剪切屈服度准则。研究表明, 平均剪切屈服准则与 D-P 准则具有相同的形式, 当不考虑平均正应力对屈服的影响时, 它与 Mises 准则具有相同的形式。

各向异性损伤引起的有效应力放大系数  $\rho(n)$  和  $\rho'(n)$  为方向函数, 可以采用二阶组构张量来近似表示, 对各向异性损伤导致材料各向异性强度问题提出了基于有效正应力和有效剪应力的平

均剪切屈服准则。在任意坐标系中, 各向异性损伤屈服准则为应力分量的二次齐次式。当二阶组构张量的主轴与坐标轴重合时, 证明了本文的各向异性屈服准则与殷有泉的拓展 Hill 准则<sup>[3]</sup>具有完全相同的形式, 当不考虑平均正应力对屈服的影响时, 它与 Hill 准则具有相同的形式。

## 参考文献;

- [1] Kanatani, K. Distribution of directional data and fabric tensors [J]. Int. J. Eng. Sci., 1984, 22: 149~164.
- [2] Lubarda V A, Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution [J]. Int. J. Solids & Struct., 1993, 30: 2859~2877.
- [3] 周维垣. 《高等岩石力学》第二章[M]. 北京: 水利电力出版社, 1990. Zhou Weiyuan. Advanced rock mechanics [M]. Beijing: Water Conservers, Hydropower Press, 1990. (in Chinese)
- [4] Kachanov L M. Time of rupture process under creep conditions [J]. TVZ Akad Nauk, S.S.R. Otd, Tech. Nauk, 1958, 8: 26~31.
- [5] Rabotnov Y N. On the equations of state for creep [J]. Progress in Applied Mechanics, 1963, 8: 307~305.
- [6] Murakami S, Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage [C]. Proc. 3rd IUTAM Symposium on creep in structures, Edited by Ponter, A.R.S. and Hayhurst, D.R., Springer-Verlag, 1980. 422~443.
- [7] Murakami S. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory [J]. J. Eng. Mater. Tech., 1983, 105: 99~105.
- [8] Murakami S. Mechanical modeling of material damage [J]. J. Appl. Mech., 1988, 55: 280~286.
- [9] Carol I, Bazant Z.P. Damage and plasticity in microplane theory [J]. Int. J. Solids & Struct., 1997, 34: 3807~3835.
- [10] Leukart M, Ramm E. A comparison of damage models formulated on different material scales [J]. Comput. Mat. Sci., 2003, 28: 749~762.
- [11] Hill R. The mathematical theory of plasticity [M]. Clarendon Press, Oxford, 1950.

(上接第 14 页)

- [6] 尹德钰, 赵红华. 现代空间结构的基本特征[J]. 山西建筑, 2002, 28(2): 1~6. Yin Deyu, Zhao Honghua. The characteristics of modern space structures [J]. Shanxi architecture, 2002, 28(2): 1~6. (in Chinese)
- [7] 尹越, 韩庆华, 谢礼立, 刘锡良. 一种新型杂交空间网架结构-弦支穹顶[J]. 《工程力学》增刊, 2001. 772~776. Yin Yue, Han Qinghua, Xie Lili, Liu Xiliang. A new type of hybrid spatial reticulated structure-suspend dome [J]. Engineering Mechanics (Supplement), 2001. 772~776. (in Chinese)
- [8] 张志宏. 大型索杆梁张拉空间结构体系的理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2003. Zhang Zhihong. Theoretical study of large-span tensile spatial structures composed of cables, bars and beams [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003. (in Chinese)
- [9] 黄奎生, 罗永峰. 预应力梁弦结构最佳预应力的非线性分析方法[A]. 第九届空间结构会议论文集[C]. 浙江, 萧山, 2000. Huang Kuisheng, Luo Yongfeng. Nonlinear analysis method of optimal pre-stress of beam-string structures [A]. Proceedings of the ninth space structure conference [C]. Zhejiang, Xiaoshan, 2000. (in Chinese)
- [10] Mamoru Kawaguchi, Masaru Abe, Ikuo Tatemichi. Design, tests and realization of "suspension-dome" system [J]. Journal of International Association of Shell and Spatial Structures, 1999, 40(131): 179~192.
- [11] 钱若军, 杨联萍, 夏绍华. 张力结构的预应力分析[A]. 第九届空间结构会议论文集[C]. 浙江, 萧山, 2000. Qian Ruojun, Yang Lianping, Xia Shaohua. Pre-stress analysis of tension structures [A]. Proceedings of the the ninth space structure conference [C]. Zhejiang, Xiaoshan, 2000. (in Chinese)