

固体力学非线性加权残值法* 及在中国的进展

徐次达

(上海同济大学工程力学系)

摘要 本文根据加权残值法的特点, 国内新发展的方法及实践经验提出发展非线性加权残值法的可行及通用的模式, 同时提供我国于1978年之后非线性加权残值法研究工作的简要回顾, 以供参考。

一、前言

加权残值法是一种寻求在给定边界条件或初值条件的微分方程近似解行之有效的数学方法。由于需要, 我国于1978年以后发展这种方法用于解决固体力学问题如弹性平面问题及三维问题, 板壳静力强度, 动力响应及稳定性问题等^[1]。这种方法的优点是方法简便, 准确快捷, 计算工作量少得多, 程序很短, 费用低廉及残差可知。可是绝大多数的工作是线性的加权残值法, 由于四化建设, 从工程技术中提出的非线性固体力学问题甚多, 这些问题应予以准确地、方便地、费用低廉地妥善解决, 于是非线性加权残值法的研究工作, 回顾其过去, 着眼于将来, 推动其进一步发展是十分有意义的。

二、非线性加权残值法

固体力学非线性问题可以分为三类: (1) 几何非线性; (2) 物理非线性; (3) 同时几何和物理非线性。作为初步调查, 作者发现线性的加权残值法论文数目占据全部加权残值法论文总数9/10 (1978年以后)。这件事不太正常, 因为加权残值法的方法实质可以提供线性微分方程式的近似解, 但同时也可以为非线性微分方程提供近似解, 祇不过在后者情况中形成非线性代数方程组代替了前者的线性代数方程组。对于非线性代数方程组来说, 今日可以用各式各样的方法予以解决, 例加各种迭代法、牛顿-拉夫森方法、最速下降法等, 于求解过程中并无特殊困难。

1. 几何非线性加权残值法

这种固体力学非线性问题具有非线性的控制微分方程式, 若干非线性边界条件但物理条件是线性的。根据上述, 任意一种加权残值法都可以解决。然而, 必然会提出这样一些问题, 应用何种方法较为合适, 选择什么试函数?

如果我们总结我国自1978年以来非线性加权残值法的实践经验, 会立即得出如下的

*本文于1985年2月4日收到

结论: 几乎所有的非线性加权残值法都使用配点法。这是很自然的结果, 因为配点法在所有的加权残值法中具有实施方便简单, 精度合乎工程需要, 程序较为简短, 计算工作量较少, 费用节省。我国自1978年以后发展了很多种新的配点法, 于是总结一下所有可用于非线性加权残值法的各种配点法很有必要。见表1。

表1

各种配点法

名 称	消 除 残 值 方 程	附 注
一般配点法	$\{R\} = 0$	$\{R\}$ —残值矢量, 工作量少
最小二乘配点法	$\frac{\partial \{R\}^T}{\partial \{C\}} \{R\} = 0$	$\{C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}^T$, 精度高
伽辽金配点法	$\frac{\partial \{\tilde{u}\}^T}{\partial \{C\}} \{R\} = 0$	$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n C_i u_i$, 精度高
子域配点法	$\sum_{j=1}^r \{W_j R_j\} = 0$	分为V个子域 $V_j (j=1, 2, \dots)$ $W_j = \begin{cases} 1 (\in V_j) \\ 0 (\notin V_j) \end{cases}$

过去于非线性加权残值法中所用的试函数是多项式, 梁函数和 B 一样条函数等, 其中以 B 一样条函数应用较广, 于非线性问题中常常会出现这样的情况, 即欲选择一个试函数能够满足全部边界条件是相当困难的, 在这种情况下宜在边界设有配点, 强制满足。

2. 物理非线性加权残值法

物理非线性问题中控制微分方程式是线性的可是物理方程式是非线性或相当复杂的, 例如非线性弹性关系及如塑性力学中多规律的本构关系。这个领域内工作较少, 祇占非线性加权残值法论文总数 1/5。可是在这领域中有重要的研究课题如固体的弹塑性问题, 极限载荷问题等, 这些问题可以消除控制微分方程式或平衡方程, 边界条件及屈服准则的残值予以解决, 或者通过固体的弹粘塑性理论的稳定解^[2]予以解决。

三、中国非线性加权残值法的进展

几何非线性加权残值法

1981年杨天祥、刘昭培和罗定安以多项式为试函数应用正交配点法解算了三种固定边界的大挠度矩形板弯曲问题。非线性代数方程组用迭代法及最速下降法解算, 计算结果与 Aolomi 差分法计算结果接近^{[3][4]}。

1982年陈子梁、徐次达以梁函数为试函数应用最小二乘配点法解算了四边简支可动的大挠度板弯曲问题^[5], 应用了阻尼最小二乘法求解非线性代数方程组, 计算结果与 Levy 的解最大差数只有 5%^[6]。

1984年许功明、王龙甫及沈大荣应用配点法分析了几何非线性的各向异性层合板(复合材料板)的弯曲问题, 得到成功^[7], 控制微分方程式是相当复杂的。试函数(挠

度及应力函数)系由 5 次 B 样条函数组成的基函数,也用了阻尼最小二乘法解非线性代数方程组。

1984 年陈虬提出将卡门方程变换成为增量形式^[8]:

$$DV^4 w_i = L(W_{i-1}, \phi_i) + L(w_i, \Phi_{i-1}) + q_i; Y^4 \phi_i = -EL(W_{i-1}, w_i)$$

式中 W_i , ϕ_i 及 q_i 为第 i 次加载时的挠度, 应力函数值和载荷集度的增量, W_{i-1} 及 Φ_{i-1} 是于 $i-1$ 次加载时累计的挠度及应力函数值, 是已经知道的, 于是这些方程式都是线性的, 尽管 $L(\cdot)$ 是一个非线性算子。用了最小二乘配点法试函数是多项式, 计算结果与 Levy 的解比较, 比较接近。

也是于 1984 年王朝伟、谭国强提出两种摄动加权残值法可以解算几何非线性问题: 摄动最小二乘配点法及摄动伽辽金法^[9]。

此法中首先须用摄动法求得一组摄动方程式, 据此并引入试函数即可写出残值方程组, 于是最小二乘配点法或伽辽金法即可应用。

也是于 1984 年许功明、王龙甫及沈大荣又建议利用摄动最小二乘法解算各种初向异性叠层板的几何非线性问题及取得成功^[10]。

2. 物理非线性加权残值法

于 1984 年王朝伟和黄速建利用固体的弹粘塑性理论的稳定解就是固体的弹塑性解有效地解决了固体的弹塑性问题^[2]。于 M-150 计算机上二个数值例题所用的 cpu 时间祇有 $\frac{1}{2}$ —2 分钟。

又于 1984 年唐俊民、林木和徐秉业应用子域法得到了多种板与壳的极限载荷, 方法极为简单, 除了平衡方程和边界条件之外, 他们还去消除屈服准则的残值^[11]。

四、结 论

于分析非线性固体力学问题中, 应用非线性加权残值法, 仍然具有如线性加权残值法那些优点: 简单方便, 准确, 计算工作量少, 程序简短, 费用低廉及残差可知, 于是对于继续开发及发展非线性加权残值法寄予乐观。

参 考 文 献

[1] 徐次达: 加权残值法在固体力学中的应用——我国近年来进展情况——应用数学和力学, 第 3 卷, 第 6 期(1982 年 11 月)。

[2] 黄速建、王朝伟: 应用弹粘塑性理论分析弹塑性问题的加权残值法——长沙铁道学院硕士论文 1984 年 10 月。

[3] 杨天祥、刘昭培、罗定安: 用配点法解矩形薄板大挠度弯曲问题——天津大学学报, 1981 年 2 期。

[4] B. Aolomi, D.G. Williams Thin Plate Design for Transverse Loading, Crosby Lockwood stoples, London, 1975.

[5] 陈子梁、徐次达: 最小二乘配点法解薄板几何非线性弯曲问题——力学学报 1981.3.

[6] A.C. Вольмир Гибкие Пластинки и Оболочки—Гостехиздат Москва 1956

〔7〕许功明、王龙甫、沈大荣：B-样条加权残数法分析各向异性层合板，几何非线性问题—加权残数法工作会议论文1984.10.

〔8〕陈虬：荷载增量最小二乘法解薄板的大挠度问题—西南交大学报 1984.3.

〔9〕王朝伟、谭国强：摄动加权残数法及其在几何非线性问题中的应用—长沙铁道学院硕士论文1984.10.

〔10〕许功明、王龙甫、沈大荣：用摄动加权残数法分析各向异性层合板几何非线性问题—加权残数法工作会议论文1984.10.

〔11〕唐俊才、林木、徐秉业：板壳极限分析的权余法—加权残值法工作会议论文 1984.10

新技术

美日兴建高级尖端技术新城

似“硅谷”但位于山麓林野之中

据《日经产业新闻》报道，一种将刷新现有大工业城市，目前正在美国、日本着手兴建。这种新市场与美国的“硅谷”相似，但却没有“硅谷”等现有大市场的交通堵塞、环境污染等不良现象，它们建于树木葱郁的山麓林野之中，与大自然协调一致，具备“能孕育出创造力的环境”。

这种高级尖端技术新城市，在美国正在建设的有休斯敦附近的伍德兰兹、北卡罗来纳州的三角研究园地、达拉斯市郊区的拉斯克利纳斯等，其中由伍德兰兹公司兴建的伍德兰兹城规模最大，将于二〇一〇年完工。建成后的伍德兰兹城将以高级尖端技术企业为中心，有大学、公共研究机关、金融机构、商店、运输公司等五千家机关和企业，并有十六万人定居，将成为世界上最大的高级尖端技术基地。

伍德兰兹城座落在休斯敦市中心往北约四十公里的一片九千三百公顷的广阔林野上。该城市自建设以来，迄今已有二百八十一家公司进入，共一万八千六百多人。进入的公司大多数是与电子、生物技术、宇航、能源有关的增长快的企业。

在制订伍德兰兹的基本计划过程中，森林学家的建议起了很大的作用。首先选出应该保留下来的树木，其次决定道路和各种设施的布局。要限制建筑物的高度，周围全用树木圈上。到处分布着大小湖泊、体育设施、文化设施等。城市设计者的结论是，没有和自然协调的城市，就没有进行创造性工作的希望，高级尖端技术产业也成长不起来。

在太平洋的另一岸，日本也在着手兴建这样的新城市。三菱房地产公司决定把苦于没法处理的富士山东麓的别墅用地改为研究用地。栗田工业公司也决定在距离东京较近、自然环境好的神奈川县厚木市内的“森林之乡”建综合研究所。这个“森林之乡”据报道很受日本全国欢迎，把它看作“技术城市的样板”，前往参观的人络绎不绝。住宅和城市配套设施目前也正在那里加紧建设。