第 23 卷第 10 期 Vol.23 No.10 工 程 力 学
2006 年 10 月 Oct. 2006 ENGINEERING MECHANICS

文章编号：1000-4750(2006)10-0001-06

改进的响应面方法在二维连续体形状优化中的应用

*隋允康，李善坡

(北京工业大学工程数值模拟中心，北京 100022)

摘 要：在二维连续体结构形状优化中，采用响应面方法近似求解约束的敏度来建立模型：根据结构分析的响应值，可以拟合出复杂响应对设计变量的显函数。为克服各试验点的拟合值与结构真实响应值之间的误差，发展了一种在中心试验点精确拟合的方法，提高了模型的精度，收到了良好的效果。

关键词：改进的响应面方法；敏度分析；试验设计；二维连续体；形状优化

中图分类号：O34 文献标识码：A

THE APPLICATION OF IMPROVED RSM IN SHAPE OPTIMIZATION OF TWO-DIMENSION CONTINUUM

*SUI Yun-kang , LI Shan-po

(Numerical Simulation Center for Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract: RSM is used to establish models in shape optimization for two-dimension continuum by solving sensitivity of constraint conditions approximately, that is, complicated response function in terms of design variables can be fitted according to the responses of structural analysis. The error between the fitting value and the structural response value at the design point will affect precision of optimization. This paper provides an improved method that fitting accurately at the central design point. The examples demonstrate that it is a feasible and efficient method.

Key words: improved response surface methodology; sensitivity analysis; experiment design; two-dimension continuum; shape optimization

敏度分析是结构优化建立模型的前提，在传统的结构形状优化中，一般采用解析法或差分法[1]进行敏度分析，Wang[2]等详细评述了有限元敏度分析；Ramakrshnan 和 Francavilla[3]给出了有限元方法的形状优化敏度分析，对解析方程进行了求导；张德欣[4]等建立了边界元的全解析敏度分析技术,并将该技术与通用的形状优化设计算法相结合，对二维平面应力下的弹性体进行了形状优化；郭旭[5]等提出了一种利用伴随变量进行结构形状优化灵敏度分析的方法。

一般讲，解析的敏度分析方法的理论推导是很复杂的，而差分法的精度受到差分步长的影响。为了克服这些解析方法和差分方法求解敏度的缺点，本文采用改进的响应面方法[6~10]建立模型。所谓响应面方法，即 RSM(Response Surface Method)，是在一定的范围内根据设计变量的试验设计值进行一系列的结构分析，然后用这些结构分析的响应值拟合出约束的近似显函数，对于形状优化进行了求

收稿日期：2005-01-30；修改日期：2005-06-16

基金项目：国家自然科学基金委(10472003)；北京市自然科学基金委(3042002)；北京市教委(KM200410005019)项目资助和美国 MSC 公司支持

作者简介：*隋允康(1943)，男，辽宁大连人，教授，博导，从事结构与多学科优化、智能控制研究(E-mail: ysui@bjut.edu.cn)；
李善坡(1979)，男，山东东阿人，博士生，从事结构优化研究

解。然后用优化算法进行结构优化。RSM 方法简单可行，但是在每个试验点，拟合值与结构真实响应值之间都存在误差，因而影响了优化的精度。本文针对这一缺点，采用两种方法推导出了在中心点精确拟合的公式，即改进的响应面方法的公式。

1 响应面方法简介

响应面方法是试验设计与数理统计相结合的近似建模方法，在试验测量、经验公式或数值分析的基础上，于指定的试验点集合组成的高维空间中构造待测定量的逼近函数即响应面。响应面方法欲构造的函数可采用简单的代数形式，通过回归计算拟合出复杂的响应关系。响应面近似函数通常使用线性函数或二次函数，线性函数形式如下：

$$\tilde{y}=\sum_{i=0}^{k}\beta_i x_i \quad (\text{其中} x_0=1) \tag{1}$$

其中 $\tilde{y}$ 为待构造的响应函数，k 为试验点向量的维数，β 为待定系数。至于二次函数的形式，可对二次项进行变量代换化为增维的线性形式。试验次数的最小值 n 视近似函数的形式而定，如表 1 所示。

表 1 最少的试验次数(n)

Table 1 Minimum number of experiment design

形式	线性	可分离二次型(不含交叉项)	全二次型(含交叉项)
n	$k+1$	$2k+1$	$(k+1)(k+2)/2$

若试验次数为 m ($m \ge n$)，即通过 m 次结构分析，得到如下数据：

$$\begin{array}{ccc|c} x_1^{(0)} & \cdots & x_k^{(0)} & y^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{(m-1)} & \cdots & x_k^{(m-1)} & y^{(m-1)} \end{array}$$

其中右端的数据分别表示各个试验点对应的真实响应值。一般来说，假定的函数形式不一定就是实际的函数，即假定的函数 $\tilde{y}$ 与实际的函数 y 之间通常存在误差，记第 j 次试验值采用响应面方法的表达式为：

$$y^{(j)}=\sum_{i=0}^{k}\beta_i x_i^{(j)}-\varepsilon_j$$

其中 ε_j 为在第 j 个试验点用拟合值表示实际值的误差。所有试验可统一写成如下矩阵形式：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{Y}=\begin{Bmatrix} y^{(0)} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1 & x_1^{(0)} & \cdots & x_k^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1^{(m-1)} & \cdots & x_k^{(m-1)} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_{m\text{-}1} \end{Bmatrix}$$

系数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的无偏估计可由最小二乘法获得，即令每次试验的误差平方和 δ 为最小：

$$\delta=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{Y})\to\min \tag{3}$$

则需令

$$\partial\delta/\partial\boldsymbol{\beta}=0 \tag{4}$$

整理得：

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X\beta}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{5}$$

则可求得系数向量的无偏估计：

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{6}$$

为判断响应面近似的质量，通常使用多重拟合系数(coefficient of multiple determination) R^2 和修正的多重拟合系数(R-square adjusted) R_{adj}^2 衡量。$R^2=1-\delta/\gamma$，$R_{\mathrm{adj}}^2=1-(m-1)(1-R^2)/(m-k)$，其中 δ 是误差平方和，即式(6)代入式(3)所得结果：$\delta=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$，$\gamma$ 是每个实验值与平均试验值离差的平方和：

$$\gamma=\sum_{i=0}^{m-1}(y^{(i)}-\bar{y})^2$$

因其中 $\bar{y}=\sum_{i=0}^{m-1}y^{(i)}/m$，得 $\gamma=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}-\left(\sum_{i=0}^{m-1}y^{(i)}\right)^2/m$。

R^2 是完全拟合的度量值,反映响应面符合给定数据的程度，其变化范围在[0,1]之间，足够的逼近通常要求 R^2 的值在 0.9 以上，由于 R^2 受设计点向量维数的影响,较大的 R^2 值不一定表明响应面的拟合效果好，而修正的 R^2 避免了这一缺点，所以 R_{adj}^2 则更适于评定响应面的拟合精度[11]。

2 试验设计方法及其相应处理

RSM 的计算成本随试验点向量维数的增加而快速增长，其拟合能力很大程度上受试验点在试验点向量构成的空间中分布的影响。试验点向量维数很大时，首先要进行实验设计，合理的选择试验点在试验点向量构成的空间中分布是非常重要的。目前主要的试验设计方法有：全参数试验设计方法、部分参数试验设计方法、中心复合试验设计方法等。在结构优化中，采用有限元方法进行试验，为了节省计算时间和内存，必须合理的选择试验设计方法。显然，$m=k+1$ 为最小试验点数，但是此时改进的响应面方法和原响应面方法在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 非奇

异的情况下都是无误差拟合的，得到的结果也是完全相同的。为了尽量减少分析次数，同时也为了比较二者的差别，本文采用 $m=k+2$ 个试验点的试验设计方法(图 1 所示)，具体可表示为中心试验点 $\boldsymbol{x}^{(0)}=[x_1^{(0)},\cdots,x_k^{(0)}]^{\mathrm{T}}$ 和展开点 $\boldsymbol{x}^{(v)}=[x_1^{(0)},\cdots,x_v^{(0)}-\varepsilon_v,\cdots,x_k^{(0)}]^{\mathrm{T}}$ $(v=1,\cdots,k)$，$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=[x_1^{(0)}+\varepsilon_1,\cdots,x_k^{(0)}+\varepsilon_k]$，其中 $\varepsilon_v=0.05\Delta x_v^{(0)}$，$\Delta x_v^{(0)}$ 是本次中心试验点与前次中心试验点点差值的第 v 个分量，初始的 $\Delta x_v^{(0)}$ 取 $x_v^{(0)}$。在这 $k+2$ 个试验点做完结构分析后，可以拟合出响应的一阶近似显函数，即式(1)。

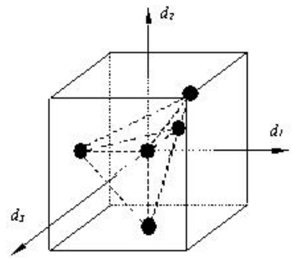

图 1　试验设计方法

Fig.1　Experiment design method

3　改进的 RSM 公式及其推导

因为结构优化要求每次迭代解的响应值是准确的，所以有必要提出在中心试验点为准确响应值的 RSM 方法，记试验点向量的维数为 k，试验点个数为 $m(m\ge k+1)$，线性函数的拟合方程可表示为：

$$\hat{y}=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_kx_k \tag{7}$$

以下就是这个想法实现的两种推导方法。

3.1　代入法

因为在中心试验点的拟合值是准确的，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}$ 时，$\hat{y}=y^{(0)}$。可以先将中心试验点向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_k^{(0)})^{\mathrm{T}}$ 代入式(7)，可求得

$$\beta_0=y^{(0)}-\beta_1x_1^{(0)}-\cdots-\beta_kx_k^{(0)} \tag{8}$$

再把式(8)代入式(7)，整理得

$$\hat{y}-y^{(0)}=\beta_1(x_1-x_1^{(0)})+\cdots+\beta_k(x_k-x_k^{(0)}) \tag{9}$$

用其余试验点做最小二乘拟合，同上面式(4)的做法，可求得 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的无偏估计：$\overline{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$

其中：$\overline{\boldsymbol{\beta}}=\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{Bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}-x_1^{(0)} & \cdots & x_k^{(1)}-x_k^{(0)}\\ \vdots & & \vdots\\ x_1^{(m-1)}-x_1^{(0)} & \cdots & x_k^{(m-1)}-x_k^{(0)}\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y^{(1)}-y^{(0)}\\ \vdots\\ y^{(m-1)}-y^{(0)}\end{bmatrix}$，再将 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 代入式(8)可求得 β_0。这样，就确定了改进的 RSM 公式。

3.2　拉格朗日乘子法

在第 i 个试验点的误差为：$\varepsilon_i=\hat{y}_i-y^{(i)}$，令误差平方和取最小值，得

$$\min\ \sum_{i=1}^{m\text{-}1}\varepsilon_i^2 \tag{10}$$

因在中心试验点是准确拟合的，即 $\varepsilon_0=0$。则上式可化为含等式约束的优化问题：

$$\begin{cases}\text{find} & \boldsymbol{\beta}\\ \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\varepsilon_i^2\\ \text{s.t} & \varepsilon_0=0\end{cases} \tag{11}$$

采用拉格朗日乘子法，可将上式化为无约束优化问题

$$\begin{cases}\text{find} & \boldsymbol{\beta},\lambda\\ \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\varepsilon_i^2+\lambda\varepsilon_0\end{cases} \tag{12}$$

分别对 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k$ 和 λ 求偏导数得

$$\begin{cases}2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(\beta_0+\beta_1x_1^{(i)}+\cdots+\beta_kx_k^{(i)}-y^{(i)})+\lambda=0\\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(\beta_0+\beta_1x_1^{(i)}+\cdots+\beta_kx_k^{(i)}-y^{(i)})x_1^{(i)}+\lambda x_1^{(0)}=0\\ \qquad\vdots\\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(\beta_0+\beta_1x_1^{(i)}+\cdots+\beta_kx_k^{(i)}-y^{(i)})x_k^{(i)}+\lambda x_k^{(0)}=0\end{cases} \tag{13}$$

$$\beta_0+\beta_1x_1^{(0)}+\cdots+\beta_kx_k^{(0)}-y^{(0)}=0 \tag{14}$$

由式(13)中的第一式可求得：

$$\lambda=-2\sum_{i=1}^{m-1}(\beta_0+\beta_1x_1^{(i)}+\cdots+\beta_kx_k^{(i)}-y^{(i)})$$

代入其它各式得

$$\begin{cases}2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(\beta_0+\beta_1x_1^{(i)}+\cdots+\beta_kx_k^{(i)}-y^{(i)})(x_1^{(i)}-x_1^{(0)})=0\\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(\beta_0+\beta_1x_1^{(i)}+\cdots+\beta_kx_k^{(i)}-y^{(i)})(x_2^{(i)}-x_2^{(0)})=0\\ \qquad\vdots\\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(\beta_0+\beta_1x_1^{(i)}+\cdots+\beta_kx_k^{(i)}-y^{(i)})(x_k^{(i)}-x_k^{(0)})=0\end{cases} \tag{15}$$

由式(14)得

$$\beta_0=y^{(0)}-\beta_1x_1^{(0)}-\cdots-\beta_kx_k^{(0)} \tag{16}$$

代入式(15)并化简得

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(y^{(i)}-y^{(0)})(x_1^{(i)}-x_1^{(0)})=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{k}\beta_{\mathrm{j}}(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})(x_1^{(i)}-x_1^{(0)})\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(y^{(i)}-y^{(0)})(x_2^{(i)}-x_2^{(0)})=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{k}\beta_{\mathrm{j}}(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})(x_2^{(i)}-x_2^{(0)})\\ \qquad\vdots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}(y^{(i)}-y^{(0)})(x_k^{(i)}-x_k^{(0)})=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{k}\beta_{\mathrm{j}}(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})(x_k^{(i)}-x_k^{(0)})\end{cases}$$

上式很容易可以写成矩阵形式 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\overline{\boldsymbol{\beta}}$，则

$$\overline{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y},$$

其中：$\overline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{Bmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} & \cdots & x_k^{(1)} - x_k^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(m-1)} - x_1^{(0)} & \cdots & x_k^{(m-1)} - x_k^{(0)} \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y^{(1)} - y^{(0)} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} - y^{(0)} \end{bmatrix}$。

把$\overline{\boldsymbol{\beta}}$带入式(16)，即求得$\beta_0$，这样就得到了与代入法相同的结果。

4 优化数学模型的建立

对于结构优化，前述试验点向量即为设计变量点向量，二维连续体形状优化的数学模型可表示为：

$$\begin{cases} \text{find} & \boldsymbol{d} \in E^n \\ \min & s(\boldsymbol{d}) \\ \text{s.t.} & R_j(\boldsymbol{d}) \le \overline{R_j} \quad (j = 1,\cdots,J) \\ & \underline{d_i} \le d_i \le \overline{d_i} \quad (i = 1,\cdots,k) \end{cases} \tag{17}$$

其中$\boldsymbol{d}$为设计变量点向量，即前面的高维空间实验点向量$\boldsymbol{x}$，s为目标函数，取为二维连续体结构的面积。根据二级控制[12,13]理论，可以通过推导计算得到目标对设计变量的近似二次函数。状态变量约束采用改进的响应面方法拟合出了如式(7)所示的约束的近似显式。通过如上处理，式(17)成为二次规划的标准形式，可采用 Lemke 算法求解。

5 算例

5.1 悬臂梁的优化

图 2 所示悬臂梁，左端面固支，右端面中点受集中载荷$P = 10000\mathrm{N}$作用。弹性模量 21GPa，泊松比 0.3，许用应力 42MPa。结构的初始面积 20000mm^2，优化时厚度保持不变，视为平面问题进行优化。模型对于$y = 50\mathrm{mm}$的水平线对称。如图 2 所示选取 3 个设计变量，设计变量的变化范围均为 5mm~100mm。选取点 1、2 的 Mises 应力响应面的

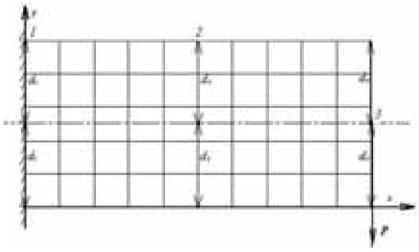

图 2 悬臂梁有限元模型

Fig.2 FEM model for cantilever

R^2和R^2_{adj}值对改进的响应面进行评价。

表 2 改进响应面方法的评价指标

Table 2 Appraisement index of improved RSM

迭代历程	改进的响应面方法评价节点			
	1		2	
	R^2	R^2_{adj}	R^2	R^2_{adj}
1	0.99989766	0.99984646	0.99989951	0.99984926
2	0.99989116	0.99983674	0.99990982	0.9998647
3	0.99989241	0.99983859	0.99989939	0.99984908
4	0.99992186	0.99988282	0.99992186	0.99988282

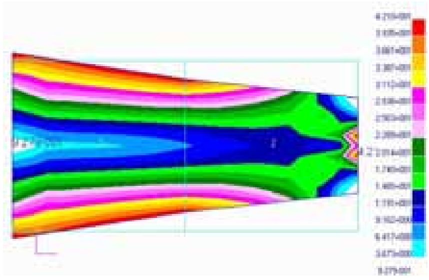

图 3 改进 RSM 优化应力云图

Fig.3 Optimal stress contour of improved RSM

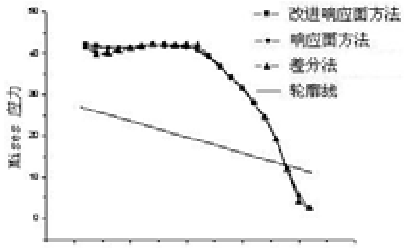

图 4 沿轮廓线的应力分布

Fig.4 Mises Stress distribution along contour line

表 3 应力约束下的优化结果

Table 3 Optimal result for stress constraints

方法	面积/mm^2	最大应力/MPa	左端部/mm	右端部/mm
差分法	16040.5	42.12	108.36	52.04
RSM	16068.1	42.11	108.5	52.18
改进的 RSM	16037.5	42.10	109	51.16

5.2 带孔方板的优化

(1) 初始设计为方孔的方板的优化

方板边长为 10mm，初始设计是在中心开一边长为 1.414mm 的方孔。上下受均布载荷p_1=10N/mm 作用，左右受均布载荷p_2=20N/mm 的作用，弹性模量 21GPa，泊松比 0.3，许用应力为 38MPa，结构的初始面积为 24.5mm^2。根据对称性，取板的四分之一进行优化。如图 6 所示选取 4 个设计变量，变化范围均为 0.01mm~2mm。优化过程中节点 1、2、3 的 Mises 应力响应面的R^2和R^2_{adj}值均在 0.99~1 之

间。

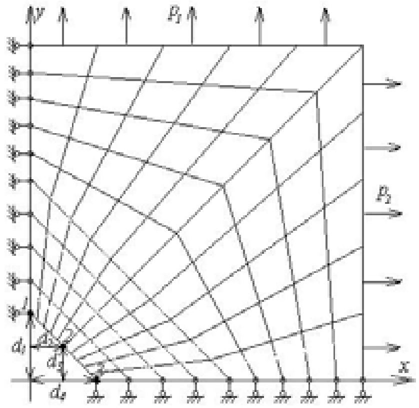

图 5　1／4 的有限元模型

Fig.5　A quarter FEM model

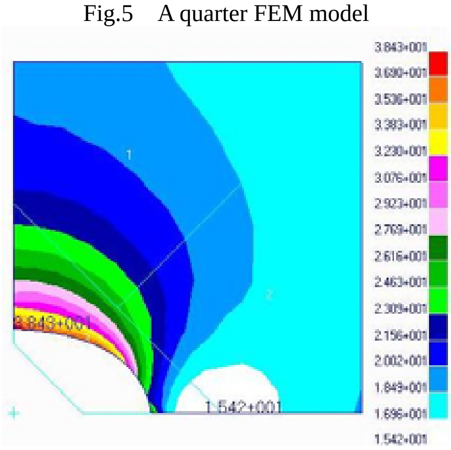

图 6　改进 RSM 优化应力云图

Fig.6　Optimal stress contour of improved RSM

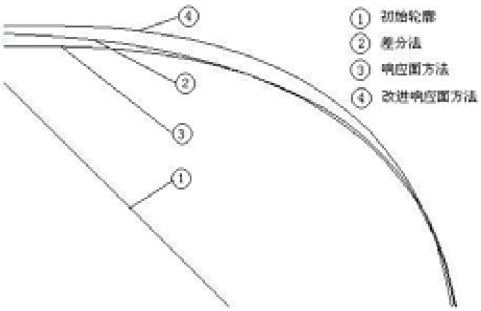

图 7　优化后的轮廓曲线

Fig.7　Optimal contour line

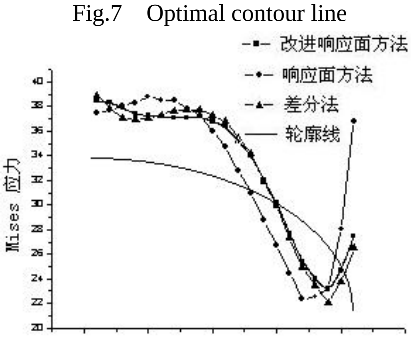

图 8　沿轮廓线的应力分布

Fig.8　Mises Stress distribution along contour line

表 4　应力约束下的优化结果

Table 4　Optimal result for stress constraints

方法	最大应力/MPa	长轴/mm	短轴/mm
差分法	38.92	1.996	1.219
RSM	38.80	2.001	1.164
改进的 RSM	38.43	1.982	1.256

(2) 初始设计为圆孔的方板的优化

初始设计是在中心开一半径为 1mm 的圆孔，结构的初始面积为 24.215mm^2。设计变量的选择如图 9 所示，其他条件与 6.2 完全相同。

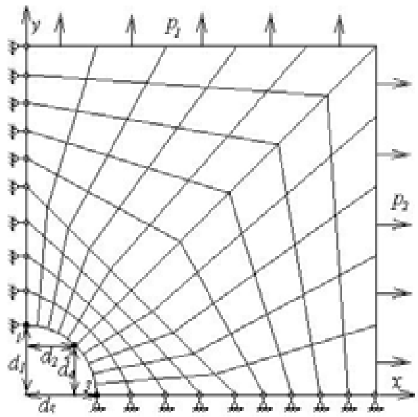

图 9　1／4 的有限元模型

Fig.9　A quarter FEM model

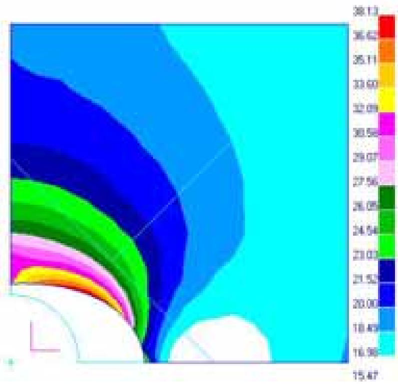

图 10　改进 RSM 优化应力云图

Fig.10　Optimal stress contour of improved RSM

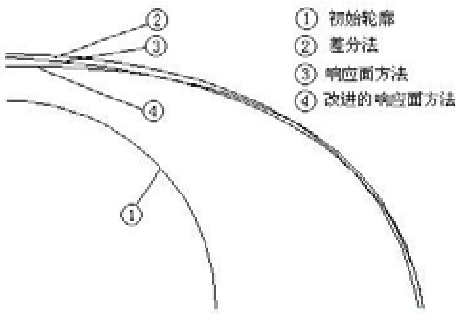

图 11　优化后的轮廓曲线

Fig.11　Optimal contour line

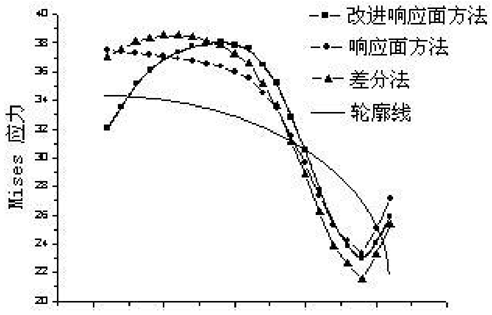

图 12 沿轮廓线的应力分布

Fig.12 Mises Stress distribution along contour line

表 5 应力约束下的优化结果

Table 5 Optimal result for stress constraints

方法	最大应力/MPa	长轴/mm	短轴/mm
差分法	38.57	1.973	1.226
RSM	37.51	1.992	1.204
改进的 RSM	38.13	1.992	1.164

6 结论

本文算例得出如下结论：

(1) 响应面方法用于建立二维连续体结构形状优化的模型是有效的，两个算例皆表明改进的响应面方法比差分法满足应力约束值的误差更小，优化后沿轮廓线的应力集中现象也大为减轻。在算例 2 带孔方板的优化的中，初始结构为圆孔的结构由于设计合理，迭代次数相对较少，初始设计为方孔结构的应力集中比较严重，是一种比较差的设计，但采用改进的响应面方法优化后的结果与初始设计是圆孔的优化结果非常接近。从另一方面说明了这一方法用于结构形状优化的可靠与稳定。

(2) 改进的响应面方法在结构优化中的应用可以遵循结构优化设计中一个重要的约定，即每次迭代点的响应值都等于准确的有限元分析值，而这一点，一般的响应面方法并不能总是保证的。

(3) 本文的方法除了对二维连续体形状优化适用，也适用于更广泛的结构优化的建模；除了用于含应力约束的结构优化，还可以用于含位移约束、频率约束及混合约束的结构优化中。

参考文献：

[1] 张传立，张系斌，宋天霞．结构动力形状优化中灵敏度分析的两种算法[J]．江汉石油学院学报，1994，16(4): 83~89.
Zhang Chuanli, Zhang Xibin, Song Tianxia. Sensitivity analysis in dynamic structure optimization [J]. Journal of Jianghan Petroleum Institute, 1994, 16(4): 83~89. (in Chinese)

[2] Wang S, Sun Y, Gallagher R H. Sensitivity analysis in shape optimization of continuum structures [J]. Comput. & Structures, 1985, 20(5): 855~867.

[3] Ramakrishnan C V, Francavilla A. Structural shape optimization using penalty functions [J]. J. Struct. Mech, 1975, 3(4): 403~422.

[4] 张德欣，张允正，蔡謇．形状优化的全解析敏度分析[J]．应用数学和力学, 2001, 22(11): 1193~1200.
Zhang Dexin, Zhang Yunzheng, Cai Jian. Analytic sensitivity analysis for shape optimization [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(11): 1193~1200. (in Chinese)

[5] 郭旭，顾元宪，赵康．广义变分原理的结构形状优化伴随法灵敏度分析[J]．力学学报, 2004, 36(3): 288~295.
Guo Xu, Gu Yuanxian, Zhao Kang. Adjoint shape sensitivity analysis based on generalized variational principle [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(3): 288~295. (in Chinese)

[6] Myers R H, Montgomery D C. Response surface methodology [M]. New York: Wiley and Sons, 1995.

[7] Zheng Y, Das P K. Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis [J]. Engineering Structures, 2000, 22: 544~551.

[8] Rijpkema J J M, Etman L F P, Schoofs A J G. Use of design sensitivity information in response surface and kriging metamodels [J]. Optimization and Engineering, 2001, 2: 469~484.

[9] Jansson T, Nillsson L, Redhe M. Using surrogate models and response surfaces in structural optimization with application to crashworthiness design and sheet metal forming [J]. Struct Multidisc Optim, 2003, 25: 129~140.

[10] Liu B, Haftka R T, Watson L T. Global-local structural optimization using response surfaces of local optimization margins [J]. Struct Multidisc Optim., 2004, 27(5): 352~359.

[11] 王晓峰，席光，王尚锦．响应面方法在叶片扩压器优化设计中的应用研究 [J]．工程热物理学报，2003，24(3): 391~394.
Wang Xiaofeng, Xi Guang, Wang Shangjin. Application of response surface methodology in the optimization design of vaned diffused [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2003, 24(3): 391~394. (in Chinese)

[12] 王备，隋允康．形状优化中控制网格变动的一种新方法[J]．大连理工大学学报, 1997, 37(4): 386~391.
Wang Bei, Sui Yunkang. New method of controlling mesh changes in shape optimization[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1997, 37(4): 386~391. (in Chinese)

[13] 隋允康，王希诚，王备，陈儒．三维连续体结构优化程序系统[J]．大连理工大学学报, 1998, 38(3): 255~260.
Sui Yunkang, Wang Xicheng, Wang Bei, Chen Ru. Software for 3D shape optimal design of continuous body [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1998, 38(3): 255~260. (in Chinese)