第 22 卷第 4 期　　工　程　力　学　　Vol.22 No.4
2005 年　8　月　　ENGINEERING　MECHANICS　　Aug.　2005

文章编号：1000-4750(2005)04-0048-04

# 轴向运动粘弹性弦线的横向非线性动力学行为

*陈立群[1,2]，吴　俊[2]

(1. 上海大学力学系, 上海　200436；2. 上海市应用数学和力学研究所，上海　200072)

摘　要：采用 Poincaré 映射和分岔图分析轴向运动黏弹性弦线横向振动的非线性动力学行为。考虑由积分型本构关系描述的黏弹性弦线，并计及微小但有限的变形导致的几何非线性，建立了系统的控制方程。应用 Galerkin 方法将系统控制方程截断，并通过引入辅助变量将截断后的方程转化为便于数值积分的形式。计算了弦线中点 Poincaré 映射对轴向张力涨落幅值、轴向运动速度、黏弹性系数和黏弹性指数的分岔图。

关键词：轴向运动弦线；横向振动；黏弹性；非线性；分岔

中图分类号：O332　　文献标识码：A

# TRANSVERSE NONLINEAR DYNAMICAL BEHAVIOR OF AXIALLY MOVING VISCOELASTIC STRINGS

*CHEN Li-qun[1,2] , WU Jun[2]

(1. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200436, China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** Nonlinear dynamical behaviors for transverse vibation of axially moving viscoelastic strings are investingated based on the Poincaré map and bifurcation diagram. The governing equation is derived for the viscoelastic string using the integral constitutive relation. The geometrical nonlinearity due to small but finite deformation is taken into account in the derivation. The Galerkin method is used to control the truncation error of the governing equation. Auxiliary variables are introduced to transform the truncated system into the form which is convenient to integrate numerically. The bifurcation diagrams of the Poincaré maps of the string center are calculated versus the amplitude of tension fluctuation, the axial traveling speed, the viscoelastic coefficient and exponent of the string material.

**Key words:** axially moving string; vibration; viscoelasticity; nonlinearity; bifurcation

多种工程系统如动力传送带、磁带、纸带、纺织纤维、带锯、空中缆车索道、高楼升降机缆绳、单索架空索道等，忽略抗弯刚度时均可模型化为轴向运动弦线。因此轴向运动弦线的横向振动被广泛研究[1~4]。横向振动研究的重要问题之一是工程系统中阻尼因素的建模，其有效解决途径是考虑弦线的黏弹性。尽管近年来微分型黏弹性轴向运动弦线已有较充分的研究，积分型黏弹性轴向运动弦线研究较少。Fung 等首先研究了积分型黏弹性轴向运动弦线的横向振动，基于静态弦线模态的 Galerkin 截断提出了一种计算暂态响应的数值方法[5]。Zhang 等基于移动弦线模态的 Galerkin 截断并利用求解常微分－积分方程的现有方法提出另一种计算暂态响应的数值方法[6]。Chen 等采用直接多尺度法分析了近倍频共振[7]和近和式共振[8]，导出了稳态周期响应的幅值和存在条件。现有的工作或研究暂态响

———————————————

收稿日期：2003-08-06；修改日期：2004-01-10

基金项目：国家自然科学基金项目(100172056, 100472060)；上海市自然科学基金项目(04ZR14058)

作者简介：*陈立群(1963)，男，上海市人，教授，博士，博士生导师，从事非线性动力学和振动控制研究(E-mail: lqchen@online.sh.cn)；
吴　俊(1978)，男，苏州市人，硕士，从事非线性动力学研究。

应，或研究平衡和周期运动等简单稳态响应，均没有涉及分岔、混沌等稳态复杂非线性动力学行为。本文拟研究积分型黏弹性轴向运动弦线的横向非线性动力学行为，用 Poincaré 映射和分岔图分析系统相关参数的影响。

# 1 控制方程及其 Galerkin 截断

均质黏弹性弦线，长为 $L$，密度为 $\rho$，截面积为 $A$，初始张力为 $P$，在相距为 $L$ 的两个边界间以匀速度 $c$ 沿轴向运动。仅考虑 $y$ 方向上的横向位移 $U(X,T)$，其中 $T$ 为时间、$X$ 为轴向坐标。由质点运动微分方程，得到

$$\rho A\left(\frac{\partial^2 U(X,T)}{\partial T^2}+2c\frac{\partial^2 U(X,T)}{\partial X\partial T}+c^2\frac{\partial^2 U(X,T)}{\partial X^2}\right)= P\frac{\partial^2 U(X,T)}{\partial X^2}+\frac{\partial}{\partial X}\left(A\sigma(X,T)\frac{\partial U(X,T)}{\partial X}\right) \tag{1}$$

弦线为积分型黏弹性材料，本构方程为

$$\sigma(X,T)=E_0\varepsilon(X,T)+\int_0^T E(T-T')\varepsilon(X,T')\,\mathrm{d}T' \tag{2}$$

其中 $\sigma(X,T)$ 是轴向应力，$E_0$ 是弦线的初始弹性模量，$E(t)$ 为应力松弛函数，$\varepsilon(X,T)$ 是轴向 Lagrange 应变

$$\varepsilon(X,T)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U(X,T)}{\partial X}\right)^2 \tag{3}$$

描述由于弦线的微小但有限的变形产生的几何非线性。设轴向张力为常平均张力和简谐涨落度的叠加，即

$$P=P_0+P_1\cos\Omega T\qquad (P_0,P_1>0) \tag{4}$$

式(2)、(3)和(4)代入式(1)并进行无量纲变换，导出系统的控制方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+(\gamma^2-1-b\cos\omega t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3}{2}D_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\int_0^t\dot{D}(t-t')\left(\frac{\partial u(x,t')}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}t'-\frac{\partial u}{\partial x}\int_0^t\dot{D}(t-t')\frac{\partial u(x,t')}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t')}{\partial x^2}\mathrm{d}t'=0 \tag{6}$$

其中

$$u=\frac{U}{L},\ x=\frac{X}{L},\ t=\frac{T}{L}\sqrt{\frac{P_0}{\rho A}},\ \gamma=c\sqrt{\frac{\rho A}{P_0}}$$
$$D_0=\frac{AE_0}{P_0},\ D(t-t')=\frac{AE(T-T')}{P_0} \tag{7}$$
$$\omega=\Omega L\sqrt{\frac{\rho A}{P_0}},\ b=\frac{P_1}{P_0}$$

传输带等多种模型化为弦线的工程系统的边界条件为无横向振动

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=0 \tag{8}$$

对于非线性偏微分－积分方程(6)，采用 Galerkin 方法将其简化为常微分－积分方程组。在边界条件(8)下，选静态弦线的模态为试函数。方程(6)的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{m}q_n(t)\sin(n\pi x) \tag{9}$$

其中 $q_n(t)$ 为广义坐标。权函数仍选静态弦线的模态。将式(6)左端记作关于 $u(x,t)$ 的非线性算子 $N[u]$，则 $m$ 阶 Galerkin 截断系统满足条件

$$\int_0^1 N\left[\sum_{n=1}^{m}q_n(t)\sin(n\pi x)\right]\sin(i\pi x)\,\mathrm{d}x=0\quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

以往对微分型黏弹性轴向运动弦线的研究表明[9,10]，由于陀螺耦合项的存在，偶数阶 Galerkin 截断得到较为精确的结果，且 2 阶和 4 阶 Galerkin 截断的系统非线性动力学行为定性相同。因此，这里采用 2 阶 Galerkin 截断。在式(10)取 $m$=2，并计算相应积分，导出

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_1-\frac{16\gamma\dot{q}_2}{3}-\pi^2(\gamma^2-1-b\cos\omega t)q_1+\frac{3\pi^4E_0}{8}(q_1^3+8q_1q_2^2)+\frac{3\pi^4}{8}\int_0^t\dot{D}(t-t')(q_1^3+8q_1q_2^2)\,\mathrm{d}t'=0\\&\ddot{q}_2+\frac{16\gamma\dot{q}_1}{3}-4\pi^2(\gamma^2-1-b\cos\omega t)q_2+3\pi^4E_0(q_1^2q_2+2q_2^3)+3\pi^4\int_0^t\dot{D}(t-t')(q_1^2q_2+2q_2^3)\,\mathrm{d}t'=0\end{aligned} \tag{11}$$

在本研究中，设弦线黏弹性材料的松弛函数为标准线性固体的指数函数，即

$$D(t)=1-a+a\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{12}$$

其中 $a$ 为黏弹性系数，$\alpha$ 为黏弹性指数。为便于数值求解常微分－积分方程组(11)，引入辅助变量

$$\begin{aligned}w_1&=a\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha t}(q_1^3+8q_1q_2^2)\,\mathrm{d}t'\\w_2&=a\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha t}(q_1^2q_2+2q_2^3)\,\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{13}$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{w}_1&=-\alpha w_1+a\alpha(q_1^3+8q_1q_2^2)\\\dot{w}_2&=-\alpha w_2+a\alpha(q_1^2q_2+2q_2^3)\end{aligned} \tag{14}$$

将式(12)和(13)代入式(11)，导出

$$
\begin{aligned}
&\ddot{q}_1-\frac{16\gamma\dot{q}_2}{3}-\pi^2(\gamma^2-1-b\cos\omega t)q_1+\\
&\quad\frac{3\pi^4 E_0}{8}(q_1^3+8q_1q_2^2)+\frac{3\pi^4}{8}w_1=0\\
&\ddot{q}_2+\frac{16\gamma\dot{q}_1}{3}-4\pi^2(\gamma^2-1-b\cos\omega t)q_2+\\
&\quad 3\pi^4 E_0(q_1^2q_2+2q_2^3)+3\pi^4 w_2=0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

方程(14)和(15)构成封闭的常微分方程组，可以用现有的数值方法如 4 阶 Runge-Kutta 法求解。

## 2 参数对非线性动力学行为的影响

Poincaré 映射是探索系统非线性动力学行为的有效工具。本文用弦线中点的 Poincaré 映射反映系统的非线性动力学行为，并进而用 Poincaré 映射随相关参数变化的分岔图反映参数对非线性动力学行为的影响。对于给定的系统参数，数值求解方程(14)和(15)可得到系统广义坐标和广义速度，代入式(9)及其时间微分并取 $x$=0.5 便得到弦线中点的位移和速度，对该位移和速度以 $2\pi/\omega$ 的时间间隔采样，构成系统的 Poincaré 映射。若令参数在某区间内变化，对该区间中各参数计算 Poincaré 映射，便得到系统对该变化参数的分岔图。

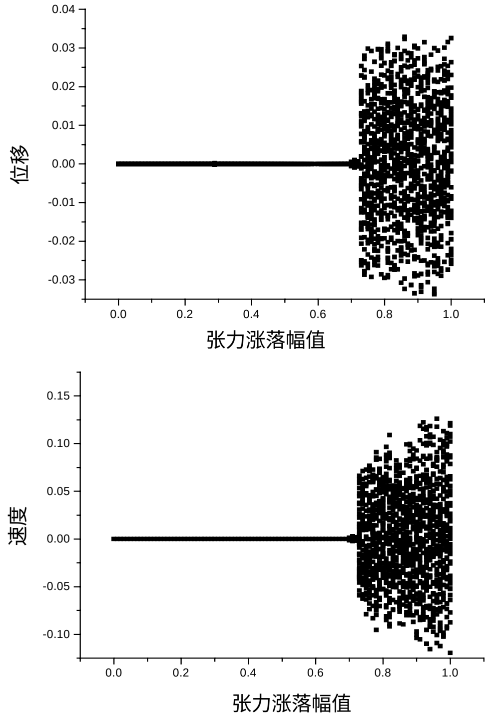


图 1 轴向张力幅值对非线性动力学行为的影响

Fig.1 Effect of tension fluctuation amplitude on nonlinear behavior

Poincaré 映射对无量纲化张力涨落幅值 $b$ 的分岔图如图 1 所示，其中 $\gamma$=0.9、$\alpha$=0.9、$a$=0.7、$E_0$=100.0、$\omega$=0.25。数值结果表明，在该组参数下，当张力涨落幅值超过一临界值时，弦线的平衡位置失稳，突然出现幅值较大的混沌运动，且涨落涨落幅值的继续增加对混沌的影响不大。Poincaré 映射对无量纲化轴向速度 $\gamma$ 的分岔图如图 2 所示，其中 $b$=0.8、$\alpha$=0.9、$a$=0.7、$E_0$=100.0、$\omega$=0.25。

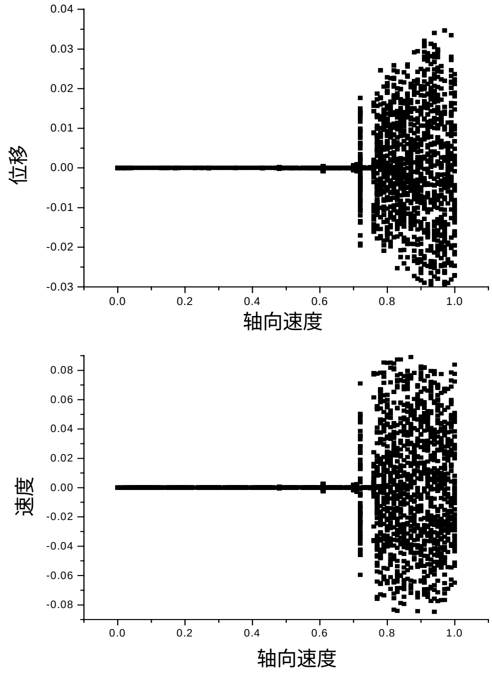


图 2 轴向速度对非线性动力学行为的影响

Fig.2 Effect of axial speed on nonlinear behavior

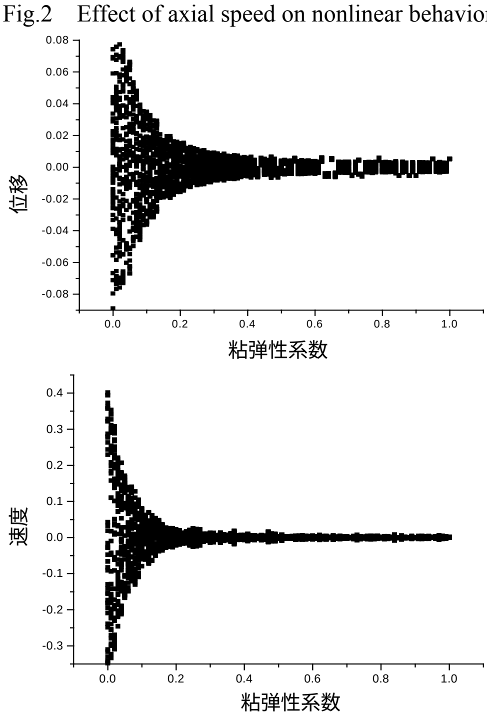


图 3 黏弹性系数对非线性动力学行为的影响

Fig.3 Effect of viscoelastic coefficient on nonlinear behavior

数值结果表明，在该组参数下，轴向速度超过一临界值时，弦线的平衡位置失稳，突然出现幅值较大的混沌运动，然后经过混沌和平衡短暂的交替变化，分岔图中出现混沌区。Poincaré 映射对黏弹性系数 $a$ 的分岔图如图 3 所示，其中 $b$=0.8、$\gamma$=0.9、$\alpha$=0.9、$E_0$=100.0、$\omega$=0.25。Poincaré 映射对黏弹性指数 $\alpha$ 的分岔图如图 4 所示，其中 $b$=0.8、$\gamma$=0.9、$a$=0.8、$E_0$=100.0、$\omega$=0.25。数值结果表明，在相关给定参数下，黏弹性系数和黏弹性指数对非线性动力学行为的影响类似，混沌运动的幅值随黏弹性系数或指数的增加而减小，对于较大的黏弹性系数指数，分岔图的混沌区域中出现周期窗口。

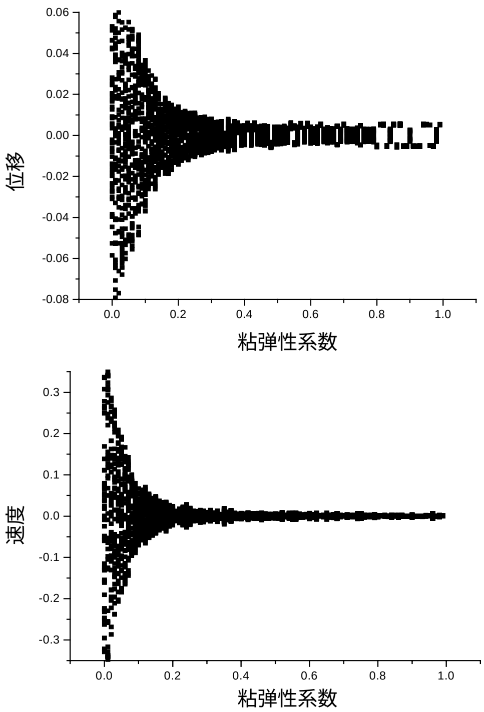


图 4 黏弹性指数对非线性动力学行为的影响

Fig.4 Effect of viscoelastic exponent on nonlinear behavior

## 3 结论

本文研究了积分型黏弹性轴向运动弦线横向非线性动力学行为。基于动力学关系、几何关系和本构关系建立了系统的控制方程。采用 Galerkin 方法进行截断，并通过引入辅助变量进一步化简。采用数值方法计算了弦线中点的 Poincaré 映射对轴向张力涨落幅值、轴向运动速度、黏弹性系数和黏弹性指数的分岔图。

## 参考文献：

[1] Wickert J A, Mote C D Jr. Current research on the vibration and stability of axially-moving materials [J]. Shock and Vibration Digest, 1988, 20(5): 3~13.

[2] Zhu W D. Vibration and stability of time-dependent translating media [J]. Shock and Vibration Digest, 2000, 32(5): 369~379.

[3] 陈立群, Jean W Zu. 轴向运动弦线的纵向振动及其控制[J]. 力学进展, 2001, 31(4): 535~546.
Chen Liqun, Jean W Zu. Transverse vibration of axially moving strings and its control [J]. Advance in Mechanics, 2001, 31(4): 535~546. (in Chinese)

[4] Chen L Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings [J]. ASME Applied Mechanics Reviews, 2005, 58(2): 91~116.

[5] Fung R F, Huang J S, Chen Y C. The transient amplitude of the viscoelastic travelling string: an integral constitutive law [J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 201(1): 153~167.

[6] Zhang L, Zu J W, Zhong Z. Transient response for viscoelastic moving belts using block-by-block method [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2002, 2(2): 265~280.

[7] Chen L Q, Zu J W. Parametrical resonance of the excited axially moving string with an integral constitutive law [J]. International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulations, 2003, 4(2): 169~177.

[8] L.-Q. Chen, J. W. Zu, J. Wu. Dynamic response of the parametrically excited axially moving string constituted by the Boltzmann superposition principle [J]. Acta Mechanica, 2003, 162(1-4): 143~155.

[9] Chen L Q, Zhang N H, Zu J W. The regular and chaotic vibrations of an axially moving viscoelastic string based on 4-order Galerkin truncation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 261(4): 764~773.

[10] Chen L Q, Wu J, Zu J W. Asymptotic nonlinear behaviors in transverse vibration of an axially accelerating viscoelastic string [J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 35(4): 347~360.