

文章编号: 1000-4750(2007)07-0152-04

异型挤压模腔纵向曲线与共形映射

*齐红元, 朱衡君

(北京交通大学机械与电子控制工程学院, 北京 100044)

摘 要: 应用共形映射理论, 在异型材非圆截面轮廓上, 通过有限奇偶插值点的相互数值求解, 建立异型材截面域与单位圆域相互转化的共形映射函数。将异型材挤压成形转化为二维问题, 求得塑性流函数, 建立各种纵向曲线的模腔曲面数学模型。应用上限原理, 对比三种模腔纵向曲线及优化模腔参数, 并以椭圆异型材为例进行优化求解与分析。

关键词: 挤压; 共形映射; 成形; 上限原理; 模腔纵向曲线

中图分类号: TG375; TH123 **文献标识码:** A

VERTICAL CURVE OF DIE CAVITY AND CONFORMAL MAPPING IN SPECIAL-SHAPED EXTRUSION

*QI Hong-yuan, ZHU Heng-jun

(School of Mechanical and Electrical Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: By Complex Mapping theory, doing mutual numerical calculation to finite odd and even interpolation points on the non-circle cross-section profile of special-shaped products, the conformal mapping function which can mutually transform cross-section region into unit dish region is set up. Translating the extrusion forming of special-shaped products into two-dimension problem, plastic stream function is determined, and the mathematical models of die cavity surface with various vertical curves are built up. Using the upper bound method, three types of vertical curves and their optimized parameters of die cavity are compared. Taking ellipse-shaped products as examples, their analysis and optimization are carried out.

Key words: extrusion; conformal mapping; forming; the upper bound method; vertical curve of die cavity

诸多因素影响异型材挤压制品质量及能耗, 其中因素之一是模腔纵向曲线的优选。目前模具模腔纵向曲线通常采用直线型、三次流线型、凸与凹线型。线型的选择影响着模腔的几何形状、金属塑性流动、材料的强化性能、型材表面质量与润滑剂的选用等诸因素。如: 纵向曲线严重不适时, 可导致鱼鳞状裂纹的型材表面缺陷, 影响着制品成形质量^[1]。由于异型成形机理复杂^[2], 三维成形求解困难, 研究进展缓慢, 尚未有通用模腔纵向曲线型优化的分析方法, 即使取得某些研究进展, 这些成果

基本上是针对个别异型材的特解, 难以应用于其它任意类型材的模腔建模上^[3~5]。

当今采用共形映射理论, 仅利用给定典型域向简单域转化的映射函数^[6,7], 使复杂域求解转换为简单域问题, 使某些工程问题求解成为可能。共形映射理论已在通讯工程、电磁学、流体力学、与塑性加工等领域中得到应用^[8~10]。本文采用共形映射理论^[11,12], 将此复杂的三维塑性流动问题转化为简单二维问题。应用上限原理, 将纵向曲线为三次曲线、直线型与凸型的三种模腔进行比对。以椭圆型材成

收稿日期: 2005-12-12; 修改日期: 2006-04-10

基金项目: 北京交通大学科技基金资助项目(JX2002J0150)

作者简介: *齐红元(1964), 男, 哈尔滨市人, 副教授, 博士, 从事共形映射数值理论及工程应用研究(E-mail: qhy@jdxj.njtu.edu.cn);

朱衡君(1950), 男, 北京市人, 教授, 博士, 从事故障诊断与仿真及工程优化研究(E-mail: hjzhu@center.njtu.edu.cn)。

形为实例,进行了模腔纵向曲线比对与参数优化。

1 共形映射

采用复变共形映射理论,将图 1(b)复杂域映射转化为图 1(a)的单位圆域。将复变多项式的映射函数描述复杂模腔剖面几何域,其共形映射方程

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi^n \quad (\xi = \rho \exp(i\theta)) \quad (1)$$

式(1)中, ρ , θ 分别为复向量 ξ 的模和幅角, $c_n = a_n + ib_n$ 为复系数。共形映射函数以三角函数方式表达

$$\begin{cases} x(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n \cos n\theta \\ y(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n \sin n\theta \end{cases} \quad (2)$$

如图 1 所示,设复杂域 W 边界的 $W_k = x_k + iy_k$ 点为插值点 $k \in N$ (正整数),其中 x_k 与 y_k 分别为复向量 W_k 的实部与虚部值。经映射函数 W , $W_1, W_2, \dots, W_m$ 复向量映射点分别是如图 1(a)所示的 1, 2, $\dots$, m 复向量,其幅角 $\theta_k \in [0, 2\pi]$ 成等差级数。由三角函数正交性,在确保复系数 c_n 计算精度条件下,采用 m 个奇与偶插值点 (x_k, y_k) 相互迭代的数值求解方法^[13],求解 c_j 值

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [x_k \cos j\theta_k + y_k \sin j\theta_k] \\ b_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [-x_k \sin j\theta_k + y_k \cos j\theta_k] \end{cases} \quad (3)$$

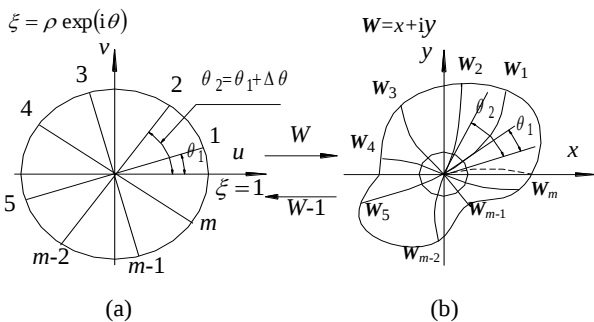


图 1 复杂域与单位圆域共形映射

Fig.1 Mapping between complicated region and unit dish

2 模腔纵向曲线函数 $f(z)$

模腔纵向曲线函数 $f(z)$ 是计算金属塑性流动场、模腔建模及其变形区长度 L 优化的重要函数。如图 2 所示, $f(z)$ 选定应满足模腔几何边界条件,即在模腔进、出口处的几何剖面轮廓应为坯料 S_i 与

制品 S_o 外轮廓

$$f(z=0)=1; \quad f(z=L)=0 \quad (4)$$

当模腔纵向曲线为直线型时

$$f(z) = -\frac{1}{L}z + 1 \quad (5)$$

当模腔纵向曲线为凸型时

$$f(z) = \sqrt{-\frac{1}{L}z + 1} \quad (6)$$

当模腔纵向曲线为三次型

$$f(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$$

其不仅要满足式(3)几何边界条件,而且要满足模腔进、出口处的塑性流动条件

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=L} = 0 \quad (7)$$

得

$$f(z) = 2\frac{z^3}{L^3} - 3\frac{z^2}{L^2} + 1 \quad (8)$$

假设在模腔进口处,剖面域为半径 R_i 的圆形坯料。将得到 $f(z)$ 函数与式(2)联立,可建立了挤压变形域与三维模腔曲面参数方程

$$\begin{cases} x = R_i f(z) \cos \theta + [1 - f(z)] \sum_{n=1}^m c_n \rho^n \cos n\theta \\ y = R_i f(z) \sin \theta + [1 - f(z)] \sum_{n=1}^m c_n \rho^n \sin n\theta \\ z = z \quad (0 \leq z \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1) \end{cases} \quad (9)$$

综上,通过共形映射奇、偶插值点相互迭代的 c_n 求解方法,完成了挤压模腔(当 $\rho=1$ 时)的建模。

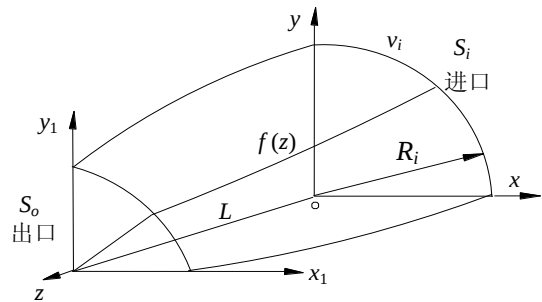


图 2 挤压模腔曲面

Fig.2 Surface of extruding die cavity

3 塑性流动场

如图 2 所示, v_i 和 S_z 为模具中金属任意横截面面积、坯料进口处 z 轴方向的塑性流动速度。设在垂直 z 轴任意截面中,沿 z 轴方向速度 v_z 是均布的,得

$$v_z = \frac{S_i}{S_z} v_i \quad (10)$$

异型材塑性流动的两个流面方程

$$\rho(x, y, z) = \text{Constant}; \quad \theta(x, y, z) = \text{Constant} \quad (11)$$

设异型材在变形区中, 沿坐标轴 x , y , z 方向的塑性流动速度分量为 v_x 、 v_y 、 v_z 。分别对式(11) ρ 和 θ 两个任意流面取全微分, 得塑性变形的流函数方程

$$\frac{v_x}{-\sum_{n=1}^m A'_n(z) \rho^n \cos n\theta} = \frac{v_y}{-\sum_{n=1}^m A'_n(z) \rho^n \sin n\theta} = \frac{v_z}{1} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_1(z) &= R_1 f(z) + c_1 [1 - f(z)] \\ A_n(z) &= c_n [1 - f(z)] \quad (n=2, 3, \dots, m) \end{aligned}$$

由塑性成形理论得应变速度场^[14]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (13)$$

4 能耗及模腔优化

设 $\dot{\epsilon}(\rho, \theta, z)$ 为等效应变率, σ_s 为金属屈服极限, V 为变形体空间体积, k 为剪切屈服极限, $v_{i(z=0)}$, $v_{o(z=L)}$ 为模腔进、出口处间断速度, $v_{S(\rho=1)}$ 为模腔与金属表面相对速度, m 为摩擦因子。由金属塑性成形上限原理, 金属在塑性变形区的总能耗 $J^*(L)$ 等于金属在变形区中的变形能耗、 S_i 与 S_o 面剪切能耗和模腔表面 S 的摩擦耗能之和

$$\begin{aligned} J^*(L) &= \iiint_V \dot{\epsilon} \sigma_s dV + k \iint v_{i(z=0)} ds_i + k \iint v_{o(z=L)} ds_o + \\ &\quad m k \iint v_{S(\rho=1)} ds, \quad \left(k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{令:} \quad P = \frac{J^*(L)}{S_i v_i \sigma_s} \quad (15)$$

P — 相对载荷比。

由式(15), 对 P 取极值, 可优化模具参数 L 。

5 算例

设坯料为直径 30mm 的圆棒料, 椭圆型材制品的长轴 28mm, 短轴 18mm。经奇数和偶数插值点迭代运算(第一象限中取插值点 $m=32$ 个来代替式(2)的无限多个点), 得计算值 c_n

$$\begin{aligned} a_{2j-1} &= \{1.316552, 0.073814, 0.007726, 0.001113, \\ &\quad 0.000699, 0.000065, -0.000570, -0.000035, \\ &\quad 0.000695, 0.000043, -0.000930, -0.000056, \\ &\quad 0.001448, 0.000087, -0.003114, -0.000186\}; \end{aligned}$$

$$a_{2j} = 0, \quad b_{2j} = b_{2j-1} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, 16)$$

代入式(15), 通过对金属变形区长度 L 寻优,

得式(9)模腔函数。如图 3 所示, 在相同压缩比 $\lambda=0.56$ 和摩擦因子 $m=0.30$ 的条件下, 纵向曲线为凸型的模具参数 $L=13.1$; 纵向曲线为直线型的模具参数 $L=14.2$; 纵向曲线为流线型的模具参数 $L=17.2$ 。图 3 的纵向曲线为凸型、直线型与流线型的模具模腔, 能耗有递减的变化趋势, 优化参数 L 有递增的趋势。表明材料在流线型模腔成形中, 塑性流动较为平缓, 因此在模腔加工技术可取条件下, 应采用流线模具, 有助获得较好的挤压制品质量。同时从能耗观点分析, 纵向曲线为直线型的模具优于凸型的模具。如图 4 所示, 是纵向曲线为流线型的模腔图形。

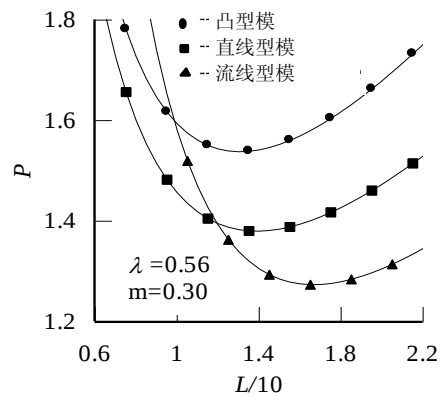


图 3 模具参数优化曲线

Fig.3 Optimized curve of dies' parameter L

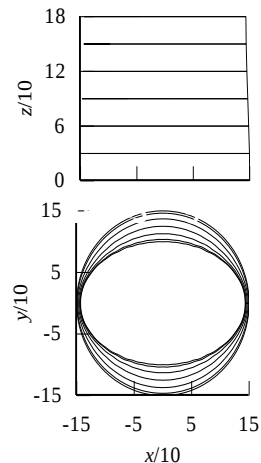


图 4 优化模腔

Fig.4 Optimized die cavity

6 结论

(1) 通过共形映射理论, 得到纵向曲线为凸型、直线型与流线型的挤压异型材成形模腔三维曲面的数学模型。

(2) 通过模腔优化分析, 认为纵向曲线为流线型的模腔优于凸型、直线型, 而直线型的模腔优于

凸型的模腔。

参考文献:

- [1] 刘静安. 铝型材挤压模具设计[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1999. 73.
Liu Jingan. Extruding die design of al special-shaped products [M]. Beijing: Metallurgy Industry Press, 1999. 73. (in Chinese)
- [2] Celik K F, Chikara N R. Off-centric extrusion of circular rods through streamlined dies, CAD/CAM application, analysis and some experiments [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2000, 42: 295~320.
- [3] Alcaraz J L, Gil-Sevillano J. Safety maps in bimetallic extrusion [J]. Journal of Material Processing Technology, 1996, 60:133~140.
- [4] Chitara N R, Aleem A. Axi-symmetric tube extrusion / piercing using die-mandrel combination: some experiments and generalized upper bound analysis [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2001, 43: 1685~1709.
- [5] Kar P K. Upper bound analysis of extrusion of I-section bars from square/rectangular billets through square dies [J]. International Journal of Mechanical Science, 1997, 39: 926~934.
- [6] 邹继斌. 磁路与磁场[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1998.
Zou Jibin. Magnetic circuit and magnetic field [M]. Haierbin: Haierbin Institute of Technology Press, 1998. (in Chinese)
- [7] 吴国钊. 串列叶栅理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.
Wu Guochuan. Tandem blade cascade [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1996. (in Chinese)
- [8] Teppati C. Conformal-mapping design tools for coaxial couplers with complex cross section [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2002, 50(10): 2339~2345.
- [9] Rajalingham C. Axisymmetric vibration of circular plates and its analog in elliptical plates using characteristic orthogonal polynomials [J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 161: 109~118.
- [10] Amatore C. Simulation of the double hemicylinder generator-collector assembly through conformal mapping technique [J]. Journal of Electroanalytical Chemistry, 2003, 553(Suppl): 49~61.
- [11] 黄先春. 保角映射手册[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1980. 90.
Huang Xianchun. Conformal mapping handbook [M]. Wuhan: Huazhong University of Technology and Science Press, 1980. 90. (in Chinese)
- [12] Yavuz Netku. Conformal field theory [M]. Cambridge Massachusetts USA: Perseus. Pub., 2000-1v. 35.
- [13] 齐红元, 朱衡君. 见: 中国博士后基金委. 2000 年中国博士后学术大会[C]. 北京: 科学出版社, 2001. 484~488.
Qi Hongyuan, Zhu Hengjun. In: Chinese Postdoctoral Science Foundation ed. Proceeding of Chinese Postdoctoral Academic Conference [C]. Beijing: Science Press, 2001. 484~488. (in Chinese)
- [14] 赵志业. 塑性加工理论基础[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1989. 82.
Zhao Zhiye. Theory basis of metal stress process [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 1989. 82. (in Chinese)

(上接第 133 页)

- [7] 林拥军, 程文灏, 徐明. 配有圆钢管的钢骨混凝土柱轴压比限值的试验研究[J]. 土木工程学报, 2001, (6): 24~28.
Lin Yongjun, Cheng Wenrang, Xu Ming. Experimental study on limit values of axial compression ratio of SRC columns with circular steel tube [J]. China Civil Engineering Journal, 2001, (6): 24~28. (in Chinese)
- [8] Chang W T, Wang C T, Huang C W. Concrete at temperature above 1000 °C [J]. Fire Safety Journal, 1994, 23: 223~243.
- [9] Kristensen L, Hansen T C. Cracks in concrete core due to fire or thermal heating shock [J]. ACI Materials Journal, 1994, 91(5): 453~458.
- [10] 李晓东, 董毓利, 安锋. 钢筋混凝土结构火灾研究综述[J]. 青岛建筑工程学院学报, 2005, (1): 19~21.
Li Xiaodong, Dong Yuli, An Feng. Fire resistant design of reinforced concrete structure [J]. Journal of Qiangdao Institute and Architecture and Engineering, 2005, (1): 19~21. (in Chinese)
- [11] 徐明, 苏丽莉, 程文灏. 内配圆钢管的钢骨混凝土柱轴压比限值的研究[J]. 工业建筑, 2003, (3): 61~63.
Xu Ming, Su Lili, Cheng Wenrang. Study of limit values of axial compression ratio for SRC columns with tubes [J]. Industrial Construction, 2003, (3): 61~63. (in Chinese)