

文章编号: 1000-4750(2006)09-0012-06

拱结构的弹塑性二次分岔屈曲性能

剧锦三¹, *蒋秀根¹, 郭彦林², 陈杰¹

(1. 中国农业大学土木系, 北京 100083; 2. 清华大学土木系, 北京 100084)

摘 要: 使用一种高效的跟踪策略对拱的平面内弹塑性极值点屈曲和二次分岔屈曲的荷载--位移曲线的全过程进行跟踪分析, 得到了跨中集中荷载和全跨均布荷载作用下, 相同截面不同矢跨比的拱的弹塑性极值点屈曲荷载、二次分岔屈曲荷载和半跨均布荷载作用下的极值点屈曲荷载。研究表明, 对于弹塑性拱结构, 跨中集中荷载和全跨均布荷载作用下, 二次分岔屈曲总是最危险的屈曲形式, 必定先于极值点屈曲发生。相同截面的弹塑性拱的极值点屈曲荷载, 在跨中集中荷载作用下矢跨比为 0.2 的拱的极限承载力最大; 在半跨均布荷载作用下, 矢跨比为 0.23 的拱的极限承载力最大; 全跨均布荷载作用下, 矢跨比为 0.1 的拱的极限承载力最大。对于弹塑性拱的二次分岔屈曲极限承载力, 在跨中集中荷载作用下, 矢跨比为 0.2 的拱的极限承载力最大; 全跨均布荷载作用下, 矢跨比为 0.1 的拱的极限承载力最大。最后求得全跨和半跨均布荷载作用下具有不同长细比、不同矢跨比的拱的弹塑性极限承载力并且回归成实用计算公式以便于实际工程设计中查询。

关键词: 拱结构; 弹塑性屈曲; 极值点屈曲; 二次分岔屈曲; 极限承载力

中图分类号: TU318 文献标识号: A

SECONDARY BIFURCATION BUCKLING BEHAVIOR OF ELASTIC-PLASTIC ARCH

JU Jin-san¹, *JIANG Xiu-gen¹, GUO Yan-lin², CHEN Jie¹

(1. China Agricultural University, Beijing 100083, China ;2. Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The in-plane primary buckling and secondary bifurcation buckling load-displacement equilibrium paths of the elastic-plastic arches with same sections and different rise-span ratios are traced with a high-efficient tracing strategy. The elastic-plastic primary buckling load and secondary bifurcation buckling load under full-span distributed load, and concentrated load at the top of arch, and the primary buckling load under half-span distributed load are obtained. The calculation results show that the secondary bifurcation buckling is always the most dangerous buckling type when the arch is under full-span distributed load and concentrated load at the top of arch for elastic-plastic arch. The secondary bifurcation buckling will always happen before the primary buckling. For primary buckling load of the same section arches, the ultimate load carrying capacity of arch with 0.2 rise-span ratio is the biggest one under concentrated load at the top of arch. The ultimate load carrying capacity of the arch with 0.23 rise-span ratio is the largest one under half span distributed load and that of the arch with 0.1 rise-span ratio is the largest under full-span distributed load. For secondary bifurcation buckling load, the ultimate load carrying capacity of the arch with 0.2 rise-span ratio is the largest one under concentrated load at the top of arch

收稿日期: 2005-01-15; 修改日期: 2005-03-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59678028)

作者简介: 剧锦三(1969), 男, 内蒙古包头人, 副教授, 博士, 从事钢结构稳定和断裂研究;

*蒋秀根(1966), 男, 江苏大丰人, 教授, 硕士, 从事结构工程研究(E-mail: xiugenjiang@tsinghua.org.cn);

郭彦林(1958), 男, 陕西人, 教授, 博士, 从事钢结构研究和教学;

陈杰(1982), 男, 山西人, 硕士生, 从事钢结构研究。

and that of the arch of 0.1 rise-span ratio is the largest one under full span distributed load. Finally the elastic-plastic ultimate load carrying capacity of elastic-plastic arch with different slenderness and rise-span ratios under full and half span distributed load were calculated and formulated for engineering reference.

Key words: arch; elastic-plastic buckling; primary buckling; secondary bifurcation buckling; ultimate load-carrying capacity

拱结构有非常合理的受力性能,在体育场馆等大跨度结构中被广泛应用。同时拱结构也是一种对初始缺陷和微小的扰动非常敏感的结构形式。在对称荷载比如全跨均布荷载或跨中集中荷载作用下,极值点屈曲和二次分岔屈曲都有可能发生(见图1、图2)。在很多实验和实际结构的破坏案例中,二次分岔屈曲往往是最常见的破坏形式,所以对拱结构弹塑性二次分岔屈曲的研究有很重要的理论和工程意义^[1,2]。

拱结构的极值点屈曲形式是指结构在荷载作用下,结构发生与荷载一致的变形,直到荷载达到结构承载力的极限,结构发生越跃并从而失去承载力;拱的二次分岔屈曲是指拱在对称荷载加载过程的某一时刻,结构会由于初始缺陷或微小扰动的影响,结构的变形形式会从与对称变形跳跃到反对称变形。因为结构的初始缺陷或者微小的扰动是不可避免的,所以拱结构的最终破坏形式取决于极值点屈曲和二次分岔屈曲破坏形式中屈曲荷载较小的一种形式。

对于拱的弹塑性极值点屈曲的研究方法已经比较成熟;对二次分岔屈曲的研究也已经取得一些成果^[3~5],其研究的关键点是如何确定分岔点及屈曲后平衡路径的跟踪,但是其中的计算方法比较烦琐,往往要把屈曲路径人为地分成屈曲前和屈曲后路径分别计算或者利用施加初始缺陷的方法得到有缺陷拱的解作为近似解^[6,7]。本文利用了一种新的屈曲路径跟踪策略^[8,9],可以连续跟踪整个拱结构弹塑性二次分岔屈曲,得到二次分岔屈曲的屈服荷载,再和极值点屈曲荷载进行比较,判断最终的破坏形式。本文方法第一步试算时初始缺陷可以较大,在后续求解步中是用无初始缺陷拱来模拟屈曲行为,只是在逼近分岔屈曲荷载时才施加扰动,且能很快收敛到精确解;而初始缺陷法中的缺陷始终存在于整个分析过程中,所以是一种用有初始缺陷拱的屈曲荷载近似逼近无缺陷拱的二次分岔屈曲荷载的方法,结果精度取决于初始缺陷的大小。该方法中如果初始缺陷过大则结算结果精度差,如果初始缺

陷过小则无法得到结果,是一种半经验式的算法,因此本文方法优于初始缺陷法。文中对不同矢跨比的拱在常见荷载形式下的弹塑性屈曲性能进行了研究,同时考虑了几何大变形的影响,把常用长细比的拱的弹塑性极限承载力绘制成图,并且得到了相关的计算公式,便于工程中实际应用。

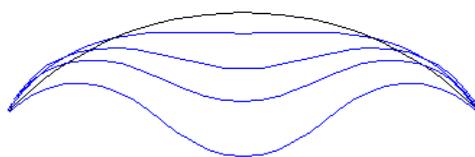


图1 极值点屈曲

Fig.1 Primary buckling



图2 二次分岔屈曲

Fig.2 Secondary bifurcation buckling

1 基本理论

在单轴加载的情况下,很容易判断材料是否进入塑性,且屈服后材料硬化以及塑性应变与应力间关系均很明确。拱的截面是在复杂应力状态下,某点应力状态由六个应力分量确定,就不能主观决定哪一个应力分量作为判断材料进入塑性状态的标准,而必须考虑它们的组合情况。塑性理论一般包括三个部分:

(1) 屈服准则:即判断材料是否屈服的标准,寻求不同类型材料的屈服函数;文中应用 von Mises 准则来作为钢材的屈服准则。

(2) 强化定律:是指材料开始屈服后,继续加载时屈服面在应力空间中移动模型,文中采用随动强化模型。

(3) 塑性应变与应力间的关系:有两种类型的理论:一个是塑性流动理论,也称为增量理论,讨论塑性应变增量与当前应力及应力增量间关系,这

是当前的主流理论。另一个是形变理论，或称全量理论。文中采用的即是增量理论。

本文采用的是静力加载过程。材料是理想弹塑性材料。

二次分岔屈曲研究中首先需要确定的关键点是如何找到分岔点，也就是如何判断一个临界点是极值点还是分岔点。一般用如下准则判断：

$$\text{极值点： } \det[{}^c K_T] = 0; {}^c z^T Q \neq 0 \quad (1)$$

$$\text{分岔点： } \det[{}^c K_T] = 0; {}^c z^T Q = 0 \quad (2)$$

其中 ${}^c K_T$ 是结构在临界点的弹塑性刚度阵； ${}^c z$ 对应于刚度阵零特征值的特征向量； ${}^T Q$ 是荷载向量。公式(1)的物理意义是临界点的特征模态与荷载的方向一致，结构屈曲时荷载会做功；公式(2)的物理意义是分岔点的特征模态与荷载向量正交，所以荷载不做功。笔者发现并利用了一种新的迭代方法，可以无限逼近精确解^[9]，得到公式(2)所示准则中的二次分岔临界点。

2 算例及分析

荷载形式 1：跨中集中荷载(见图 3(a))

模型见图 3(a)，其材料和几何特性如下：跨度 160m，弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，截面是圆管，外径 1m，内径 0.98m，材料是理想弹塑性材料，设计强度是 215MPa。矢跨比是 0.1~0.5。

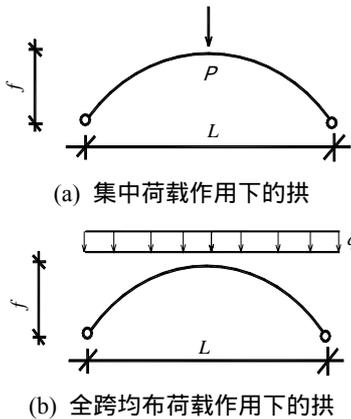


图 3 两端铰接拱

Fig.3 Hinged arch

图 4 是矢跨比 0.15 的拱在考虑了材料非线性后，无缺陷拱和有缺陷拱的顶点在跨中集中荷载作用下的屈曲路径(这里的缺陷与第一线性屈曲模态相似，水平方向变形峰值是跨度的 2/100000，竖向变形峰值是跨度的 6/100000)。图 5 是极值点屈曲和二次分岔屈曲的变形图。对比图 4 中极值点屈曲路

径和二次分岔屈曲路径，可以看到两条曲线的极值点几乎重叠，而弹性材料时的两条曲线相距较大^[10]，说明考虑材料弹塑性性质后，变形较小时截面就进入了塑性，所以导致集中荷载作用下的拱的极值点屈曲和二次分岔屈曲荷载差别不大。同时可以看到，由于初始缺陷的影响，虽然拱的变形和二次分岔屈曲非常相似(见图 5(b))，但是极限承载力比二次分岔屈曲略有降低。

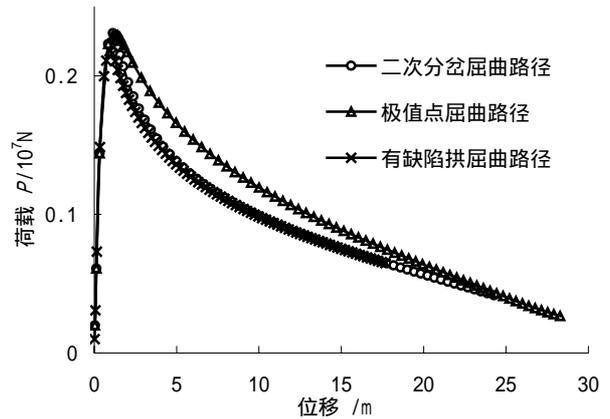


图 4 矢跨比为 0.15 的拱在跨中集中荷载作用下的屈曲路径

Fig.4 Buckling paths of arch with 0.15 rise-span ratio under concentrated load at apex

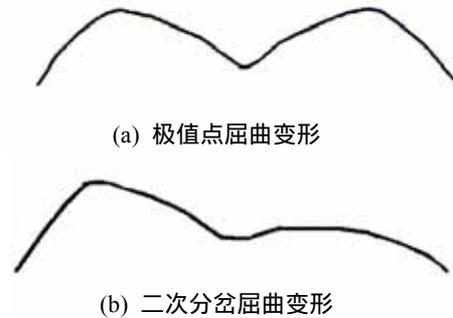


图 5 矢跨比 0.15 的拱在跨中集中荷载作用下的屈曲变形
Fig.5 Buckling deformation of arch with 0.15 rise-span ratio under concentrated load at apex

图 6 是不同矢跨比的拱的屈曲荷载。从图中的极限承载力与矢跨比曲线可以看到，对于弹塑性拱，矢跨比为 0.2 时拱的极值点屈曲荷载和二次分岔屈曲荷载最大，图中的结果亦表明所有矢跨比的拱在跨中集中荷载作用下的极值点屈曲荷载都是略微高于二次分岔屈曲荷载，说明对于跨中集中荷载作用下矢跨比从 0.1 到 0.5 的拱，二次分岔屈曲一定是首先发生的破坏形式。

荷载形式 2：全跨均布荷载图 3(b)

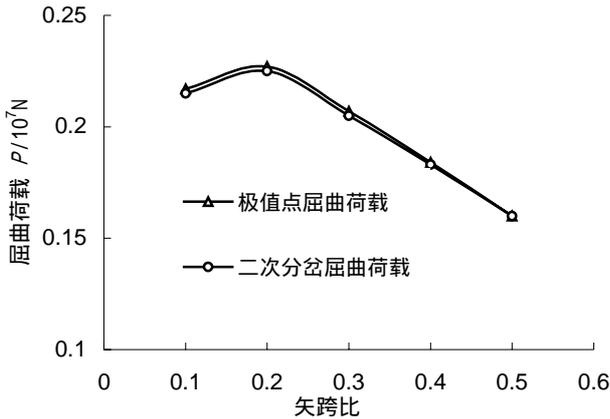


图 6 不同矢跨比的拱在跨中集中荷载作用下的屈曲荷载
Fig.6 Buckling loads of arch with different rise-span ratios under concentrated load at apex

图 7 是矢跨比 0.25 的拱在全跨均布荷载作用下的极值点屈曲和二次分岔屈曲路径,从图中的曲线可以看到,全跨均布荷载作用时拱的极值点屈曲极限承载力都明显大于其二次分岔屈曲极限承载力。从图可以看出,缺陷(水平方向变形峰值是跨度的 $4/100000$,竖向变形峰值是跨度的 $1.2/10000$)的存在大大地降低了拱的承载力。由于实际构件的几何初始缺陷是不可避免的,所以通常在拱的设计中要考虑到缺陷对承载力的影响。

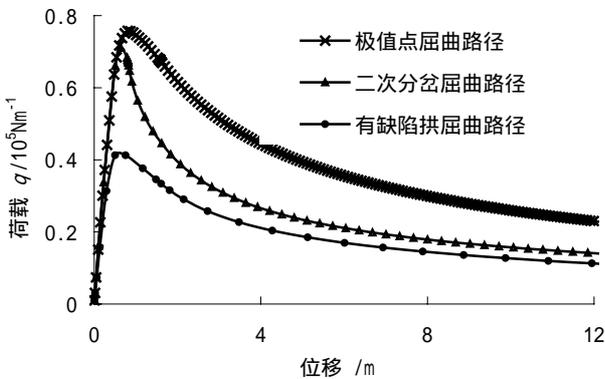


图 7 矢跨比为 0.25 的拱在全跨均布荷载作用下的屈曲路径

Fig.7 Buckling pathes of arch with 0.25 rise-span ratio under full span distributed load

对比图 4 和图 7 的结果可以发现,同样是有缺陷拱,缺陷对均布荷载作用下的拱的极限承载力影响比对跨中集中荷载作用下拱的极限承载力大。因为跨中集中荷载作用下,拱仅是顶点受压,拱在屈曲时,拱弧长的 $1/4$ 和 $3/4$ 点处很快进入塑性,所以缺陷对承载力的影响不大;而全跨均布荷载作用下,荷载沿全跨分布,不会使拱的局部过早进入塑性,所以缺陷对承载力的影响较大。

图 8 是不同矢跨比的拱在全跨均布荷载作用下的极值点屈曲荷载和二次分岔屈曲荷载。由图可见,矢跨比为 0.1 时拱的极值点屈曲荷载和二次分岔屈曲荷载最大。在常用矢跨比范围内,二次分岔屈曲荷载与极值点屈曲荷载相差不大,但其破坏形式却完全不同(见图 9)。同样道理,对于全跨均布荷载作用下矢跨比从 0.1 到 0.5 的拱,二次分岔屈曲也一定是首先发生的破坏形式。图 9 是两种屈曲形式的变形。

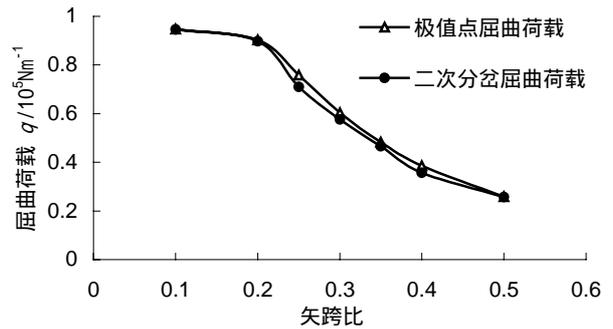


图 8 不同矢跨比的拱在全跨均布荷载作用下的屈曲荷载
Fig.8 Buckling loads of arch with different rise-span ratios under full span distributed load

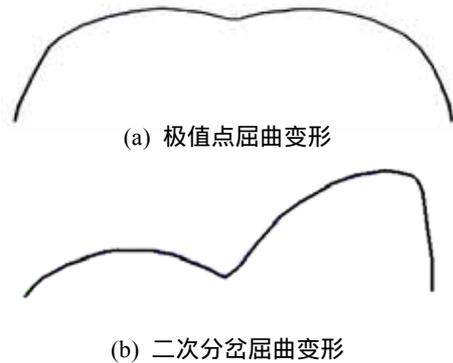


图 9 矢跨比为 0.25 的拱在全跨均布荷载作用下的屈曲变形

Fig.9 Buckling deformations of arch with 0.25 rise-span ratio under full span distributed load

荷载工况 3：右半跨均布荷载

图 10 是矢跨比为 0.3 的拱在右半跨荷载作用下的屈曲路径。图 11 是半跨均布荷载作用下的屈曲形式。图 12 中的曲线表明对于半跨均布荷载,矢跨比在 0.23 时承载力最大,而对于弹性拱,最大半跨荷载对应的最佳矢跨比是 $0.3^{[11]}$ 。一般而言,塑性最佳矢跨比要比弹性最佳矢跨比小,其原因是塑性变形使拱结构更早地达到极限承载力。对比图 8 和图 12 的结果,可以发现拱在半跨均布荷载作用下的极限承载力比全跨均布荷载作用下的极限承

承载力小很多。这是因为拱在全跨荷载作用下截面主要是受压,而在半跨荷载作用下主要受弯,降低了极限承载力。

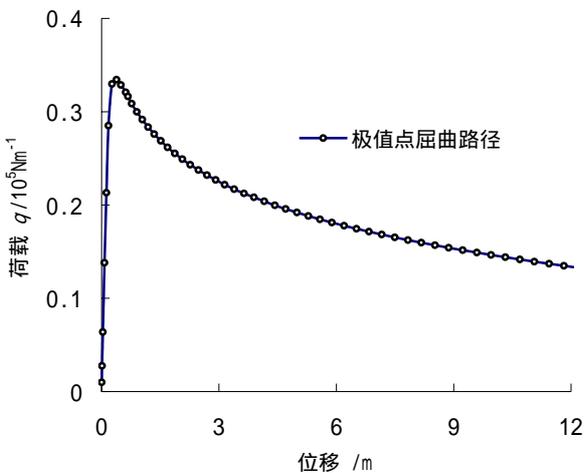


图 10 矢跨比为 0.3 的拱在半跨均布荷载作用下的极值点屈曲路径

Fig.10 Primary buckling path of arch with 0.3 rise-span ratio under half span distributed load

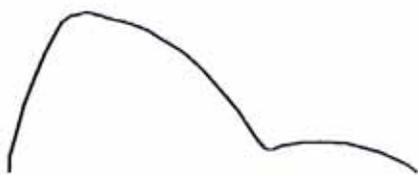


图 11 矢跨比为 0.3 的拱在半跨均布荷载作用下的极值点屈曲变形

Fig.11 Primary buckling deformation of arch with 0.3 rise-span ratio under half span distributed load

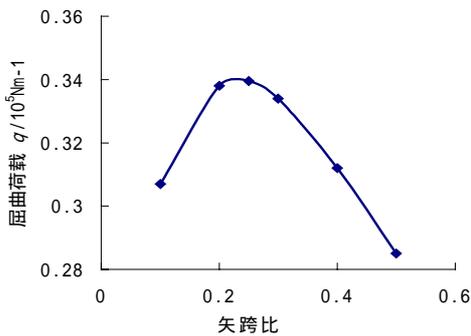


图 12 不同矢跨比的拱在半跨均布荷载作用下的屈曲荷载
Fig.12 Buckling loads of arch with different rise-span ratios under half span distributed load

另外文中比较了弹塑性拱和弹性拱的计算结果,如图 13 中所示的矢跨比 0.25 的弹性拱和弹塑性拱的极值点屈曲和二次分岔屈曲路径。从图中

结果看到,无论是极值点屈曲还是二次分岔屈曲,弹性拱的屈曲荷载和屈曲时的顶点位移都比弹塑性拱大很多,发生弹性极值点屈曲时拱顶点的竖向位移是 11.4m(如图所示 A 点);发生弹性二次分岔屈曲时的顶点位移是 1.74m(如图所示 B 点)。发生弹塑性极值点屈曲和二次分岔屈曲时的顶点位移只有 0.942m 和 0.828m。说明在荷载较小时,截面处于弹性状态,4 条屈曲路径是重合的,在荷载较大时,弹塑性拱部分截面就已经进入了塑性,弹塑性屈曲路径和弹性屈曲路径发生分离(如图所示 C 点)。弹性拱由于不存在强度问题,承载力继续上升,直到发生弹性屈曲 A 或 B 点。弹塑性拱的承载力也继续上升,直到发生弹塑性屈曲,但是上升幅度不大,此时截面进一步进入塑性。

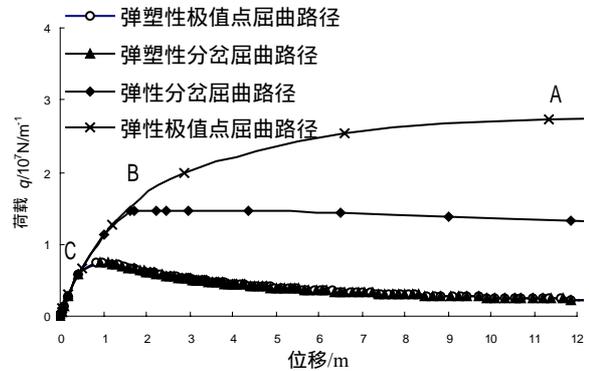


图 13 矢跨比 0.25 的弹性、弹塑性拱在全跨均布荷载作用下的屈曲路径

Fig.13 Buckling paths of elastic and elastic-plastic arches with 0.25 rise-span ratio under full span distributed load

3 承载力简化计算公式

本文在上述分析的基础上,分别对不同跨度弹塑性拱在全跨和半跨均布荷载作用下的极值点屈曲荷载、全跨均布荷载作用下的二次分岔屈曲荷载计算结果进行归纳总结,从而为工程设计和科学研究提出了相应的简化计算公式。

图 14 到图 16 是计算结果。图中的横坐标是修

$$\text{正长细比 } \lambda = \sqrt{\frac{N_T}{N_0}}, \text{ 其中 } N_T = f_y \cdot A, N_0 = \frac{\pi^2 EI_x}{(\gamma S)^2},$$

γ 是有效长度系数,对于两端铰接拱, $\gamma=0.5$ 。纵轴是相对极限承载力 $R = N / N_T$,其中 N 是承载力。从这些分析结果可以总结出不同矢跨比拱的极限承载力计算公式,见方程(3)~方程(17)。

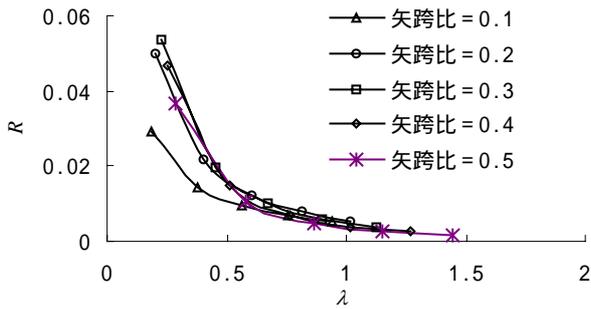


图 14 不同矢跨比的拱在全跨均布荷载作用下的弹塑性极值点屈曲荷载

Fig.14 Elastic-plastic primary buckling loads of arch with different rise-span ratios under full span distributed load

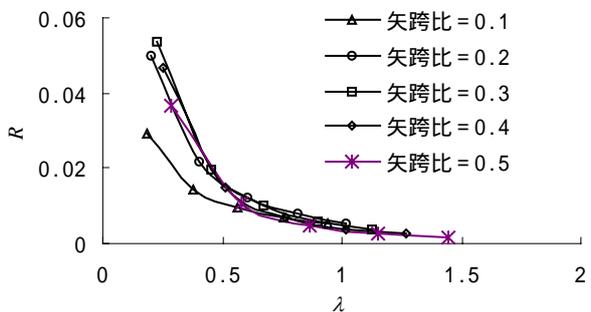


图 15 不同矢跨比的拱在半跨均布荷载作用下的弹塑性极值点屈曲荷载

Fig.15 Elastic-plastic primary buckling loads of arch with different rise-span ratios under half span distributed load

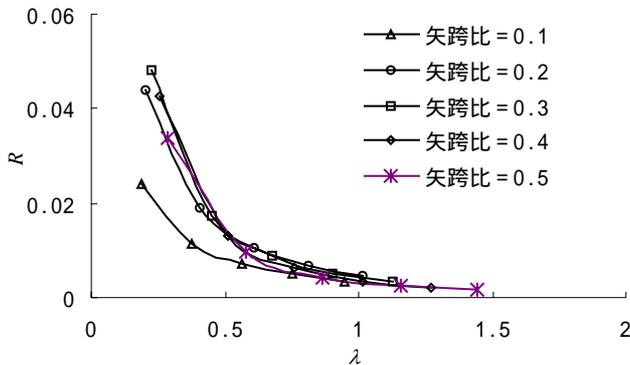


图 16 不同矢跨比的拱在全跨均布荷载作用下的弹塑性二次分岔屈曲极限承载力

Fig.16 Elastic-plastic secondary bifurcation buckling loads of arch with different rise-span ratios under full span distributed load

在全跨均布荷载作用下，不同矢跨比拱的弹塑性极值点屈曲极限承载力可用下式计算：

$$\text{矢跨比} = 0.1 \text{ 时, } N/N_T = 0.0049\lambda^{-1.0788} \quad (3)$$

$$\text{矢跨比} = 0.2 \text{ 时, } N/N_T = 0.0059\lambda^{-1.3777} \quad (4)$$

$$\text{矢跨比} = 0.3 \text{ 时, } N/N_T = 0.0049\lambda^{-1.6425} \quad (5)$$

$$\text{矢跨比} = 0.4 \text{ 时, } N/N_T = 0.004\lambda^{-1.8352} \quad (6)$$

$$\text{矢跨比} = 0.5 \text{ 时, } N/N_T = 0.0034\lambda^{-1.9392} \quad (7)$$

在半跨均布荷载作用下，不同矢跨比拱的弹塑性极值点屈曲极限承载力可用下式计算：

$$\text{矢跨比} = 0.1 \text{ 时, } N/N_T = 0.0019\lambda^{-1.8026} \quad (8)$$

$$\text{矢跨比} = 0.2 \text{ 时, } N/N_T = 0.0023\lambda^{-1.9444} \quad (9)$$

$$\text{矢跨比} = 0.3 \text{ 时, } N/N_T = 0.0027\lambda^{-1.9983} \quad (10)$$

$$\text{矢跨比} = 0.4 \text{ 时, } N/N_T = 0.0033\lambda^{-2.0324} \quad (11)$$

$$\text{矢跨比} = 0.5 \text{ 时, } N/N_T = 0.0039\lambda^{-2.0457} \quad (12)$$

在全跨均布荷载作用下，不同矢跨比拱的弹塑性二次分岔屈曲极限承载力可用下式计算：

$$\text{矢跨比} = 0.1 \text{ 时, } N/N_T = 0.0035\lambda^{-1.1848} \quad (13)$$

$$\text{矢跨比} = 0.2 \text{ 时, } N/N_T = 0.0049\lambda^{-1.4094} \quad (14)$$

$$\text{矢跨比} = 0.3 \text{ 时, } N/N_T = 0.0044\lambda^{-1.6476} \quad (15)$$

$$\text{矢跨比} = 0.4 \text{ 时, } N/N_T = 0.0037\lambda^{-1.818} \quad (16)$$

$$\text{矢跨比} = 0.5 \text{ 时, } N/N_T = 0.0032\lambda^{-1.9188} \quad (17)$$

4 结论

本文应用简便有效的计算方法对拱结构的极值点屈曲和二次分岔屈曲性能进行了深入系统地分析，考察了不同矢跨比对拱结构屈曲性能影响。得到如下结论：

(1) 对于弹塑性拱，跨中集中荷载和全跨均布荷载作用下，二次分岔屈曲总是最危险的屈曲形式，必定先于极值点屈曲发生。

(2) 相同截面的弹塑性拱的极值点屈曲荷载，在跨中集中荷载作用下矢跨比为 0.2 的拱的极限承载力最大；在半跨均布荷载作用下，矢跨比为 0.23 的拱的极限承载力最大；全跨均布荷载作用下，矢跨比为 0.1 的拱的极限承载力最大。

(3) 对于弹塑性拱的二次分岔屈曲极限承载力，在跨中集中荷载作用下，矢跨比为 0.2 的拱的极限承载力最大；全跨均布荷载作用下，矢跨比为 0.1 的拱的极限承载力最大。

(4) 本文提出的简化计算公式可以直接查用，对于工程设计有参考价值。

- [8] Renliang Shan, Yusheng Jiang, Baoqiang Li. Obtaining dynamic complete stress-strain curves for rock using the Split Hopkinson Pressure Bar technique [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2000, 37: 983~992.
- [9] 吴德伦, 张建华. 饱和孔隙介质中波动分析的加权吸收边界条件[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(4): 57~65.
Wu Delun, Zhang Jianhua. A weighted absorbing boundary for wave propagation in poroelastic media [J]. Chinese Journal of Geotechnical Mechanics and Engineering, 1997, 19(4): 57~65. (in Chinese)
- [10] 胡恒山, 王克协, 刘家琦. 孔隙介质中快纵波的衰减特性和动力协调现象[J]. 计算物理, 2002, 19(3): 203~207.
Hu Hengshan, Wang Kexie, Liu Jiaqi. Attenuation and dynamic compatibility of the fast compressional wave in porous medium [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2002, 19(3): 203~207. (in Chinese)
- [11] 赵成刚, 杜修力, 崔杰. 固体、流体多相孔隙介质中的波动理论及其数值模拟的进展[J]. 力学学报, 1998, 28(1): 83~91.
Zhao Chenggang, Du Xiuli, Cui Jie. Review of wave propagation theory in saturated and unsaturated porous medium and its numerical methods [J]. Advances in Mechanics, 1998, 28(1): 83~91. (in Chinese)
- [12] 刘孝敏, 胡时胜. 应力脉冲在变截面 SHPB 锥杆中的传播特性[J]. 爆炸与冲击, 2000, 20(2): 110~114.
Liu Xiaomin, Hu Shisheng. Wave propagation characteristics in cone bars used for variable cross-section SHPB [J]. Explosion and Shock Waves, 2000, 20(2): 110~114. (in Chinese)
- [13] 王礼立, 余同希, 李永池. 冲击动力学进展[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992. 381~386.
Wang Lili, Yu Tongxi, Li Yongchi. Development of impact dynamics [M]. Hefei: Publishing House of China University of Science and Technology, 1992. 381~386. (in Chinese)
- [14] Jonas A Zukas. High Velocity Impact dynamics [M]. New York: Wiley-Interscience, 1990. 139~156.
- [15] Lundberg B A. A split hopkinson bar study of energy absorption in dynamic rock fragmentation [J]. Int. J. Rock Mech. Min. & Geomech. Abstr., 1976, 13: 187~197.

(上接第 17 页)

参考文献:

- [1] 剧锦三, 郭彦林. 网壳结构稳定研究的现状及展望[A]. 见: 1998 中国建筑钢结构工程暨学术会议论文集[C]. 北京: 企业出版社, 1998. 40~44.
Ju Jinsan, Guo Yanlin. Status and prospect of braced dome's stability research [A]. In: Proceedings of National Steel Structure Engineering Academic Conference in 1998 [C]. Beijing: Enterprise Press, 1998. 40~44. (in Chinese)
- [2] Teng J G, Lou Y F. Analysis of bifurcation buckling in shell of revolution after axisymmetric snap-through [A]. Proceedings of Asia-pacific Conference on Shell and Spatial Structures [C]. Beijing: China Civil Engineering Society, 1996. 579~586.
- [3] Sleeb A F, Gendy A S. Shear-flexible models for spatial buckling of thin-walled curved beams [J]. Journal of Numerical Methods in Engineering, 1991, 31(4): 729~759.
- [4] Pi Y L, Trahair N S. In-plane buckling and design of steel arches [J]. Journal of Structural Engineering, 1999, 125(11): 1291~1298.
- [5] Pi Y L, Trahair N S. Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns I: Theory [J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(7): 2041~2061.
- [6] Pi Y L, Trahair N S. Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns II: Application [J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(7): 2062~2085.
- [7] Teh L H, Clarke M J. Tracing secondary equilibrium paths of elastic framed structures [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(12): 1358~1364.
- [8] Guo Y, Ju J. Effects of cables on the structure hybridized by I section arch and cables [A]. In: Proceedings of the 7th International Symposium on Structural Failure and Plasticity [C]. Australia: Tech Science Press, 2000. 1124~1128.
- [9] 剧锦三, 郭彦林. 拱结构的弹性二次分岔屈曲性能[J]. 工程力学, 2002, 19(4): 109~112.
Ju Jinsan, Guo Yanlin. Secondary bifurcation buckling behavior of elastic arch [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(4): 109~112. (in Chinese)
- [10] Ju Jinsan, Guo Yanlin. In-plane secondary bifurcation of elastic arch [J]. Tsinghua Science and Technology, 2002, 7(3): 322~325.
- [11] 剧锦三, 郭彦林. 平面内索拱结构的稳定研究[J]. 建筑结构学报, 2001, 22(2): 84~87.
Ju Jinsan, Guo Yanlin. Stability of in-plane cable-arch [J]. Journal of Building Structures, 2002, 22(2): 84~87. (in Chinese)