文章编号：1000-4750(2005)Sup.-0020-06

位移边界条件下正交异性材料界面上的不对称扩展裂纹

*胥红敏，程　靳，付德龙
(哈尔滨工业大学航天科学与力学系，哈尔滨 150001)

摘　要：根据平面波动方程的函数不变解思想，给出正交异性体反平面运动方程位移的不变解，导出具有任意自相似指数的问题解的一般表示，由此把正交异性体中不对称扩展界面裂纹的位移边界问题化为寻求单一未知函数的问题，此函数只需满足具体问题的边界条件。给出了实例，通过线性叠加，可以求得任意复杂位移边界条件下的解。

关键词：固体力学；断裂动力学；不变解；界面裂纹；正交异性；不对称
中图分类号：O346.1　　**文献标识码**：A

DISSYMMETRICAL EXTENSION CRACK AT THE INTERFACE BETWEEN ORTHOTROPIC MEDIA UNDER DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS

*XU Hong-min , CHENG Jin , FU De-long
(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Based on the idea of functionally invariant solutions to the wave equation, invariant displacement solutions to the anti-plane equation of motion for orthotropic bodies are presented. The general representations of the solutions are derived for problems with arbitrary index of self-similarity. The problem under displacement boundary conditions of dissymmetrical extension crack at the interface between orthotropic media is transformed to a single unknown function, which only need satisfy the specific boundary conditions of a given problem. Examples are given to illustrate the present method, in which the solutions for arbitrary complex displacement boundary conditions are obtained based on linear superposition.

Key words: solid mechanics; fracture dynamics; invariant solution; interface crack; orthotropy; dissymmetry

由正交异性材料组成的层状材料、组合材料以及各类类似结构中，裂纹往往在材料之间的界面上萌生并扩展，甚至失稳断裂，这就突出了研究正交各向异性材料结合面上的静态和动态裂纹问题的重要性。近年来，国内外不少学者从不同角度研究了相关问题，例如：Qian W.和 Sun C.T.[1]从有限元的角度探讨了计算两正交异性体间界面裂纹的应力强度因子的方法；Chang Won Shul 和 Kang Yong Lee[2]就一多层正交异性体半平面中反平面冲击荷载下的一面内界面裂纹建立了理论方程并给出了数值解，在理论分析中应用 Laplace 和 Fourier 变换得到第二类 Fredholm 积分方程，通过 Laplace 变换的数值反演得到动态应力强度因子；Brock L.M.[3,4]应用双边 Laplace 变换及其反演的方法研究了任意常数荷载下的正交异性或横观各向同性材料间的界面裂纹扩展；Rubio-Gonzalez C.[5]和 Mason J.J.应

收稿日期：2003-12-22；修改日期：2004-04-05
作者简介：*胥红敏(1976)，女，河北定州人，博士，从事断裂动力学研究(E-mail: xhm76hxl77@yahoo.com.cn)；
程　靳(1945)，男，辽宁辽阳人，教授，博士生导师，从事断裂力学、疲劳损伤和非局部理论研究；
付德龙(1978)，男，吉林农安县人，博士，从事疲劳断裂研究.

用 Laplace 和 Fourier 变换以及 Wiener-Hopf 方法分析了均布荷载下正交异性材料中的半无限长裂纹尖端的应力强度因子；而 Shukla Arun[6]等从实验的角度应用光弹的方法研究了正交各向异性材料和各向异性材料间的静态和动态界面裂纹，等等。

本文基于平面波动方程的不变解[7]思想，首先给出了正交异性体反平面运动方程位移的不变解，并根据该位移不变解推导出任意自相似指数下裂纹的应力、位移以及动态裂纹尖端应力强度因子的解析解，比较简单地给出了解的一般表达式。根据解的形式，位移边界条件下正交各向异性材料界面上的不对称扩展裂纹问题化为寻找单一未知解析函数的问题。文中给出了实例，把用同样的方法得到的简单边界条件下的解进行叠加，可以得到其它任意边界条件下的解。

正交各向异性材料界面上的不对称扩展裂纹问题如图 1 所示，x 轴与裂纹面重合，且为两种不同正交异性材料的分界面，裂纹沿正负 x 轴方向分别以速度 V_1 、 V_2 不对称扩展。

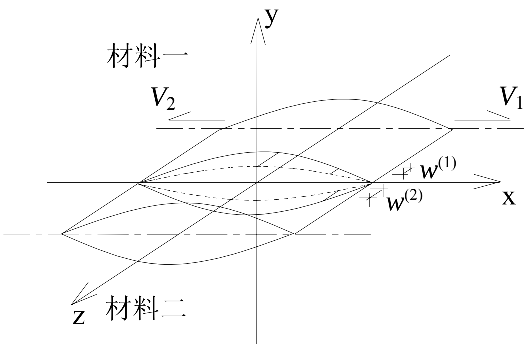

图 1　界面裂纹不对称扩展示意图

Fig.1　Sketch of an interface crack's dissymmetrical extension

1　解的一般表示

1.1 正交异性体反平面运动方程位移的不变解

正交异性体反平面问题的运动方程[8]为：

$$C_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

其中 C_{55} 、 C_{44} 为材料的弹性常数； ρ 为材料密度； t 为时间； w 为垂直于该平面方向的位移，寻找有以下函数形式的位移的解：

$$w(x,y,t)=q(z) \tag{2}$$

这里 $q(z)$ 是 z 的解析函数， z 由以下方程决定：

$$l(z)t+r(z)x+s(z)y+p(z)=0 \tag{3}$$

以上方程把 z 定义为 t 、 x 和 y 的函数， $l(z)$ 、 $r(z)$ 、 $s(z)$ 和 $p(z)$ 为 z 的解析函数；求 w 对于 x 、 y 和 t 的二阶偏导数，有以下形式：

$$\begin{aligned}
q'(z)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\frac{1}{2}[(\frac{q'(z)}{\delta'})^2\cdot r^2(z)]'\\
q'(z)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=\frac{1}{2}[(\frac{q'(z)}{\delta'})^2\cdot s^2(z)]'\\
q'(z)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=\frac{1}{2}[(\frac{q'(z)}{\delta'})^2\cdot l^2(z)]'
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\delta'=l'(z)t+r'(z)x+s'(z)y+p'(z)$ ，把(4)代入(1)式，有以下关系：

$$C_{55}r^2(z)+C_{44}s^2(z)=\rho l^2(z) \tag{5}$$

以下函数满足(5)式：

$$l(z)=1,\quad r(z)=-z,$$
$$s(z)=-\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)/C_{44}},\quad p(z)=0 \tag{6}$$

把(6)式代回(3)式，可得到 z 的表达式：

$$z=\frac{C_{44}tx-iy\sqrt{C_{44}C_{55}t-\rho(C_{44}x^2+C_{55}y^2)}}{C_{44}x^2+C_{55}y^2} \tag{7}$$

如果 z 由上式表达，则函数 $q(z)$ 一定满足运动方程(1)，并且有：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\rho-C_{55}z^2}{C_{55}yz-x\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}\\
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{z\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}{C_{55}yz-x\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}\\
\frac{\partial z}{\partial t}&=-\frac{\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}{C_{55}yz-x\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}
\end{aligned} \tag{8}$$

1.2 位移齐次问题

位移为齐次时，设

$$w=\mathrm{Re}\,f(z) \tag{9}$$

对 w 求导：

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\mathrm{Re}\,f'(z) \tag{10}$$

根据正交异性体的物理方程[8]，有

$$\begin{aligned}
\tau_{yz}&=C_{44}\,\mathrm{Re}\,f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\\
&C_{44}\,\mathrm{Re}\,f'(z)\cdot\frac{\rho-C_{55}z^2}{C_{55}yz-x\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}\\
\tau_{xz}&=C_{55}\,\mathrm{Re}\,f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\\
&C_{55}\,\mathrm{Re}\,f'(z)\cdot\frac{z\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}{C_{55}yz-x\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}
\end{aligned} \tag{11}$$

在 $y=0$ 的平面上，有 $z=t/x$，且：

$$\tau_{yz}=-\frac{1}{t}\mathrm{Re}[zf'(z)\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}],\quad \tau_{xz}=-\frac{1}{t}\mathrm{Re}[C_{55}z^2f'(z)] \tag{12}$$

引入：

$$F(z)=-zf'(z)\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}} \tag{13}$$

$$\lambda(z)=\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}} \tag{14}$$

综合(10)、(12)、(13)和(14)式，可得到解的最后形式：

$$\tau_{yz}=\frac{1}{t}\mathrm{Re}\,F(z),\quad \tau_{xz}=\frac{C_{55}}{t}\mathrm{Re}[\frac{z\cdot F(z)}{\lambda(z)}],\quad \frac{\partial w}{\partial z}=-\mathrm{Re}[\frac{F(z)}{z\cdot\lambda(z)}] \tag{15}$$

1.3 应力齐次问题：

应力为齐次时，设：

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\mathrm{Re}\,f_1(z),\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\mathrm{Re}\,f_2(z) \tag{16}$$

$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 有关系：

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial x}=\frac{\partial f_2(z)}{\partial y} \tag{17}$$

即：

$$f_2'(z)=f_1'(z)\cdot\frac{z\sqrt{C_{44}}}{\sqrt{\rho-C_{55}z^2}} \tag{18}$$

根据正交异性体的物理方程，有：

$$\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial t}=C_{44}\,\mathrm{Re}\,f_1'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=-\mathrm{Re}[f_1'(z)\cdot\frac{C_{44}\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}{C_{55}yz-x\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}]$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial t}=C_{55}\,\mathrm{Re}\,f_2'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=-\mathrm{Re}[f_1'(z)\cdot\frac{C_{44}C_{55}z}{C_{55}yz-x\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}] \tag{19}$$

且有：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=-\mathrm{Re}[f_1'(z)\cdot\frac{C_{44}}{\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}] \tag{20}$$

在 $y=0$ 的平面上，有：

$$\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial t}=\frac{1}{t}\cdot\mathrm{Re}[C_{44}z\cdot f_1'(z)],\quad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial t}=\frac{C_{55}}{t}\cdot\mathrm{Re}[\frac{C_{44}z^2f_1'(z)}{\sqrt{(\rho-C_{55}z^2)C_{44}}}] \tag{21}$$

引入：

$$F(z)=C_{44}z\cdot f_1'(z) \tag{22}$$

根据关系(14)，则(20)和(21)式变为以下形式：

$$\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial t}=\frac{1}{t}\cdot\mathrm{Re}\,F(z),\quad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial t}=\frac{C_{55}}{t}\cdot\mathrm{Re}[\frac{z\cdot F(z)}{\lambda(z)}],\quad \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}=-\mathrm{Re}[\frac{F(z)}{z\cdot\lambda(z)}] \tag{23}$$

1.4 具有任意自相似指数问题的解的一般表示

设在 $y=0$ 上有任意个位移区段，这些区段的端点各以不同的常速移动，初始静止，这些区段上的位移是如下函数的线性组合：

$$\frac{d^k f_l(x)}{\mathrm{d}x^k}\cdot\frac{d^r f_s(t)}{\mathrm{d}t^r},\qquad f_i(\xi)=\begin{cases}0, & \xi<0\\ \xi^i, & \xi>0\end{cases} \tag{24}$$

式中 m、l、r 和 s 为任意正整数。x、t 的复杂函数一般可表为(24)式的线性组合，因而若能求得具有(24)式形式的载荷或位移问题的解，则可通过叠加得到复杂问题的解。现引入线性微分算子及其反演：

$$L=\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial t^n},\quad L^-=\frac{\partial^{-m-n}}{\partial x^{-m}\partial t^{-n}} \tag{25}$$

这里 $(m+n)$，$(-m-n)$ 和 0 分别表示 $(m+n)$ 阶微分、$(m+n)$ 次积分和函数本身。

通过量纲分析表明对于每个自相似指数，存在函数满足波动方程并且是 x，y 和 t 的零次齐次函数，文献[9]表明常数 m 和 n 也一定存在。把式(25)代入方程(24)，得到 x 和 t 的零次齐次函数，这里的参数 m,n 称为自相似指数。

当 Lw 为齐次时，对于任意线性微分算子 L，只需将 w,τ_{xz} 和 τ_{yz} 分别换作 $Lw,L\tau_{xz}$ 和 $L\tau_{yz}$，则式(15)仍然成立。在 $y=0$ 的平面上，有表达式：

$$w^0=Lw,\quad \tau_{xz}{}^0=L\tau_{xz},\quad \tau_{yz}{}^0=L\tau_{yz} \tag{26}$$

同理，当 $L\tau_{xz}$ 和 $L\tau_{yz}$ 为齐次时，有表达式

$$w^0=\frac{\partial}{\partial t}Lw,\quad \tau_{xz}^0=\frac{\partial}{\partial t}L\tau_{xz},\quad \tau_{yz}^0=\frac{\partial}{\partial t}L\tau_{yz} \tag{27}$$

对于上述所有情况，w^0 是齐次的，总有：

$$\tau_{xz}{}^0=\frac{C_{55}}{t}\mathrm{Re}[\frac{z\cdot F(z)}{\lambda(z)}],\quad \tau_{yz}{}^0=\frac{1}{t}\mathrm{Re}\,F(z),\quad \frac{\partial w^0}{\partial z}=-\mathrm{Re}[\frac{F(z)}{z\cdot\lambda(z)}] \tag{28}$$

2 不对称裂纹在不同正交异性材料之间的问题

设两种不同材料结合面处于 $y=0$ 平面上，裂纹在结合面上扩展。对于所讨论问题，在结合面上：

$$\tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \quad y=0, \quad -\infty < x < \infty \tag{29}$$

上角标(1)和(2)表示在第一、二种材料中相应的量，将(28)式代入(29)式，有

$$\operatorname{Re} F^{(1)}(z) = \operatorname{Re} F^{(2)}(z) \tag{30}$$

设裂纹分别以常速V_1、V_2沿x轴正、负方向扩展，设定V_1和V_2为正常数，且：$V_2 < V_1$，在裂纹之外两种材料的结合处，有关系：

$$w^{(1)} - w^{(2)} = 0, \quad y=0, \quad x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t \tag{31}$$

将(14)、(28)式带入(31)式，有：

$$\operatorname{Re}\frac{F^{(1)}(z)}{z\sqrt{(\rho^{(1)} - C_{55}^{(1)} z^2) C_{44}^{(1)}}} = \operatorname{Re}\frac{F^{(2)}(z)}{z\sqrt{(\rho^{(2)} - C_{55}^{(2)} z^2) C_{44}^{(2)}}} \tag{32}$$

不失一般性，总设$\rho^{(2)} / C_{55}^{(2)} < \rho^{(1)} / C_{55}^{(1)}$，对于不同的$z$值，由(31)式可得：

当$z^2 < \rho^{(2)} / C_{55}^{(2)} < \rho^{(1)} / C_{55}^{(1)}$时，有

$$\operatorname{Re} F^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{(\rho^{(1)} - C_{55}^{(1)} z^2) C_{44}^{(1)}}}{\sqrt{(\rho^{(2)} - C_{55}^{(2)} z^2) C_{44}^{(2)}}} \operatorname{Re} F^{(2)}(z) = 0$$

当$\rho^{(2)} / C_{55}^{(2)} < z^2 < \rho^{(1)} / C_{55}^{(1)}$时，有

$$\operatorname{Re} F^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{(\rho^{(1)} - C_{55}^{(1)} z^2) C_{44}^{(1)}}}{\sqrt{(\rho^{(2)} - C_{55}^{(2)} z^2) C_{44}^{(2)}}} \operatorname{Im} F^{(2)}(z) \tag{33}$$

当$\rho^{(2)} / C_{55}^{(2)} < \rho^{(1)} / C_{55}^{(1)} < z^2$时，有

$$\operatorname{Im} F^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{(\rho^{(1)} - C_{55}^{(1)} z^2) C_{44}^{(1)}}}{\sqrt{(\rho^{(2)} - C_{55}^{(2)} z^2) C_{44}^{(2)}}} \operatorname{Im} F^{(2)}(z)$$

上面(33)式的第一式之所以为零，是因为弹性波的扰动不会超过两种介质中最大声波传播范围[10]，综合考虑(30)式和(33)式，引入以下表达式：

$$F^{(1)}(z) = m(z) \cdot n^{(1)}(z), \quad F^{(2)}(z) = m(z) \cdot n^{(2)}(z) \tag{34}$$

这里，

$$n^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{(\rho^{(1)} - C_{55}^{(1)} z^2) C_{44}^{(1)}}}{\sqrt{(\rho^{(2)} - C_{55}^{(2)} z^2) C_{44}^{(2)}}} + \frac{(\rho^{(1)} - C_{55}^{(1)} z^2) C_{44}^{(1)}}{(\rho^{(2)} - C_{55}^{(2)} z^2) C_{44}^{(2)}}$$

$$n^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{(\rho^{(1)} - C_{55}^{(1)} z^2) C_{44}^{(1)}}}{\sqrt{(\rho^{(2)} - C_{55}^{(2)} z^2) C_{44}^{(2)}}} + 1$$

式中$m(z)$必须满足：

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} m(z) = 0, \quad -V_2^{-1} < z < V_1^{-1} \\ &\operatorname{Im} m(z) = 0, \quad z < -V_2^{-1} \text{ 或 } z > V_1^{-1} \end{aligned} \tag{35}$$

根据(28)、(33)和(34)式以及讨论问题的齐次类型可以得到不同正交异性材料结合面上扩展的具有任意自相似指数的裂纹动力学问题的一般解。所研究问题归结为寻找单一未知函数$m(z)$的问题。由于在以上讨论中已经考虑到运动方程和连接条件，所以$m(z)$只需满足具体问题的边界条件。

3 位移边界条件下的解

3.1 在$t=0$时刻，一界面裂纹在坐标原点出现，并开始沿正负x轴方向分别以速度V_1、V_2不对称扩展，$0 < V_1 < V_2$，由于外力使裂纹产生在z方向的位移，大小为$w_0 x^m$，该位移在x轴上移动的速度为β。裂纹面初始静止，边界条件可以表示为：

$$\begin{aligned} &w^{(1)} = -w^{(2)} = -w_0 x^m, \quad y=0, \quad x = \beta t \\ &w^{(1)} - w^{(2)} = 0, \quad y=0, \quad x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t \end{aligned} \tag{36}$$

假定$z = t/x$，于是：

$$\begin{aligned} L_{t,x}^{m,1} &= \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^m \partial x} = \frac{z^m}{t^m} L_{z,x}^{m,1} \\ L_{t,x}^{-m,-1} &= \frac{\partial^{-(m+1)}}{\partial t^{-m} \partial x^{-1}} = \frac{z^{-m}}{t^{-m}} L_{z,x}^{-m,-1} \end{aligned} \tag{37}$$

由边界条件，有：

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = m w_0 t^{m-1} x \tag{38}$$

此问题为位移齐次问题，

$$\frac{\partial w^0}{\partial z} = L\frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = L m w_0 t^{m-1} x \tag{39}$$

在上面的方程中，$L = L_{t,x}^{m-1,1}$，把它代入上式，根据(28)和(34)，得到：

$$L_z^{-(m-1)}[-\operatorname{Re}\frac{m(z) n^{(2)}(z)}{z \cdot \lambda(z)}] = m w_0 z^{m-1} \tag{40}$$

考虑到裂纹尖端的奇异性[11]以及无穷远条件，上式的一个解的形式为：

$$m(z) = L_z^{m-1} \frac{A z^n}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}} \tag{41}$$

这里，m是常指数，A是常系数。

把(41)式和代入(40)式，根据边界条件，常指数和常系数的值分别为：

$$n = m \tag{42}$$

$$A = \frac{m w_0 \lambda(\beta^{-1}) \sqrt{[(V_1^{-1} - \beta^{-1})(V_2^{-1} + \beta^{-1})]^3}}{n^{(2)}(\beta^{-1})} \tag{43}$$

把(41)代回(28)式，并考虑到此问题为位移齐次问题，可得到位移、应力以及应力强度因子的最终表达式：

$$w = -L_z^{-1} t^{(m-1)} L_x^{-1} \times \mathrm{Re}\left[\frac{n^{(2)}(z)}{\lambda(z)} \cdot \frac{A}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}}\right] \tag{44}$$

$$\tau_{yz} = t^{(m-1)} L_x^{-1} \times \left\{\frac{1}{x} \mathrm{Re}\left[n^{(2)}(z) \cdot \frac{A}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}}\right]\right\} \tag{45}$$

$$\tau_{xz} = t^m L_x^{-1} \left\{\frac{C_{55}}{x^2} \times \mathrm{Re}\left[\frac{n^{(2)}(z)}{\lambda(z)} \cdot \frac{A}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}}\right]\right\} \tag{46}$$

$$k_3^{(1)}(t) = \lim_{x \to V_1 t} \sqrt{2\pi(x - V_1 t)} \cdot \tau_{yz} = \frac{2\sqrt{2\pi} A t^m V_1^{7/2} V_2^{3/2}}{(V_1 + V_2)^{3/2} \sqrt{t}} n^{(2)}(V_1^{-1}) \tag{47}$$

$$k_3^{(2)}(t) = \lim_{x \to -V_2 t} \sqrt{-2\pi(x + V_2 t)} \cdot \tau_{yz} = \frac{2\sqrt{2\pi} A t^m V_1^{3/2} V_2^{7/2}}{(V_1 + V_2)^{3/2} \sqrt{t}} n^{(2)}(-V_2^{-1}) \tag{48}$$

上角标(1)和(2)分别指代正、负 x 轴上的裂纹尖端。

3.2 假定除位移值变为 $w_0 t^2 / x$ 外，其它条件均与上例相同，边界条件为：

$$w^{(1)} = -w^{(2)} = -w_0 t^2 / x, \quad y = 0, \quad x = \beta t$$
$$w^{(1)} - w^{(2)} = 0, \quad y = 0, \quad x < -V_2 t \text{ 或 } x > V_1 t \tag{49}$$

由于应力是齐次的，考虑到公式(27)，有：

$$w^0 = \frac{\partial}{\partial t} L w^{(2)} = 2 w_0 \frac{t}{x} \tag{50}$$

这里 $L = 1$，由 $z = t / x$，于是有关系：

$$\frac{\partial w^0}{\partial z} = 2 w_0 \tag{51}$$

运用以上的方法，它可以被带入公式(28)中得到：

$$-\mathrm{Re}\left[\frac{m(z) n^{(2)}(z)}{z \cdot \lambda(z)}\right] = 2 w_0 \tag{52}$$

考虑到不对称性、无穷远条件以及裂纹尖端的奇异性，上式的一个解的形式是：

$$m(\tau) = \frac{A z^n}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}} \tag{53}$$

把(53)式代入(52)式，根据边界条件，能得到常指数 n 和常数 A：

$$n = 1 \tag{54}$$

$$A = \frac{2 w_0 \lambda(\beta^{-1}) \sqrt{[(V_1^{-1} - \beta^{-1})(V_2^{-1} + \beta^{-1})]^3}}{n^{(2)}(\beta^{-1})} \tag{55}$$

把(53)代入(27)和(28)式，可以得到：

$$\frac{\partial w^0}{\partial z} = -\mathrm{Re}\left[\frac{A n^{(2)}(z)}{\lambda(z) \sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}}\right] \tag{56}$$

$$\tau_{yz} = \mathrm{Re} \int_0^z \frac{A n^{(2)}(z)}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}} \mathrm{d}z \tag{57}$$

$$\tau_{xz} = \mathrm{Re} \int_0^z \frac{A C_{55} z n^{(2)}(z)}{\lambda(z) \sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}} \mathrm{d}z \tag{58}$$

以及裂纹尖端的应力强度因子：

$$k_3^{(1)}(t) = \lim_{x \to V_1 t} \sqrt{2\pi(x - V_1 t)} \times \mathrm{Re} \int_0^z \frac{A n^{(2)}(z)}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}} \mathrm{d}z \tag{59}$$

$$k_3^{(2)}(t) = \lim_{x \to -V_2 t} \sqrt{-2\pi(x + V_2 t)} \times \mathrm{Re} \int_0^z \frac{A n^{(2)}(z)}{\sqrt{[(V_1^{-1} - z)(V_2^{-1} + z)]^3}} \mathrm{d}z \tag{60}$$

4 实例

两种材料的材料常数如下：

$\rho^{(1)} = 2.1 \times 9.8 \times 10^3 \, \mathrm{N \cdot m^{-3}}$， $C_{44}^{(1)} = 7.3 \times 10^9 \, \mathrm{Pa}$， $C_{55}^{(1)} = 15.6 \times 10^9 \, \mathrm{Pa}$； $\rho^{(2)} = 2.9 \times 9.8 \times 10^3 \, \mathrm{N \cdot m^{-3}}$， $C_{44}^{(2)} = 4.4 \times 10^9 \, \mathrm{Pa}$， $C_{55}^{(2)} = 9.1 \times 10^9 \, \mathrm{Pa}$

给出图线解所用到的常量如表 1 所示。

表 1 图线所用常量

Table 1 Constants used to plot the diagrams

	w_0 /m	V_1 /ms^{-1}	V_2 /ms^{-1}	β /ms^{-1}	t/s
图 2a/2b	0.1×10^{-3}	240	300	200	～
图 3a/3b	0.1×10^{-3}	240	300	～	0.1×10^{-3}
图 4a/4b	0.1×10^{-3}	～	300	200	0.1×10^{-3}

图 2a、图 3a 以及图 4a 为 $m = 1$ 的情况。从图线解中可以看出，对于不同的边界条件，应力强度因子对于时间，位移移动速度和裂尖扩展速度的变化趋势是相似的。对于图 2a 和图 2b，随着时间的延长，应力强度因子逐渐增大，最后趋于一恒定值；对于图 3a 和图 3b，应力强度因子随着位移移动速度的增加，即位移移动速度和裂纹扩展速度的接近而减小；对于图 4a 和图 4b，随着裂纹扩展速度的增加，应力强度因子也逐渐增加，交叉点反应了 $V_1 = V_2$ 的情况，即裂纹两端的扩展速度相同时，两个裂纹尖端的应力强度因子相同， $V_1 < V_2$ 时， $K_3^{(1)}(t) < K_3^{(2)}(t)$， $V_1 > V_2$ 时， $K_3^{(1)}(t) > K_3^{(2)}(t)$。

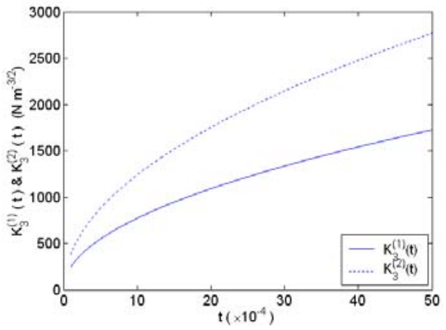

图 2a 应力强度因子和时间的关系(情况 3.1)

Fig.2a Relationship between stress intensity factors and time in Case 3.1

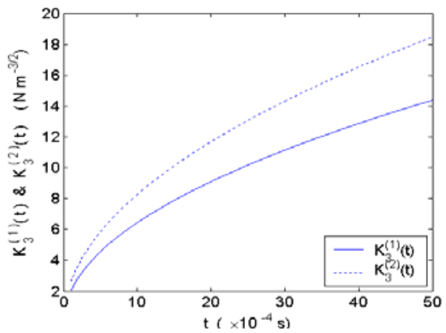

图 2b 应力强度因子和时间的关系(情况 3.2)

Fig.2b Relationship between stress intensity factors and time in Case 3.2

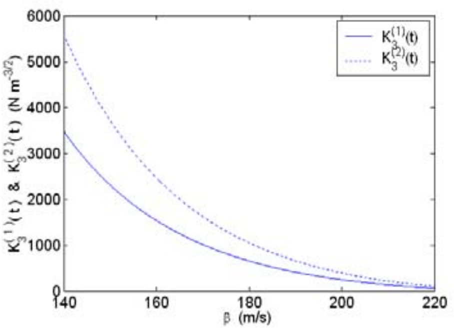

图 3a 应力强度因子和位移移动速度的关系(情况 3.1)

Fig.3a Relationship between stress intensity factors and displacement moving velocity in Case 3.1

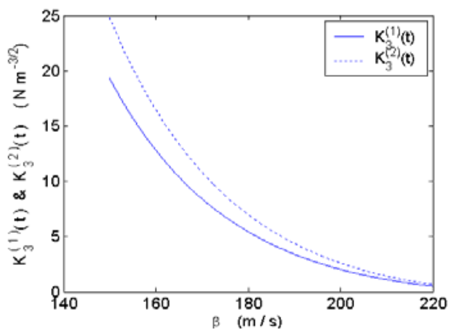

图 3b 应力强度因子和位移移动速度的关系(情况 3.2)

Fig.3b Relationship between stress intensity factors and displacement moving velocity in Case 3.2

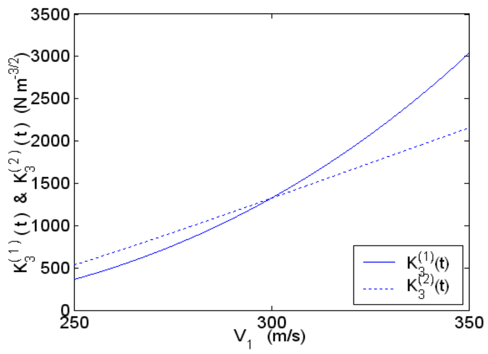

图 4a 应力强度因子和裂纹扩展速度的关系(情况 3.1)

Fig.4a Relationship between stress intensity factors and crack’s extension velocity in Case 3.1

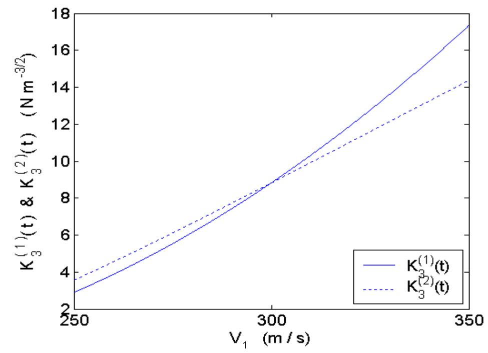

图 4b 应力强度因子和裂纹扩展速度的关系(情况 3.2)

Fig.4b Relationship between stress intensity factors and crack’s extension velocity in Case 3.2

5 结论

本文给出了正交异性体中位移边界条件下界面裂纹扩展问题的解，此方法还可以用于求应力边界条件以及混合边界条件下的解，并且通过叠加可以求解复杂载荷作用下的动裂纹问题。

当 $\beta \to 0$，$V_1 \to 0$，$V_2 \to 0$，$t \to \infty$，$\beta t \to a$，$(V_1 + V_2)t \to c$ 时，该问题归结为一正交各向异性体中长为 c 的裂纹在 $x = a$ 处有一常数位移 w_0 时的静态问题。

对于静态裂纹，裂纹尖端具有 $r^{-1/2}$ 阶奇异性，而对于不同材料结合面上的扩展裂纹问题，有些研究者认为具有其它阶的奇异性。如果裂纹尖端具有其它阶奇异性，此方法仍然适用。

当裂纹扩展速度 $V_1 = V_2$ 时，该问题变为裂纹对称扩展问题；应用本文方法还可以求解半无限长裂纹问题。

(参考文献转第 15 页)

法作为力学概念基础，以广义逆矩阵理论作为数学理论基础，以迭代方式为求解形式，由此为力法在电算中的发展应用提出了新的思路。

参考文献：

[1] Giambanco F, Palizzolo L, Panzeca T. The indirect force method [J]. Comp. Struct., 1990, 37: 759~768.

[2] Kaneko I, Lawo M, Thierauf G. On computational procedures for the force method [J]. J. Numer. Meth. Engng, 1982, 18: 1469~1495.

[3] 刘西拉，张春俊．基于广义逆矩阵的特大增量步算法[J]．第三届全国结构工程学术会议论文集，《工程力学》增刊, 1994. 21~35.
Liu Xila, Zhang Chunjun. The large increment method based on generalized inverse matrix [J]. Engineering Mechanics Supplement (Sup.), 1994. 21~35. (in Chinese)

[4] Zhang C J, Liu X L. A large increment method for material nonlinearity problems [J]. Advances in Structural Engineering, 1997, 11(2): 99~110.

[5] 郭早阳．特大增量步方法和并行程序设计[D]．北京：清华大学土木工程系, 1999.
Guo Zaoyang. The large increment method and the parallel programming [D]. Beijing: The Civil Engineering Department of Tsinghua University, 1999. (in Chinese)

[6] E D Sotelino. Parallel processing techniques in structural engineering applications [J]. Journal of Structural Engineering ASCE, 2003,129(12):1698~1706.

[7] S Bitzarakis, M Papadrakakis, A Kotsopulos. Parallel solution techniques in computational structural mechanics [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 148: 75~104.

[8] 龙驭球，包世华．结构力学[M]．高等教育出版社，1996.
Long Yuqiu, Bao Shihua. Structural Mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press. 1996. (in Chinese)

[9] 周绥平，刘西拉．结构矩阵分析及 SMIS-PC 程序[M]．北京：人民交通出版社, 1989.
Zhou Suiping, Liu Xila. Matrix Analysis of Structures and SMIS-PC Program [M]. Beijing: People’s Communications Publishing House, 1989. (in Chinese)

[10] 何旭初．广义逆矩阵的基本理论和计算方法[M]．上海：科学技术出版社 1985.
He Xuchu. Generalized inverse theory and algorithms [M]. Shanghai: Shanghai Science & Technology Press, 1985. (in Chinese)

[11] Pierre Ladeveze. Nonlinear computational structural mechanics [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

(上接第 25 页)

参考文献：

[1] Qian W, Sun C T. Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids [J]. Int. J. Sol. Struc, 1998, 35(25): 3317~3330.

[2] Chang Won Shul, Kang Yong Lee. Dynamic response of subsurface interface crack in multi-layered orthotropic half-space under anti-plane shear impact loading [J]. Int. J. Sol. Struc, 2001, 38(20): 3563~3574.

[3] Brock L M. Interface crack extension at any constant speed in orthotropic or transversely isotropic bimaterials-Ⅰ.General exact solutions [J]. Int. J. Sol. Struc, 2002, 39(5): 1165~1182.

[4] Brock L M. Hanson M T. Interface crack extension at any constant speed in orthotropic or transversely isotropic bimaterials-Ⅱ. Two important examples [J]. Int. J. Sol. Struc, 2002, 39(5): 1183~1198.

[5] Rubio-Gonzalea C, Mason J J. Dynamic stress intensity factors at the tip of a uniformly loaded semi- infinite crack in an orthotropic material [J]. J. Mech. & Phys. Sol., 2000, 48(5): 899~925.

[6] Shukla Arun. Photoelastic investigation of interfacial fracture between orthotropic and isotropic materials [J]. Optics and Lasers in Eng., 2003, 40(4): 307~324.

[7] G P Cherepanov. Mechanics of brittle fracture [M]. Nauka Press, Moscow, 1974. 732~736.

[8] 沈观林．复合材料力学[M]．北京：清华大学出版社，1996.
Shen Guanlin. Mechanics of composite materials [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996. (in Chinese)

[9] G P Charepanov, E F Afanasov. Some dynamic problems of the theory of elasticity— a review [J]. Int. J. Eng. Sci., 1974, (12): 665~690.

[10] 范天佑．断裂动力学引论[M]．北京：北京理工大学出版社, 1990.
Fan Tianyou. Introduction to fracture dynamics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1990. (in Chinese)

[11] G C Sih. Mechanics of Fracture 4, Elastodynamics Crack Problems [M]. The Netherlands: Noordhoff International Publishing, 1977. 213~247.