

文章编号 : 1000-4750(2004)01-0037-05

含裂纹的矩形截面压电材料 反平面问题的应力场和电场

刘淑红¹, 段士杰², 齐月芹², 邹振祝²

(1. 北方交通大学土建学院, 北京 100044; 2. 石家庄铁道学院, 石家庄 050043)

摘 要: 研究了含裂纹的矩形截面的压电材料在平面内电场和反平面荷载作用下的问题。得到了满足拉普拉斯方程、电渗透裂纹面边界条件的位移函数解和电势函数解, 从而得到了电场和弹性场的基本解。最后, 用边界配置法计算了应力强度因子和能量释放率。结果表明, 这种半解析半数值的方法计算简便, 而且具有足够的精确性和广泛的应用性。

关键词: 压电材料; 型裂纹; 边界配置法; 应力强度因子; 能量释放率
中图分类号: O346 **文献标识码:** A

STRESS FIELD AND ELECTRIC FIELD OF A PIEZOELECTRIC MATERIAL WITH A MODE- CRACK

LIU Shu-hong¹, DUAN Shi-jie², QI Yue-qin², ZOU Zhen-zhu²

(1. School of Civil Engineering, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: A rectangular piezoelectric material with a mode- crack under the action of in-plane electric loading and anti-plane loading is investigated. General solutions are obtained, which satisfy both Laplace equation and the permeable crack conditions. A boundary collocation method is used to calculate the stress intensity factor and energy release rate. It is shown that the semi-analytical method is simple, accurate and widely applicable.

Key words: piezoelectric material; mode- crack; boundary collocation method; stress intensity factor; energy release rate

1 引言

由于独特的力电耦合性能, 压电介质广泛地应用于智能结构中, 如传感器、致动器等。但受到力-电荷载时, 由于制造过程中产生的缺陷, 如裂纹、孔洞等, 压电介质就可能发生破坏。因此, 压电介质的断裂力学的研究受到了广泛的重视。其研究的

一个主要的任务就是给出压电陶瓷中电场和弹性场的分布规律, 尤其是裂纹尖端处电弹场的特征。

反平面变形是一种较简单变形, 关于此类问题的研究, 见文献[1]-[6]。从上述的国内外文献中可以看到, 目前对压电材料的研究多限于无限大的介质或无限大的长条, 采用积分变换和复变函数的方法, 得到的是解析解。而实际中遇到的大多数问题

收稿日期: 2002-07-30; 修改日期: 2003-01-06

作者简介: 刘淑红(1968), 女, 辽宁北票人, 讲师, 博士生, 从事固体力学的研究; (E-mail: lshdsj@jzri.edu.cn)

段士杰(1968), 男, 河北高阳人, 讲师, 从事计算机 CAE、CAD 的研究;

齐月芹(1971), 女, 河北平山人, 讲师, 从事固体力学研究;

邹振祝(1937), 男, 山东威海人, 教授, 博士生导师, 从事固体力学研究

是有限尺寸的压电材料，运用上述方法得不到解，必须采用数值方法。

本文研究了含型边缘裂纹、中心裂纹的矩形截面压电材料的弹性场和电场。采用的方法是通过求解拉普拉斯方程，得到满足电渗透裂纹面边界条件的用级数形式表示的位移函数解和电势函数解，从而得到了应力场和电场的基本解，其中的未知系数可用边界配置法求解。将边界配置法用于研究的压电材料的裂纹问题，现有的文献中未见有人研究。

2 问题的提出及基本方程

考虑的问题是包含边缘裂纹、中心裂纹的矩形截面的横观各向同性压电材料承受反平面变形，在直角坐标系下，极化轴 x_3 垂直各向同性面，如图 1、2 示。由于我们考虑的问题是反平面变形，因此，位移函数 u_i 和电场强度 $E_i (i=1,2,3)$ 如下

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2) \\ E_1 = E_1(x_1, x_2), \quad E_2 = E_2(x_1, x_2), \quad E_3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

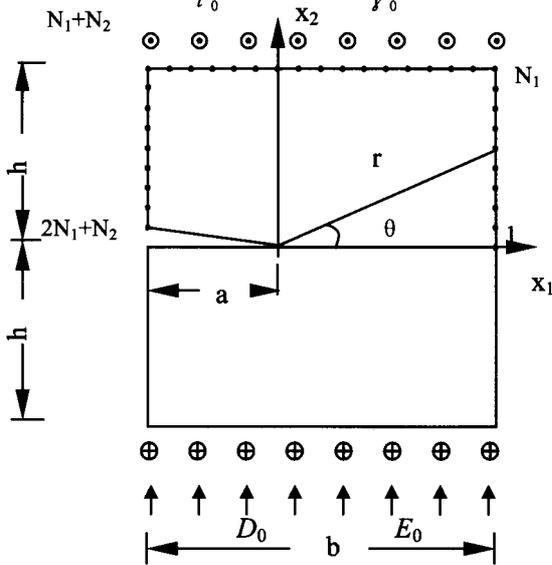


图 1 关于裂纹对称的矩形截面

Fig.1 Rectangular section with an edge crack
平衡方程为

$$\begin{aligned} c_{44} \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 f = 0 \\ e_{15} \nabla^2 u_3 - e_{11} \nabla^2 f = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中 c_{44} 、 e_{15} 和 e_{11} 分别是弹性系数、压电系数和介电系数， f 是电势。对一般的压电陶瓷，有 $c_{44}e_{11} + e_{15}^2 \neq 0$ ，所以，上面的方程可以化为两个独立的调和方程

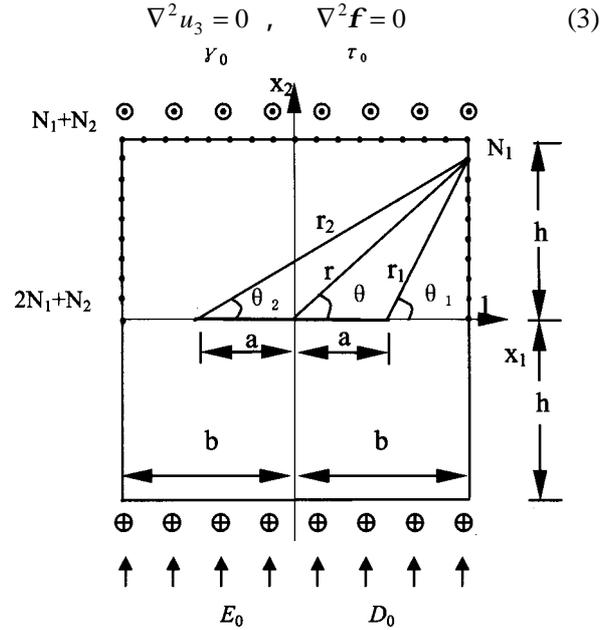


图 2 受反平面力载荷和平面电场作用的中心裂纹体

Fig.2 Rectangular piezoelectric body with a center crack subjected to in-plane electric loads and anti-plane mechanical loads

应变 g_{ij} 和电场强度 E_i 为

$$\begin{aligned} g_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad g_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ E_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad E_2 = -\frac{\partial f}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (4)$$

本构方程为

$$\begin{aligned} t_{31} = c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + e_{15} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad t_{32} = c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ D_1 = e_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - e_{11} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad D_2 = e_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - e_{11} \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 t_{3i} 和 $D_i (i=1,2)$ 分别是应力和电位移分量。

裂纹面的边界条件，采用的电渗透边界条件

$$t_{32} = 0, \quad D_2^+ = D_2^-, \quad E_1^+ = E_1^- \quad (6)$$

式中上角标“+”、下角标“-”表示裂纹的上、下表面。

在矩形截面的上、下边缘处承受下述四种组合的机电荷载的作用：

- 第一种情况： $t_{32}(x_1, \pm h) = t_0, \quad D_2(x_1, \pm h) = D_0$ ；
- 第二种情况： $g_{32}(x_1, \pm h) = g_0, \quad E_2(x_1, \pm h) = E_0$ ；
- 第三种情况： $t_{32}(x_1, \pm h) = t_0, \quad E_2(x_1, \pm h) = E_0$ ；
- 第四种情况： $g_{32}(x_1, \pm h) = g_0, \quad D_2(x_1, \pm h) = D_0$ (7)

3 问题的求解

3.1 边缘裂纹问题的基本解

满足平衡方程式(3)和裂纹的边界条件式(6)的位移 u_3 和电势 f 的级数形式解为

$$u_3 = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-\frac{1}{2}} A_{2n-1} \sin(n-\frac{1}{2})\mathbf{q} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n A_{2n} \sin n\mathbf{q} \quad (8)$$

$$f = -\frac{c_{44}}{e_{15}} \sum_{n=1}^{\infty} r^n A_{2n} \sin n\mathbf{q}$$

式中, A_{2n-1}, A_{2n} 为待定常数, 由物体的周边的边界条件确定。把式(8)代入式(4)、(5), 得到电场和弹性场的基本解

$$\begin{aligned} g_{31} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) r^{n-\frac{3}{2}} A_{2n-1} \sin(n-\frac{3}{2})\mathbf{q} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} A_{2n} \sin(n-1)\mathbf{q} \\ g_{32} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) r^{n-\frac{3}{2}} A_{2n-1} \cos(n-\frac{3}{2})\mathbf{q} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} A_{2n} \cos(n-1)\mathbf{q} \\ E_1 &= \frac{c_{44}}{e_{15}} \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} A_{2n} \sin(n-1)\mathbf{q} \\ E_2 &= \frac{c_{44}}{e_{15}} \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} A_{2n} \cos(n-1)\mathbf{q} \\ t_{31} &= c_{44} \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) r^{n-\frac{3}{2}} A_{2n-1} \sin(n-\frac{3}{2})\mathbf{q} \\ t_{32} &= c_{44} \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) r^{n-\frac{3}{2}} A_{2n-1} \cos(n-\frac{3}{2})\mathbf{q} \\ D_1 &= e_{15} \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) r^{n-\frac{3}{2}} A_{2n-1} \sin(n-\frac{3}{2})\mathbf{q} \\ &\quad + \frac{e_{15}^2 + e_{11}c_{44}}{e_{15}} \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} A_{2n} \sin(n-1)\mathbf{q} \\ D_2 &= e_{15} \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) r^{n-\frac{3}{2}} A_{2n-1} \cos(n-\frac{3}{2})\mathbf{q} \\ &\quad + \frac{e_{15}^2 + e_{11}c_{44}}{e_{15}} \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} A_{2n} \cos(n-1)\mathbf{q} \quad (9) \end{aligned}$$

在裂纹尖端, A_1 项为主项, 其余各项可忽略不计。

令 K^s 表示应力强度因子

$$K^s = \frac{c_{44} A_1 \sqrt{2\mathbf{p}}}{2} \quad (10)$$

3.2 中心裂纹问题的基本解

满足平衡方程式(3)和裂纹的边界条件式(6)的位移 u_3 和电势 f 的级数形式解为

令位移 u_3 和为

$$u_3 = \sum_{k=1}^M -A_k \sqrt{r_1 r_2} r^{k-1} \sin[(k-1)\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}] \\ + \sum_{k=1}^M B_k r^k \sin k\mathbf{q}$$

$$f = \sum_{k=1}^M -\frac{c_{44}}{e_{15}} B_k r^k \sin k\mathbf{q} \quad (11)$$

式中, A_k, B_k 为待定常数, 由物体的周边的边界条件确定。将式(11)代入式(4)、(5)中, 得应变、电场强度、应力和电位移

$$\begin{aligned} g_{31} &= \sum_{k=1}^M -\frac{A_k}{\sqrt{r_1 r_2}} [kr^k \sin(k\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}) \\ &\quad - a^2(k-1) r^{k-2} \sin((k-2)\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2})] \\ &\quad + \sum_{k=1}^M kr^{k-1} B_k \sin(k-1)\mathbf{q} \\ g_{32} &= \sum_{k=1}^M -\frac{A_k}{\sqrt{r_1 r_2}} [kr^k \cos(k\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}) \\ &\quad - a^2(k-1) r^{k-2} \cos((k-2)\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2})] \\ &\quad + \sum_{k=1}^M kr^{k-1} B_k \cos(k-1)\mathbf{q} \\ E_1 &= \sum_{k=1}^M kr^{k-1} \frac{c_{44}}{e_{15}} B_k \sin(k-1)\mathbf{q} \\ E_2 &= \sum_{k=1}^M kr^{k-1} \frac{c_{44}}{e_{15}} B_k \cos(k-1)\mathbf{q} \\ t_{31} &= \sum_{k=1}^M -c_{44} \frac{A_k}{\sqrt{r_1 r_2}} [kr^k \sin(k\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}) \\ &\quad - a^2(k-1) r^{k-2} \sin((k-2)\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2})] \\ t_{32} &= \sum_{k=1}^M -c_{44} \frac{A_k}{\sqrt{r_1 r_2}} [kr^k \cos(k\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}) \\ &\quad - a^2(k-1) r^{k-2} \cos((k-2)\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2})] \\ D_1 &= e_{15} \sum_{k=1}^M -\frac{A_k}{\sqrt{r_1 r_2}} [kr^k \sin(k\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}) \\ &\quad - a^2(k-1) r^{k-2} \sin((k-2)\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2})] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} kr^{k-1} (\frac{e_{15}^2 + e_{11}c_{44}}{e_{15}}) B_k \sin(k-1)\mathbf{q} \\ D_2 &= e_{15} \sum_{k=1}^M -\frac{A_k}{\sqrt{r_1 r_2}} [kr^k \cos(k\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}) \\ &\quad - a^2(k-1) r^{k-2} \cos((k-2)\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2})] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} kr^{k-1} (\frac{e_{15}^2 + e_{11}c_{44}}{e_{15}}) B_k \cos(k-1)\mathbf{q} \quad (12) \end{aligned}$$

令 K^s 表示应力强度因子, 可根据下式进行计算:

$$K^s = -\sum_{k=1}^M c_{44} A_k \sqrt{\mathbf{p} a} a^{k-1} \quad (13)$$

因此, 两种裂纹问题下的应变强度因子 K^g 、

电位移强度因子 K^D 和电场强度因子 K^E 可以表示成

$$K^g = \frac{K^s}{c_{44}}, \quad K^D = \frac{e_{15}K^s}{c_{44}}, \quad K^E = 0 \quad (14)$$

据 Pak^[1], 对于线弹性压电材料, 能量释放率 G 可表示为

$$G = \frac{K^s K^g - K^D K^E}{2} = \frac{K^s K^g}{2} \quad (15)$$

从上面的公式还可以看出, 电场强度在裂尖没有奇异性, 应变、应力、电位移具有 1/2 阶的奇异性, 而且 D_2 在裂纹面上不等于零, 这些结论与 Zhang TY^[3]、李显方^[5]和 Kwon SM^[6]是一致的。

4 用边界配置法求解应力强度因子和能量释放率

由式(8)-(12)易见, 基本解满足裂纹面的边界条件及平衡方程, 所需考虑的只是物体的周边条件, 它们可以通过配点方法近似满足, 从而电弹场、应力强度因子和能量释放率便可求得, 下面用边界配置法求解应力强度因子和能量释放率。为了便于比较, 选取 PZT-6B, PZT-5H 压电陶瓷进行研究, 如表 1 所示。

表1 压电陶瓷的材料参数(Kwon SM^[6])

Table 1 Material properties of piezoelectric ceramics

	PZT-6B	PZT-5H
c_{44} ($\times 10^{10}$ N/m ²)	2.71	3.53
e_{15} (C/m ²)	4.6	17.0
e_{11} ($\times 10^{-10}$ C/Vm)	36.0	151.0
G_{cr} (J/m ²)	5.0	5.0

用 Y 表示无量纲的 I 型应力强度因子

$$Y = \frac{K^s}{K_0} \quad (16)$$

其中 $K_0 = t_0 \sqrt{\rho a}$ 。根据对称性, 配点只需在半个矩形边界进行, 配点如图 1, 2 示, 左、右边界的配点数为 N_1 , 上边界的配点数为 N_2 。图 3 是两种裂纹问题下在第一种、第三种加载情况下, 无量纲的应力强度因子 Y 与 a/b 的变化关系。从图 3 可以看出, 无量纲的 I 型应力强度因子随 h/b 的减小、 a/b 的增加而增大。在第一种、第三种加载情况下, 应力强度因子只与外加剪切荷载 t_0 有关, 与外加电场无关, 与 Wang yuanhan^[7]纯弹性材料的计算结果是一致的。图 4、图 5 是含中心裂纹压电材料在第二

种加载情况下、第四种加载情况下, G/G_{cr} 与外加电场强度 E_0 、外加电位移 D_0 的关系, 与 Kwon SM^[6]的结果相同。从图中可以看出, 在第二种加载情况、第四种加载情况下, 应力强度因子和能量释放率不仅与外加变形 g_0 、材料参数有关, 还与外加电场、电位移有关。

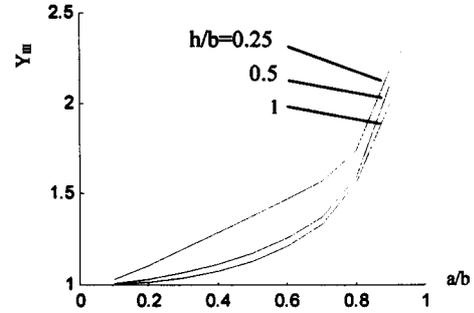


图 3 无量纲应力强度因子与 a/b 的关系

Fig.3 Dimensionless stress intensity factor against a/b

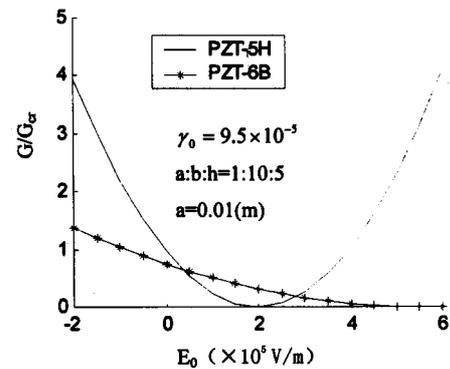


图 4 第二种加载情况下的 G/G_{cr}

Fig.4 G/G_{cr} for Case 2

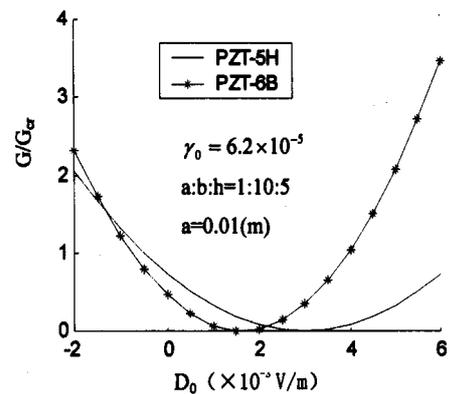


图 5 第四种加载情况下的 G/G_{cr}

Fig.5 G/G_{cr} for Case 4

5 结论

本文研究了含裂纹的矩形截面压电材料在平面内电场和反平面荷载作用下, 得到了满足拉普拉

斯方程、裂纹面边界条件用级数形式表示的位移函数解和电势函数解，从而得到了应力场和电场的基本解，其中的未知系数可以通过边界配置法求出。并且用边界配置法计算了应力强度因子和能量释放率，其结果与其他方法求解的中心裂纹体相吻合。总之，本文提出的这种半解析半数值的方法用于求解含裂纹的压电材料，程序容易编制，计算时间快，而且具有足够的精确性和广泛的应用性。

参考文献：

- [1] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material [J]. *J Appl Mech*, 1990, 57(3): 647-653.
- [2] Pak Y E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29(19): 2403-2419.
- [3] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for a mode III crack in a piezoelectric material [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33 (3): 343-359.

- [4] Shindo Y, Narita F, Tanaka K. Singular stress and electric fields of a piezoelectric ceramic strip with a finite crack under longitudinal shear [J]. *Acta Mechanica*, 1997, 120(1-4): 31-45.
- [5] 李显方, 范天佑. 压电陶瓷带形中心型裂纹的精确分析解[J]. *力学学报*, 2002, 34(3): 336-343.
Li Xianfang, Fan Tianyou. An exact analytical solution for a mode- crack in a piezoelectric strip [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(3): 335-343. (in Chinese)
- [6] Kwon S M, Lee K Y. Analysis of stress and electric fields in a rectangular piezoelectric body with a center crack under anti-plane shear loading [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(35): 4859-4869.
- [7] Wang Yuanhan. SIF calculation of an internal crack problem under anti-plane shear [J]. *Computers & Structures*, 1993, 48(2): 291-295.

(上接 8 页)

参考文献：

- [1] Bungale S Taranath. Steel, concrete & composite design of tall buildings[M]. The McGraw-Hill Companies, 1998.
- [2] Juan C. De la Llera. Three-dimensional inelastic response of an RC building during the Northridge earthquake[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2001, 5:482-489.
- [3] Koji OGAWA, Hisaya KAMURA, Kazuo INOUE. Modeling of the moment resistant frame to fishbone shaped frame for the response analysis[J]. *J. Struct. Constr. Eng*, 1999,7:119-126.
- [4] 刘大海, 扬翠如, 钟锡根. 高层建筑抗震设计[M]. 中国建筑工业出版社, 1994.
Liu Dahai, Yang Cuiru, Zhong Xigen. Aseismic design for high rise buildings [M]. China Architecture & Building Press, 1994. (in Chinese)
- [5] 郑廷银, 朱慧. 钢框架-支撑体系二阶分析的高效非迭代方法[J]. *工业建筑*, 2001, 3: 62-64.
Zheng Tingying, Zhu Hui. An efficient noniterative method for second order analysis of braced steel frame systems [J]. *Industrial Construction*, 2001, 3:62-64. (in Chinese)
- [6] 梁启智, 方兴华, 郭志. 带支撑钢框架结构随机地

震反应及可靠性分析[J]. *华南理工大学学报*, 1997, 12: 27-32.

- [7] Liang qizhi, Fang Xinghua, Guo Zhi. Second-order stochastic response and reliability analysis of steel braced frames subjected to wind load[J]. *Journal of South China University of Technology*, 1997, 12: 27-32.
- [7] Yuji KOETAKA, Kazuo INOUE, Plastic deformation capacity demand of energy absorption members in strong column type steel space frames[J]. *J. Struct. Constr. Eng*, 1999, 10: 125-132.
- [8] 姜宏. 空间结构的简化计算——独柱法[J]. *桂林工学院学报*, 2000, 1: 26-30.
Jiang Hong. Simplified calculating method for space structure-freestanding column method [J]. *Journal of Guilin Institute of Technology*, 2001.1:26-30. (in Chinese)
- [9] Orbison JG. Nonlinear static analysis of three-dimensional steel frames[R]. Report No.82-6, Department of Structural Engineering, Cornell University, 1982.