2004年 6 月

文章编号:1000-4750(2004)03-0049-06

随机结构数值模拟分析的神经网络法

韩大建,陈太聪,苏 成

(华南理工大学土木工程系,广东 广州 510640)

摘 要:在随机结构分析中,蒙特卡洛方法作为随机数值模拟方法,为问题提供了最为直观和精确的解答,但 计算量大、效率低下的缺点大大降低了方法的实用性。研究在蒙特卡洛方法中引入人工神经网络,仅进行少量 确定性分析,训练后即可模拟确定性有限元求解器,用神经网络的快速泛化映射取代蒙特卡洛法中的大量确定 性有限元分析。算例结果显示,提出的蒙特卡洛-神经网络法可将蒙特卡洛法的计算效率提高几十至一百倍, 计算精度令人满意,是一种有潜力的随机结构实用分析方法。

关键词:随机有限元;数值模拟;蒙特卡洛;神经网络中图分类号:TU311;O242;TP183 文献标识码:A

DIGITAL SIMULATION IN ANALYSIS OF STOCHASTIC STRUCTURES: AN ARTIFICIAL NEURAL NETWORK APPROACH

HAN Da-jian, CHEN Tai-cong, SU Cheng

(Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangdong Guangzhou 510640)

Abstract: Among all the methods for analysis of stochastic structures, Monte Carlo (MC) method, a digital simulation method, can provide the most intuitive and accurate solution. However, the disadvantages of vast computation and low computing efficiency block this method from wide use. In this paper, Artificial Neural Network (ANN) is used to replace the deterministic FEM solver in MC simulation. The idea is that FEM is only used to generate the input-output pairs needed for training ANN and that the trained ANN can map out instantly for the structural responses. Thus ANN is used to obtain all the samples for MC statistics. Two numerical examples for analysis of stochastic structures are given. The results show that the proposed MC-ANN method has much higher computing efficiency and better accuracy.

Key words: stochastic finite element; digital simulation; Monte Carlo; artificial neural network

自 70 年代初结构参数的随机特征在有限元分 析中得到考虑开始^[1-2],三十年来,国内外学者发展 了多种随机结构分析的方法。依据对有限元分析核 心的处理不同,随机结构分析的方法主要分为解析 方法和随机模拟法两大类^[3-4]。解析方法包括摄动

¹ 前言

收稿日期:2002-11-18;修改日期:2003-02-21

基金项目:广东省自然科学基金资助项目(000387)

作者简介:韩大建(1940),女,广西北海人,教授,博士,从事结构非线性分析与混凝土本构理论、建筑与桥梁结构研究; (E-mail: ardjhan@scut.edu.cn) 陈太聪(1977),男,海南乐东人,博士研究生,从事建筑与桥梁结构、人工智能应用研究; 苏 成(1968),男,广东潮阳人,副教授,博士,从事计算力学、高层建筑结构、桥梁结构研究

法^[5]、Newmann 展开法^[6]、谱分解法^[7]等几种,通 过引入参数随机性质,修改确定性有限元列式,继 而推导得到随机有限元的计算列式。而随机分析的 数值模拟方法^[8-9],则不改变确定性有限元的分析原 理,采用 Monte Carlo 原理,对参数随机场进行大 量的抽样,然后重复进行所有样本的确定性有限元 计算,最后对响应输出进行统计,得到响应量的数 字特征。

相对于随机结构分析的解析方法而言,Monte Carlo(MC)法是最直观、最精确、获取信息量最多、 对非线性问题最有效的计算统计方法,因而其结果 常作为近似精确解答为解析方法提供校验。但由于 MC 法的数学基础是概率统计的大数定律,所以随 机抽样得到的样本数量必须要足够大(常常以万 计),才能得到较为准确的统计结果。在实际操作 中,上万次确定性有限元分析的计算代价过大,从 而限制了 MC 法在随机结构分析中的应用。

人工神经网络(Artificial Neural Network,简称 ANN)作为人工智能和软计算中的主要技术手段之 一,在近十年来得到了长足发展,应用范围涉及科 学和工程的多个领域如模式识别、图像和信号处 理、系统控制等等。已有证明^[10](Kolmogorov 多层 神经网络映射存在定理),非线性映射关系可通过 三层前馈型人工神经网络结构近似地实现。ANN 结构通过简单的矩阵加、乘计算,即可实现对系统 机制的近似模拟,特别是在复杂非线性系统中,相 对于传统方法的复杂运算, ANN 更是一个快速有 效的解决手段。本文正是利用 ANN 结构的非线性 泛化映射能力,模拟确定性有限元结构求解器的机 制, 取代 MC 法中大量的确定性有限元分析, 直接 通过结构参数与权值矩阵的加乘计算得到高精度 的响应输出,从而大大提高了 MC 法的计算效率, 为随机结构近似精确分析的实际操作提供了一条 有效可行的途径。

2 参数随机场离散

类似于连续力学场的有限元网格离散,连续随机场同样要进行随机网格的离散,才能用于力学模型的分析计算。随机场的离散形式对随机结构分析的计算效率和计算精度有着决定性的影响。随机场离散化的方法主要有中点法、局部平均法、形函数法、局部积分法和正交展开法等^[11]。其中,局部平均法的计算收敛快、精度高,并能保持对原随机场

相关结构的不敏感性,是一种十分有效的随机场离 散化方法^[12-13]。

以二维随机场为例,设 $Y(x_1, x_2)$ 为二维连续参 数连续状态随机场, $A_i = L_{1i}L_{2i}$ 为以 (x_{1i}, x_{2i}) 为中 心,其边平行于坐标轴 $x_1 \subseteq x_2$,且长为 $L_{1i} \subseteq L_{2i}$ 的 矩形的面积(见图 1),随机场在 A_i 内的局部平均定 义为



Fig.1 Distances to characterize the relative positions of rectangles A_i and A_j

如果 $Y(x_1, x_2)$ 是一个均匀随机场,则它可用均 值 m,方差 s^2 及归一化协方差函数 $r(r_1, r_2)$ 近似描述,其中 $r_1 与 r_2$ 分别表示场中任意两点之间在 x_1 与 x_2 方向的距离。对应的局部平均随机场可用均值 $E[Y_i]$ 及协方差 $Cov[Y_i, Y_j]$ 近似描述,相互关系为^[12]

$$E[Y_i] = m \tag{2}$$

 $Cov[Y_i, Y_j]$

$$=\frac{1}{A_{i}A_{j}}\frac{\boldsymbol{s}^{2}}{4}\sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3}(-1)^{k}(-1)^{l}(L_{1k}L_{2l})^{2}\boldsymbol{g}(L_{1k},L_{2l})$$
(3)

式中, $g(L_{1k}, L_{2l})$ 为边长为 L_{1k} 与 L_{2l} 的矩形上局部 平均随机场的归一化方差函数,它与原随机场的归 一化协方差函数 $r(r_1, r_2)$ 之间的关系为

$$g(L_{1k}, L_{2l}) = \frac{4}{L_{1k}L_{2l}} \int_{0}^{L_{1k}} \int_{0}^{L_{2l}} (1 - \frac{r_1}{L_{1k}})(1 - \frac{r_2}{L_{2l}}) \mathbf{r}(r_1, r_2) dr_1 dr_2$$
⁽⁴⁾

3 参数随机场的 MC 抽样

连续参数随机场经过 n 维离散后,可以得到以 均值 m 及协方差 Cov[Y_i,Y_j]为数字特征的 n 维离散 参数随机场。作为随机模拟分析的主要手段,MC 法必须构造相应的 n 个相关随机数列(n 维随机向量 样本),其均值及协方差符合离散参数随机场的相 应数字特征。随机向量样本的构造可以采用 Cholesky分解法^[14]、谱分解法^[15]或Karhunen-Loeve 分解法^[7]进行,其中Cholesky分解法因形式简单、 计算效率高而较为常用。

离散化随机场的协方差矩阵为
$$C_v = Cov[Y_i, Y_j]$$
 $i, j = 1, 2, \dots, n$ (5)
式中, Y_i, Y_j 为离散化单元随机变量。

将C,作 Cholesky 分解,即

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{T} \tag{6}$$

其中 L 为下三角分解阵。 取离散化随机向量

$$V = m + LZ \tag{7}$$

其中 $m = [m, m, \Lambda, m]^T$ 为 n 维均值向量; $Z = [Z_1, Z_2, \Lambda, Z_n]^T$ 为具有(0, 1)Gauss 分布的 n 维随机向量,各分量间两两独立。

则可证明^[4],只要对各随机单元产生(0, 1)Gauss 分布的随机变量,然后代入(7)式,即可获 取离散随机场的随机向量样本 V。

4 神经网络结构与训练方法

根据神经元和联结的不同排列,人工神经网络可以有众多不同的模型。其中,多层感知器 (Multi-Layer Perceptron,简称 MLP)模型是最为常用的人工神经网络模型。典型的网络结构如图2示。

MLP 作为一种指导型的神经网络结构,需经过 已有历史数据的训练指导才能有效地建立起输入/ 输出数据集间非线性关系的近似映射机制。其对历 史知识的学习采用反传(Back Propagation,简称 BP) 算法进行。



图 2 三层 MLP 模型

Fig.2 Three-layer MLP model

定义网络性能函数为网络模拟输出与期望输 出之间的误差平方和,

$$E = (t - o)^{T} (t - o) = \sum_{j=1}^{S^{M}} (t_{j} - o_{j})^{2}$$
(8)

式中, $t = \{t_1, t_2, A, t_{S^M}\}^T$ 为网络期望输出, S^M 为输出层神经元的数目。

BP 算法的计算原理即是在训练样本集的指导 学习下,通过调节网络权值使性能函数 *E* 最小化。 Rumelhart 等人最初提出的 BP 算法^[16]基于最速梯 度下降法,沿着性能函数的负梯度方向搜索最优的 网络权值。其网络权值调整公式如下

$$w(k+1) = w(k) - \alpha J(k)$$
 (9)
其中, α 为学习速率, $J(k) = [\partial E(k)/\partial w(k)]$ 为第 k

步迭代时性能函数 E 对 w 的 Jacobian 矩阵。

网络训练的收敛通过以下三个准则之一进行 判定:

- 1) $|E(k)| \leq \varepsilon_E$
- 2) $\| \boldsymbol{J}(k) \| \leq \varepsilon_J$
- 3) $|| w(k+1) w(k) || \le \varepsilon_w$

式中, ε_E 、 ε_J 、 ε_w 分别为网络性能函数 *E*、Jacobian 矩阵 *J*、网络权值 *w* 的收敛阈值。本文数值算例中, 采用准则 1)进行训练收敛判定。

虽然原 BP 算法总能保证网络训练的收敛,但 收敛速度十分缓慢,实际操作性差。为了改善原 BP 算法的训练效率,多种基于启发式原理和优化 原 理 的 加 速 算 法 被 提 出^[17]。 其 中, Levenburg-Marquardt 加速算法^[18]以其同时具备一 阶优化算法(最速梯度下降法)收敛稳定和二阶优化 算法(Gauss-Newton 算法)收敛迅速的优点,在 MLP 的训练学习中得到了广泛应用。LM 法在第 *k*+1 迭代步调整网络权值的算法如下

w(k+1)

 $= w(k) - [J(k)^T J(k) + \lambda(k)I]^{-1} J(k)^T [t - o(k)]$ (10) 式中, $\lambda(k)$ 为第 k 迭代步的训练参数, I 为单位阵。

在随机结构的计算分析中,取随机单元的参数 特征(即由式(7)确定的随机向量样本 V 中的随机分 量)作为网络结构的输入参数,并取相应的结构响 应作为网络结构的输出参数,则该 MLP 所确立的 映射关系即代表了该随机结构的内部机制。用于网 络结构训练的历史数据可通过力学计算或实验观 测获得。相应于 MC 法中的多次确定性有限元分析, 确定性有限元计算结果即被用以构造训练网络结 构的历史数据,训练收敛的网络结构即可实现对确 定性有限元求解器的近似模拟。

5 MC-ANN 法计算流程

综合而言, MC-ANN 法用于随机结构分析的计

算流程如下示:

1) 参数随机场离散

2) MC 随机参数向量样本构造

3) 甄选部分参数向量样本,进行确定性有限 元计算,得到相应响应输出,构成供 ANN 训练用 的随机参数/响应数据对

 4)采用以上训练数据对,取随机参数为网络 输入,取相应的响应输出为网络输出,进行 ANN 结构的训练学习

5) 所有 MC 参数向量样本均采用训练完成的 ANN 结构进行模拟响应输出

6)进行模拟响应输出统计,得到相应数字特征

以上分析流程中,由 ANN 结构的特点决定, 即域内泛化映射能力强而域外映射容易失真,所以 第 3)步中,用以 ANN 结构训练用的参数样本的甄 选,必须包含所有 MC 参数样本中各随机参数分量 的最大和最小元素,这样才能保证训练后的 ANN 结构对其余 MC 样本的高精度泛化映射。

6 算例分析

作者依据上述 MC-ANN 法流程分别进行了一 维和二维问题的计算。计算过程中,参数随机场离 散采用局部平均法进行, MC 参数样本的构造采用 Cholesky 分解法进行, ANN 结构的训练则采用高效 的 Levenburg-Marquardt 算法进行。上述所有算法和 确定性有限元分析程序均由自主开发的 Fortran 程 序代码实现。全部计算过程在 Pentium-III 1.0GHz-CPU 256M-RAM 的个人微机上完成。

算例 1:如图 3 所示两端简支梁,长 *l* = 20,承 受均布确定性荷载 *q* = 1。设梁材料的弹性模量 *E* 和截面惯性矩 *I* 均为坐标 *x* 的随机函数,即

$$E = E(1 + k_e I_e(x))$$

$$I = I(1 + k_e I_e(x))$$
(11)

式中 $E = 10^4$, I = 0.6667, $k_e = k_i = 0.1$; $I_e(x)$ 和 $I_i(x)$ 为零均值归一化的互不相关随机场,随机场 的相关系数函数如下示

$$\boldsymbol{r}_{e}(r) = \boldsymbol{r}_{i}(r) = e^{-|r|/5} \tag{12}$$

现计算 *E*、*I* 随机场下简支梁中点 *o* 挠度的均值和 方差。

如图 3 示,简支梁已均分为 10 个有限元单元, 取随机单元网格与有限元单元网格一致,*E*、*I* 随机 场采用局部平均法离散至各随机单元。MC 样本数 取为 10,000 个。ANN 结构采用 $N_{20 \times 10 \times 1}$, 网络训练 收敛的预定阈值 $e_E = 10^{-8} \cdot N$, 其中 N 为训练样本 数。训练前的网络权值采用 Nguyen-Widrow 法进行 初始化^[19]。





Fig.3 Simply-supported beam subject to a uniformly distributed load of intensity *q*

直接 MC 法计算结果、不同训练样本数下的 MC-ANN 法的计算结果和 ANN 计算耗时如表 1 示。从表列数据对比,可以得到如下几点计算结论:

由于采用了高效的 Levenburg-Marquardt 算法, ANN 的训练耗时十分短暂;

 2) 由少量确定性有限元计算结果训练得到的 ANN 结构即可实现对确定性有限元求解器的良好 模拟,对大量 MC 参数样本的模拟输出十分迅速(不 到 1s),对 MC 法的近似结果精度令人满意;

3) 在同一收敛精度要求下,ANN 结构的训练 迭代次数和耗时随着训练样本数据的增多而增加, 而在取 1%样本比例作为训练数据时,MC-ANN 精 度即可达到 1%左右,可满足分析要求。

表1 两端简支梁计算结果

Table 1 Numerical results of simple-supported beam

MC-ANN 法	ANN 训练样本数	100	250	500
	ANN 训练迭代次数	5	10	16
	ANN 训练耗时	0.7 s	3.1 s	18.1 s
	ANN 模拟输出耗时	0.4 s	0.4 s	0.5 s
	模拟输出均值	-3.1757E-1	-3.1793E-1	-3.1769E-1
	模拟输出标准差	3.3452E-2	3.3220E-2	3.3158E-2
直接 MC 法	均值		-3.1772E-1	
	标准差		3.3177E-2	
相对误差	均值	-0.05%	0.07%	-0.01%
	标准美	0.820/	0.120/	0.06%

算例 2:如图 4 所示四周简支方板承受均布横 向荷载 q=1,板宽 L=10,泊松比 v=0.3,厚度为一 个单位。设板材料的弹性模量 E 为二维随机场,即 E = E(1+k_el_e(x,y)) (13)

式中 $E = 10^4$, $k_e = 0.2$; $l_e(x)$ 为零均值的归一化



 $\mathbf{r}_{e}(dx, dy) = \mathbf{r}_{e}(dx)\mathbf{r}_{e}(dy) = e^{-(|dx|+|dy|)/5}$ (14)

现计算 *E* 随机场下简支方板中点 *o* 挠度的均值 和方差。



图 4 受均布荷载 q 的简支方板

Fig.4 Simply-supported square plate subject to a uniformly distributed load of intensity *q*

如图 4 示,简支方板已均分为 4 × 4=16 个有限 元单元,取随机单元网格与有限元单元网格一致, *E* 随机场采用局部平均法离散至各随机单元。MC 样本数取为 10,000 个。ANN 结构采用 $N_{16\times10\times1}$,网 络训练收敛的预定阈值 $e_E = 10^{-10} \cdot N$ 。训练前的网 络权值采用 Nguyen-Widrow 法进行初始化。

直接 MC 法计算结果、不同训练样本数下的 MC-ANN 法的计算结果和 ANN 计算耗时如表 2 示。从表列数据可得类似算例 1 的计算结论。

表 2 简支方板计算结果

Table 2 Numerical results of simple-supported square plate

	ANN 训练样本数	100	250	500
MC-ANN 法	ANN 训练迭代次数	9	14	21
	ANN 训练耗时	1.5 s	7.5 s	40.9 s
	ANN 模拟输出耗时	0.7 s	0.8 s	0.7 s
	模拟输出均值	-4.8178E-2	-4.8201E-2	-4.8235E-2
	模拟输出标准差	6.1479E-3	6.1348E-3	6.1211E-3
直接 MC 法	均值		-4.8223E-2	
	标准差		6.1238E-3	
相对误差	均值	-0.09%	0.05%	0.02%
	标准差	0.39%	0.18%	-0.04%

7 结语

MC 法作为随机结构分析的近似精确解法,其 实用性却由于极其耗时的大量确定性分析而大大 降低。实际上,所进行的确定性分析均是基于同一 结构机制之上的重复计算,对全部 MC 样本都进行 确定性分析,只不过是不断重复运行该机制,计算 过于浪费,特别是在该结构机制为复杂非线性机 制、每一次机制运行已耗时不少的情况下,全部进 行 MC 样本的计算更显得代价过大,不切实际。 ANN 结构的引入,为实现 MC 法过程中的智能计 算提供了可能,只需通过结构机制的若干次重复和 学习,即可实现 ANN 结构对该结构机制的近似模 拟,然后以 ANN 结构的快速映射取代结构机制的 运行,从而大为提高 MC 法计算效率。

综合一维和二维计算算例的数值分析结果,从 训练样本比例的计算效率、ANN 训练效率以及 MC-ANN 法的近似模拟精度等三方面进行考查可 见,取用 1%的样本比例用以确定性有限元计算, 继而训练 ANN 结构,即可实现对确定性有限元求 解器的良好近似,用于对 MC 法的近似模拟,相对 误差精度可控制在 1%左右。取用该样本比例的好 处在于:一方面可以减少确定性有限元的计算次 数,另一方面又能提高 ANN 结构的训练效率。由 于采用了高效的 Levenburg-Marquardt 训练算法, ANN 训练耗时极短,MC-ANN 法的计算耗时主要 由 1%比例的参数样本的确定性有限元计算决定。 换言之,在本文数值算例中,MC-ANN 法用以随机 结构的分析,可以将 MC 法的计算效率提高 100 倍, 是一种十分高效的随机结构近似分析方法。

在本文研究中,由于网络的输入神经元取为随 机参数变量,参数随机场离散的维数大小即决定了 网络结构的规模,也从而决定了训练样本集的规 模,最终决定了 MC-ANN 法的计算效率。对于复 杂结构情况,即有限元单元数庞大的情况,当随机 场相关尺度较大时,随机网络可较有限元网格取的 粗糙,此时本文所提的 MC-ANN 法相对于直接 MC 法具有明显的优越性。对于相关尺度较小的情况, 可考虑采用四层以上的神经网络结构,通过影响聚 类的方法缩减网络规模,最终减小训练样本数。该 部分工作将留待后续研究中进行。

参考文献:

- Hart G C, Collins J D. The treatment of randomness in finite element modeling[C]. SAE Shock and Vibrations Symposium, 1970. 2509-2519.
- [2] Hasselman T K, Hart G C. Model analysis of random structural systems[J]. Journal of Engineering Mechanics,

ASCE, 1972, 98(2): 561-586.

- [3] 刘宁, 吕泰仁. 随机有限元及其工程应用[J]. 力学进展, 1995, 25(1): 114-126.
 Liu Ning, Lu Tairen. Stochastic FEM and its applications in engineering[J]. Advances in Mechanics, 1995, 25(1): 114-126. (in Chinese)
- [4] 李杰. 随机结构系统[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
 Li Jie. Stochastic structure systems [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)
- [5] Liu W K, Belytschko T and Mani A. Random field finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(10): 1831-45.
- [6] Shinozuka M. Structural response variability[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1987; 113(6): 825-842.
- [7] Ghanem R, Spanos P D. Stochastic finite element: a spectral approach[M]. New York: Springer, 1991.
- [8] Astill C J, Nosseir S B and Shinozuka M. Impact loading on structures with random properties[J]. Journal of Structural Mechanics, ASCE, 1972, 1(1): 63-77.
- [9] Shinozuka M, Jan C M. Digital simulation of random processes and its applications[J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 25: 111-128.
- [10] Hornik K, Stinchcombe M and White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators[J]. Neural Networks, 1989, 2: 359-366.
- [11] 秦权. 随机有限元及其进展 I 随机场的离散和反

(上接 24 页)

参考文献:

[1] 李国豪,等.桥梁结构稳定与振动(修订版)[M].北京:中国铁道出版社,1996.

Li Guohao, et al. Stability and vibrations of bridge structures (revised edition) [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1996. (in Chinese)

[2] 项海帆, 刘光栋. 拱结构的稳定与振动[M]. 北京: 人 民交通出版社, 1991.

Xiang Haifan, Liu Guangdong. Stability and vibrations of arch structures [M]. Beijing: The People's Communication Publishing House, 1991. (in Chinese)

[3] 金伟良, 顾淑兴, 赵国藩. 无横撑肋拱桥横向稳定性的研究[J]. 北京: 中国公路学报, 1989, (2):42-48.

应矩的计算[J]. 工程力学, 1994, 11(4): 1-10.

Qin Quan. Progress in stochastic finite element method, part I discretization of random fields and moments of structural responses[J]. Engineering Mechanics, 1994, 11(4): 1-10. (in Chinese)

- [12] Vanmarcke E. Random Fields: Analysis and Synthesis[M]. Cambridge: MIT Press, 1983.
- [13] Zhu W Q, Ren Y J and Wu W Q. Stochastic FEM based on local averages of random vector fields[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1992, 118(3): 496-511.
- [14] Cressie NAC. Statistics for spatial data[M]. New York: Wiley, 1993.
- [15] Shinozuka M. Stochastic fields and their digital simulation[C]. Stochastic methods in structural dynamics, Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [16] Rumelhart D E, Hinton G E and Williams R J. Learning internal representations by error backpropagation[J]. Nature, 1986, 323: 533-536.
- [17] Hagan M T, Demuth H B, Beale M. Neural network design[M]. Boston: PWS, 1996.
- [18] Hagan M T, Menhaj M B. Training feedforward networks with the Marquardt algorithm[J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 1994, 5(6): 989-993.
- [19] Nguyen D, Widrow B. Improving the learning speed of 2-layer neural networks by choosing initial values of adaptive weights[C]. Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks, IEEE, 1990, 3: 21-26.

Jin Weiliang, et al. The lateral stability of tied arch bridge without bracing beams [J]. China Journal of Highway and Transport, 1989, (2):42-48. (in Chinese)

[4] 金伟良,赵国藩. X 型双肋拱系的侧倾屈曲[J]. 土木工 程学报, 1989, (2): 44-54.
Jin Weiliang, Zhao Guofan. Lateral buckling of X-type twin ribbed arch braced with transverse beams[J]. China Civil Engineering Journal, 1989, (2):44-54.

[5] L östlund. Lateral stability of bridge arches braced with transverse bars[R]. Transactions of the Royal Institute of Technology Stockholm, No.84, Sweden, 1954.