文章编号：1000-4750(2006)10-0041-04

# Winkler 地基上四边自由矩形薄板的 3 次超谐波共振与奇异性

*杨志安 [1]，李文兰 [2]，席晓燕 [1]

(1. 唐山学院唐山市结构与振动工程重点实验室, 唐山 063000；2. 天津大学图书馆 天津 300072)

摘　要：通过 Galerkin 方法，将 Winkler 地基上四边自由受横向简谐激励矩形薄板的控制微分方程转化为非线性振动方程。应用非线性振动的多尺度法，求得了系统满足 3 次超谐共振情况时的一次近似解以及对应的定常运动，并对其进行数值了计算。对 3 次超谐共振定常运动分岔响应方程进行了奇异性分析，得到了开折参数平面的转迁集和分岔图。揭示了一些新的动力学现象。

关键词：弹性地基薄板；Galerkin 方法；多尺度法；非线性振动；奇异性

中图分类号：O327　　文献标识码：A

# THREE SUPERHARMONIC RESONANCE AND SINGULARITY OF RECTANGULAR THIN PLATES WITH FOUR SIDES FREE ON WINKLER FOUNDATION

*YANG Zhi-an[1], LI Wen-lan[2], XI Xiao-yan[1]

(1. Tangshan College & Key Lab of Structure and Vibration Engineering of Tangshan, Tangshan 063000, China;

2. Library of Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** According to the Galerkin method, the control equation of rectangular thin plates with four sides free on the Winkler foundation under harmonic excitation is translated into nonlinear vibration equations. Using the method of multiple scales of the nonlinear vibration, the first approximate solutions and corresponding steady state solutions of the three superharmonic resonance of the system are obtained. Numerical calculation is carried out. Singularities of the three superharmonic resonance solution are investigated. The transition variety and bifurcation diagram of unfolding parameter plane are obtained. Some new dynamics phenomena are pointed out.

**Key words:** elastic foundation thin plane; the Galerkin method; the method of multiple scales; nonlinear vibration; singularity

薄板非线性问题控制方程是耦合的偏微分方程组，求解它们在数学上是相当困难的，对于较简单边界条件的大变形问题取得了一些结果[1~9]。但是对于弹性地基上矩形板的大变形分析，报道的结果很少[10~12]。地基板是工程中所常见的结构，由于在公路路面、机场跑道、停机场、以及建筑基础等许多工程都用到了地基板的计算分析，因此对于弹性地基板的研究对于工程建设具有非常重要的意义。下面将在 Von karman 板控制方程基础上，给出具有粘滞阻尼的 Winkler 地基上四边自由受简谐激振力矩形板非线性动力学方程，通过 Galerkin 方法得到系统的非线性振动方程，应用多尺度法研究

收稿日期：2005-01-10；修改日期：2005-05-14

作者简介：*杨志安(1963)，男，河北秦皇岛人，教授，博士后，主要从事机电耦联非线性动力学及结构与振动工程的教学与研究工作 (E-mail: yangzhian@eyou.com)；
李文兰(1964)，女，河北唐山人，副教授，博士，从事磁固体耦合动力学与情报科学；
席晓燕(1979)，女，河北张家口人，硕士，从事机械动力学研究。

系统的 3 次超谐共振问题，并对其进行数值计算。应用奇异性理论对 3 次超谐共振定常运动分岔响应方程进行奇异性分析。

## 1 Winkler 地基上四边自由矩形薄板控制方程及简化

置于 Winkler 地基上四边自由的矩形板，水平方向为 $x$ 轴，竖直方向为 $y$ 轴。考虑粘滞阻尼、横向简谐激振力作用以及惯性力的影响，在 Von karman 偏微分方程组的基础上，得到系统的控制方程：

$$\nabla^4 W+\frac{h}{D}L(W,F)+\frac{K'}{D}W+\frac{C}{D}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\rho}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\frac{P}{D}\cos\omega_1 t \tag{1}$$

$$\nabla^4 F+\frac{E}{2}L(W,W)=0 \tag{2}$$

这是非线性耦合的偏微分方程组。式中，$W(x,y,t),F(x,y,t)$ 分别为板的挠度函数和应力函数。$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ 为板的抗弯刚度，其中 $h$ 为板的厚度，$E,\upsilon$ 分别为板的弹性模量和泊松比；$K'$ 为 Winkler 地基系数；$\rho$ 为板单位面积质量；$\omega_1$ 为横向载荷的频率；$P$ 为横向激励的幅值；微分算子 $\nabla^4=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$；而非线性微分算子：

$$L(W,F)=W,xxF,yy-2W,xyF,xy+W,yyF,xx \tag{3}$$

式中，$(),xx=\dfrac{\partial^2()}{\partial x^2}$，$(),xy=\dfrac{\partial^2()}{\partial x\partial y}$，其余以此类推。

选择如下近似挠度函数：

$$W(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n w_n\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left[\cos\alpha_n x\cos\beta_n y+\left(1+\frac{\bar{a}^2}{\upsilon b^2}\right)\cos\alpha_n x+\left(1+\frac{\bar{a}^2}{\upsilon b^2}\right)\cos\beta_n y-\frac{\beta_n^2}{2\upsilon}x^2-\frac{\alpha_n^2}{2\upsilon}y^2\right] \tag{4}$$

式中，$\alpha_n=\dfrac{(4n-2)}{\bar{a}}\pi,\beta_n=\dfrac{(4n-2)}{b}\pi,\varphi_n$ 为时间变量 $t$ 的未知函数，$\bar{a}$、$b$ 分别为矩形板的长和宽。下面取式(4)中第一项作为近似挠度分析，并略去下脚标。不难验证满足弹性地基上四边自由矩形板的全部横向边界条件。进而可求出满足式(2)挠度函数 $W(x,y,t)$ 和应力函数 $F(x,y,t)$。只剩下控制方程(1)未被满足。将 $W,F$ 的表达式代入式(1)，将产生残差

$$R=\nabla^4 W+\frac{K'}{D}W-\frac{h}{D}(W,F)+\frac{C}{D}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\rho}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{p}{D}\cos\omega_1 t \tag{5}$$

可通过 Galerkin 途径式(6)建立求解方程。

$$\int_{-\frac{\bar{a}}{2}}^{+\frac{\bar{a}}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}Rw(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{6}$$

将残差式(5)代入式(6)，得到如下关于 $\varphi(t)$ 的非线性常微分方程

$$K_1\varphi(t)+K_2\varphi^3(t)+K_3\ddot{\varphi}(t)-K_4\cos\omega_1 t+K_5\dot{\varphi}(t)=0 \tag{7}$$

式(7)是受简谐激振力的 Duffing 方程。式中

$$\ddot{\varphi}(t)=\frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2},\quad \dot{\varphi}(t)=\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t};$$

$$K_1=\int_{-\frac{\bar{a}}{2}}^{+\frac{\bar{a}}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\left[\nabla^4 W(x,y)+\frac{K'}{D}W(x,y)\right]w(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$K_2=-\frac{Eh}{D}\int_{-\frac{\bar{a}}{2}}^{+\frac{\bar{a}}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}(W,xxF,yy-2W,xyF,xy+\dot{W},yyF,xx)w(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$K_3=\frac{\rho}{D}\int_{-\frac{\bar{a}}{2}}^{+\frac{\bar{a}}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}w^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$K_4=\frac{1}{D}\int_{-\frac{\bar{a}}{2}}^{+\frac{\bar{a}}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}p(x,y)w(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$K_5=\frac{C}{D}\int_{-\frac{\bar{a}}{2}}^{+\frac{\bar{a}}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}w^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

## 2 3 次超谐波共振理论分析

由以上数学模型的推导，可以得出弹性地基板的有阻尼非线性振动微分方程。因为阻尼力、非线性力与惯性力、线性力相比是小量，在它们前面冠以小参数 $\varepsilon$，上述方程可以转化为：

$$\ddot{\varphi}(t)+2\varepsilon\mu\dot{\varphi}(t)+\omega_0^2\varphi(t)+\varepsilon k\varphi^3(t)=F_1\cos\omega_1 t \tag{8}$$

式中，

$2\varepsilon\mu=k_5/k_3$，$\omega_0^2=k_1/k_3$，$\varepsilon k=k_2/k_3$，$F_1=k_4/k_3$

为研究系统的 3 次超谐波共振，引入调谐参数 $\sigma$，由下式确定

$$3\omega_1=\omega_0+\varepsilon\sigma$$

其中，$\sigma=0(1)$，将上式代入式(8)得

$$\ddot{\varphi}(t)+2\varepsilon\mu\dot{\varphi}(t)+\omega_0^2\varphi(t)+\varepsilon k\varphi^3(t)=F_1\cos\left(\frac{1}{3}\omega_0+\varepsilon\sigma\right)t \tag{9}$$

根据多尺度法[3]，研究主共振一次近似，采用两个时间尺度，设

$$\varphi(t)=\varphi_0(T_0,T_1)+\varepsilon\varphi_1(T_0,T_1) \tag{10}$$

将式(10)代入式(9)，比较 $\varepsilon$ 同次幂的系数，得到一组线性偏微分方程

$$\begin{cases}D_0^2\varphi_0+\omega_0^2\varphi_0=F_1\cos\omega_1 t\\ D_0^2\varphi_1+\omega_0^2\varphi_1=-2D_0D_1\varphi_0-2\mu D_0\varphi_0-k\varphi_0^3\end{cases} \tag{11}$$

方程组(11)中第一式的通解为

$$\varphi_0(T_0,T_1)=A(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{T}_0}+B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1\mathrm{T}_0}+cc \tag{12}$$

式中 $B=F_1/2(\omega_0^2-\omega_1^2)$，($cc$ 为共轭项)

将式(12)代入方程组(11)中第二式，得

$$\begin{aligned}&D_0^2\varphi_1+\omega_0^2\varphi_1=-2[\mathrm{j}\omega_0 D_1 A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{T}_0}-\mathrm{j}\omega_0 D_1\overline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{T}_0}]-\\&2\mu[\mathrm{j}\omega_0 A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{T}_0}-\mathrm{j}\omega_0\overline{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\mathrm{T}_0}+\mathrm{j}\omega_1 B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1\mathrm{T}_0}-\\&\mathrm{j}\omega_1\overline{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1\mathrm{T}_0}]-k[A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{T}_0}+B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1\mathrm{T}_0}+cc]^3\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&D_0^2\varphi_1+\omega_0^2\varphi_1=-[2\mathrm{j}\omega_0(D_1A+\mu A)+6kAB^2+\\&3kA^2\overline{A}]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{T}_0}-B[2\mathrm{j}\mu\omega_1+3kB^2+6kA\overline{A}]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1\mathrm{T}_0}-\\&k[A^3\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_0\mathrm{T}_0}+B^3\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_1\mathrm{T}_0}+3A^2B\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\omega_0+\omega_1)\mathrm{T}_0}+\\&3\overline{A}^2B\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1-2\omega_0)\mathrm{T}_0}+3AB^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+2\omega_1)\mathrm{T}_0}+\\&3A\overline{B}^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1-2\omega_0)\mathrm{T}_0}]+cc\end{aligned} \tag{13}$$

$cc$ 为共轭项，由式(13)得消除永年项

$$2\mathrm{j}\omega_0(D_1A+\mu A)+6kAB^2+3kA^2\overline{A}+3kB^3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma\mathrm{T}_1}=0 \tag{14}$$

令 $A(T_1)=\dfrac{a(T_1)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}$，代入式(14)

$$\begin{aligned}&2\mathrm{j}\omega_0\left(\frac{D_1a}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}+\mu\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}\right)+6k\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}B^2+\\&3k\left(\frac{a}{2}\right)^3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}+3kB^3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma\mathrm{T}_1}=0\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&2\mathrm{j}\omega_0\left(\frac{D_1a}{2}+\mu\frac{a}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}+3ka\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}B^2+\\&\frac{3ka^3}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}+3kB^3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma\mathrm{T}_1}=0\end{aligned} \tag{15}$$

令 $\sigma T_1=\beta+\sigma T_1-\beta$，代入上式，得

$$2\mathrm{j}\omega_0\left(\frac{D_1a}{2}+\mu\frac{a}{2}\right)+3kaB^2+\frac{3ka^3}{8}+3kB^3\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\sigma\mathrm{T}_1-\beta)}=0$$

令 $\phi=\sigma T_1-\beta$ 再分离实部、虚部得

$$\begin{cases}D_1a=-\mu a-\dfrac{3k}{\omega_0}B^3\sin\phi\\ aD_1\phi=\left(\sigma-\dfrac{3kB^2}{\omega_0}\right)a-\dfrac{3k}{8\omega_0}a^3-\dfrac{3kB^3}{\omega_0}\cos\phi\end{cases}$$

式中 $B=F_1/2(\omega_0^2-\omega_1^2)$

令 $D_1a=0$，$D_1\phi=0$，得确定定常解的代数方程

$$\begin{cases}\mu a=-\dfrac{3k}{\omega_0}B^3\sin\phi\\ \left(\sigma-\dfrac{3kB^2}{\omega_0}\right)a-\dfrac{3k}{8\omega_0}a^3=-\dfrac{3kB^3}{\omega_0}\cos\phi\end{cases}$$

上面两式平方后相加得，消除 $\phi$，得

$$(\mu a)^2+\left[\left(\sigma-\frac{3kB^2}{\omega_0}\right)a^2-\frac{3k}{8\omega_0}a^3\right]^2=\left(\frac{3k}{\omega_0}B^3\right)^2 \tag{16}$$

或

$$\left[\mu^2+\left(\sigma-\frac{3kB^2}{\omega_0}-\frac{3k}{8\omega_0}a^2\right)^2\right]a^2=\frac{9k^2B^6}{\omega_0^2} \tag{17}$$

式(12)即为 3 次超谐共振的幅频响应方程

以上所讨论的是系统 Duffing 项前系数为正值时的情况，此时系统方程的特性为硬刚度特性。由于系统参数的变化，实际上也存在 Duffing 项系数为负值时的情况，此时所求得的系统方程的特性为软刚度特性。将此种情况代入原方程，重新推导(推导过程与以上推导过程相同)，可得到新的幅频响应方程，即：

$$\left[\mu^2+\left(\sigma+\frac{3kB^2}{\omega_0}+\frac{3k}{8\omega_0}a^2\right)^2\right]a^2=\frac{9k^2B^6}{\omega_0^2} \tag{18}$$

用研究非线性振动的经典近似方法得到的只是系统在确定参数时的周期解。由于不同的系统中的系统参数不会完全相同，某些参数的变化有可能引起系统微分方程的结构不稳定，使振幅产生较大的变化，产生事故。下面应用奇异性理论分析系统定常解的局部分岔，得到分岔解的全部拓扑结构。以便将系统的振动控制在安全稳定的范围。以对应硬刚度特性的幅频响应方程式(17)为例分析说明。

由式(17)，得：

$$R(a,\lambda,\upsilon_1,\upsilon_2)=[(a^2-\lambda)^2+v_1]a^2+v_2=0 \tag{19}$$

式中

$$\lambda=24B^2-\frac{8\omega_0\sigma}{3k}\text{，}\quad v_1=\frac{8\omega_0^2\mu^2}{3k^2}\text{，}\quad v_2=-\frac{24kB^6}{3k} \tag{20}$$

取 $\lambda$ 为分岔参数，与系统调谐参数有关，反映系统调谐参数变化会引起 3 次超谐共振振幅发生变化。$v_1$、$v_2$ 为开折参数，应用奇异性理论[13]，导出 $v_1$、$v_2$ 平面上的转迁集为：

(1) 分岔集 $B=\{v_2=0,v_1\le 0\}$

(2) 滞后集 $H=\left\{v_1=\dfrac{3}{4}v_2^{3/2},v_2\le 0\right\}$

(3) 双极限集 $D=\Phi$ (空集)

转迁集 $\sum = B \cup H \cup D$

转迁集 $\sum$ 将开折参数平面 $\nu_1 - \nu_2$ 划分成 5 个区域，如图 1 所示。在不同的区域中，代表幅频响应曲线解的拓扑结构是不同的。只要系统参数选在区域(1)，就不会出现跳跃和滞后现象。对于文中系统物理参数取值范围为图 2 中区域(1)和区域(2)。

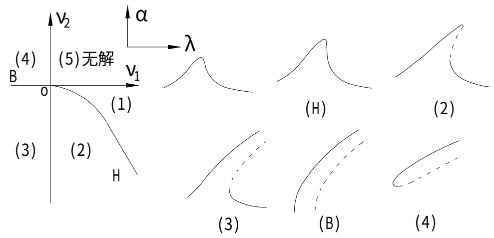


图 1 参数开折参数平面转迁集分岔图

Fig.1 The transition variety and bifurcation diagram of unfolding parameter plane

## 3 3 次超谐波共振数值分析

按式(17)或式(18)可应用 Matlab 语言[14]计算度系统 3 次超谐波共振硬特性或软特性两种情况下的响应曲线。计算中，如无特殊声明，Winkler 地基上矩形板的取值为：

$$\bar{a} = b = 4\text{m},\ \rho = 42.3\text{kg}\cdot\text{S}^2/\text{m}^2,$$

$$p = 2\text{N}, E = 3.5\times10^6\,\text{t/m}^2,\ \upsilon = 0.15, h = 0.3\text{m}$$

图 2 和图 3 分别为硬软刚度系统 3 种阻尼情况下的幅频响应曲线，图中调谐值 $\sigma = 2\text{rad/s}$，在调谐值一定的情况下，从数值计算结果图 2 和图 3 发现幅频响应曲线具有两种拓扑结构，存在跳跃和滞后现象，图中两种不同拓扑结构曲线所取物理参数值对应图 1 中区域(1)和区域(2)。此结果与奇异性分析结果一致。

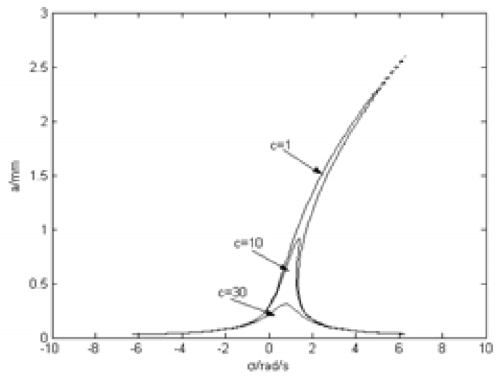


图 2 硬刚度系统幅频响应

Fig.2 Amplitude-frequency response curves of hard stiffness system

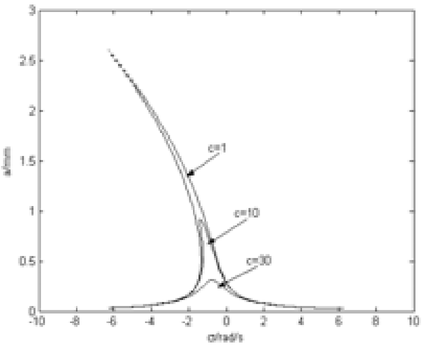


图 3 软刚度系统幅频响应

Fig.3 Amplitude-frequency response curves of soft stiffness system

## 4 结论

(1) 系统 3 次超谐波共振幅频响应曲线均具有跳跃和滞后现象。

(2) 随着阻尼值的增大，系统的共振幅值减小，说明阻尼对共振振幅具有抑制作用。

(3) 对系统定常响应方程进行了奇异性分析，给出了开折参数平面的转迁集和分岔图，奇异性理论分析结果与数值结果吻合。同时为系统 3 次超谐波共振响应曲线跳跃和滞后现象的控制提供了理论依据。

参考文献：

[1] Sathyamoorthy M. Nonlinear vibration of plates review [J]. Shock Vib. Digest, 1983, 15: 3~16.

[2] Zhang Wei, Liu Zhaomiao. Global dynamics of parametrically and externally excited rectangular thin plates [J]. Nonlinear Dynamics, 2001, 24: 245~268.

[3] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations [M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.

[4] 付宝连. 弯曲薄板功的互等新理论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
Fu Baolian. New theory of bending thin plate [M]. Beijing: Science Press,2002. (in Chinese)

[5] 曲庆章, 章权, 季求知, 梁兴复. 弹性板理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 1999.
Qu Qingzhang, Zhang Quan, Ji Qiuzhi, Liang Xingfu. Theory of elastic plates [M]. Beijing: Press of People Traffic, 1999. (in Chinese)

[6] 韩强, 杨桂通. 非线性大挠度矩形板中内共振导致的分叉[J]. 固体力学学报, 2001, 22(2): 199~204.
Han Qiang, Yang Guitong. Bifurcation analysis of a nonlinear rectangular plate with large deflection [J]. Acta Mechanica Solida Sinlica, 2001, 22(2): 199~204. (in Chinese)

(参考文献[7]~[14]转第 29 页)

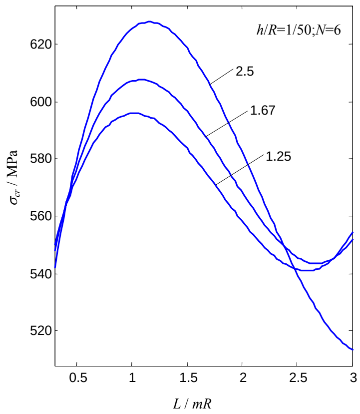


图 4　材料弹性模量比对弹塑性临界应力的影响

Fig.4　The effect of the ratio of Young's moduli on critical stress

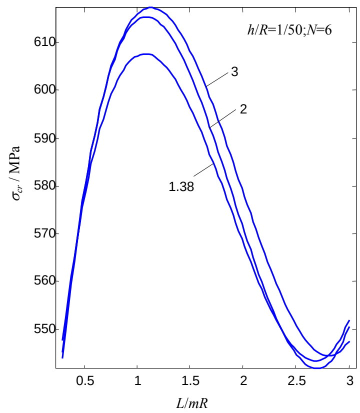


图 5　材料屈服极限比对弹塑性临界应力的影响

Fig.5　The effect of the ratio of yield limits on critical stress

(3) 为了与文献[7]进行比较，对钢制圆柱壳进行计算。令 $h/R=1/50$，且 $E_1=E_2=210\text{GPa}$，$G_{12}=80\text{GPa}$，$\Sigma_{11}=\Sigma_{22}=240\text{MPa}$，$\Sigma_{12}=120\text{MPa}$，$\nu=0.3$，$\eta=240\text{MPa}$，$t=0.22$，当 $x=L/mR=1.0$，$n=6$ 时,本文的计算结果为 $\sigma_{cr}=265.3\text{MPa}$；而按文献[7]的公式计算结果为 $\sigma_{cr}=256.5\text{MPa}$，二者十分吻合。

## 参考文献：


[1] Hill R. A theory of the yielding and flow of anisotropic metals [J]. Proc Roy Soc (London), Ser A, 1948, 193(A1033): 281~297.

[2] Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic/plastic solids [J]. J Mech. Phys Solids, 1958, 7(2): 209~225.

[3] 刘腾喜，黄世清，傅衣铭. 正交各向异性薄板的弹塑性屈曲分析[J]. 力学季刊, 2002, 23(4): 552~557.
Liu Tengxi, Huang Shiqing, Fu Yiming. Elastio-plastic buckling analysis for orthotropic plate [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2002, 23(4): 552~557. (in Chinese)

[4] Nguyen S Q, Triantafyllidis N. Plastic bifurcation and post-bifurcation analysis for generalized standard continua [J]. J Mech. Phys Solids, 1989, 37(5): 545~556.

[5] Timoshenko S. Theory of elastic stability [M]. Mc Graw-Hill, 1936.

[6] 陈铁云，沈惠申. 结构的屈曲[M]. 上海：上海科学技术出版社, 1993.
Chen Tieyun, Shen Huishen. Buckling of structures [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1993. (in Chinese)

[7] 黎绍敏. 稳定理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 1989.
Li Shaomin. Theory of stability [M]. Beijing: Transportation Press, 1989. (in Chinese)

[8] Hill R. The mathematical theory of plasticity [M]. London: Oxford, 1950.

[9] Shanley F R. Inelastic column theory [J]. JAS, 1847, 14(5): 261~268.

[10] Hutchinson J W. Plastic buckling [J]. Advances in Applied Mechanics, 1974, 14: 67~141.


(上接第 44 页)


[7] 邱平，王新志.非线性弹性地基上的圆薄板的分岔与混沌问题 [J]. 应用数学和力学, 2003, 24(8): 779~784.
Qiu Ping, Wang Xinzhi. Bifucation and chaos problems of thin circular plates on nonlinear elastic foundation [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(8): 779~784. (in Chinese)

[8] 袁尚平，张惠桥，王冰，杨倩莉.参数激励下简支板的分岔与混沌 [J]. 太原重型机械学院学报，1997，18(2): 133~139.
Yuan Shangping, Zhang Huiqiao, Wang Bing, Yang Qianli. Bifurcation and chaos of hinged plates under parameter excitement [J]. Journal of Taiyuan Heavy Machinery Institute, 1997, 18(2): 133~139. (in Chinese)

[9] 曲庆章，梁兴复．弹性地基上自由矩形板的非线性动静态分析 [J]. 工程力学, 1996, 13(3): 40~46.
Qu Qingzhang, Liang Xingfu. Nonlinear analysis of free rectangular plate on elastic foundation [J]. Engineering Mechanics, 1996, 13(3): 40~46. (in Chinese)

[10] Ajiendar N. Large amplitude vibrations of plates on elastic foundation [J]. Int J Nonlinear Mech, 1967, 2(1): 163~ 168.

[11] Ath. Large amplitude response of circular plate on elastic foundation [J]. Int J Nonlinear Mech, 1982, 17(4): 285~296.

[12] Dumir P C. Nonlinear vibration and postbucking of isotropic thin circular plate on elastic foundation [J]. Journal of sound and vibration, 1986, 107(2): 253~263.

[13] Golubisky M, Schaeffer D G. Singlarities and groups in bifurcation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1985

[14] 陈怀琛. Matlab 及其在理工课程中的应用指南[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2000.
Chen Huaichen. Matlab and application in subjects of science and technology [M]. Xi'an: Unibersity of Electric Science and Technology of Xi'an Press, 2000. (in Chinese)