

饱和地基上刚性圆板的扭转振动

陈龙珠¹, 王国才²

(1. 上海交通大学建工与力学学院, 上海 200030; 2. 浙江大学建筑工程学院, 杭州 310027)

摘 要: 用解析的方法首次研究了饱和地基上刚性圆板的扭转振动特性。首先运用 Hankel 变换求解饱和介质动力问题的控制方程, 然后按混合边值条件建立了饱和地基上刚性圆板扭转振动的对偶积分方程, 并把对偶积分方程化为第二类 Fredholm 积分方程。文末数值算例给出了动力柔度系数和扭转角幅值随无量纲频率的变化曲线, 并与单相弹性介质情况进行了对比分析。数值结果表明: 与经典的弹性介质上基础的振动特性相比, 水相的存在对饱和地基上刚性圆板的扭转振动特性有一定的影响, 且在共振频率附近可以减弱其振动, 当土体渗透性较好时更是如此。

关键词: 饱和地基; 扭转振动; Hankel 变换; 第二类 Fredholm 积分方程; 动力柔度系数

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A

1 引言

饱和地基上基础与板的相互作用问题是一个复杂的动力接触问题, 同时也是地球物理学、地震工程、环境工程及岩土工程中的重要研究课题。近几十年来有许多学者在这方面进行了大量的研究工作, 取得了相当丰硕的成果。Awojobi 采用指数函数近似双曲正切函数得到了无限弹性层状半空间上刚性圆板的扭转振动半解析解^[1]。Reissner 和 Sagoci 采用扁球坐标系分析了弹性半空间上基础的扭转振动^[2]。Iguchi 和 Luco 分析研究了层状粘弹性半空间含刚核的弹性圆板竖向、摇摆振动时的动力响应^[3]。Philippacopoulos 探讨了上层为单相弹性层、下层为两相多孔饱和半空间上刚性圆板的垂直振动问题^[4]。Kassir, Xu 和 Bandyopadhyay 研究了饱和弹性半空间上刚性圆板的摇摆、水平振动特性^[5]。Bougacha 等采用有限元法计算了层状饱和地基上刚性条形和圆形基础振动的静、动阻抗^[6]。

在国内, 饱和地基上基础与板的动力响应问题近年来也受到了人们的关注。吴世明和陈龙珠考虑固液两相之间的惯性耦合效应, 提出了一组实用的

饱和土波动方程^[7]。陈胜立在此波动方程的基础上, 成功地解析求解了饱和地基上刚性、弹性及含刚核的弹性圆板的竖向振动^[8]。金波从 Biot 波动方程出发, 利用 Hankel 变换和 Abel 变换研究了圆柱形刚体在饱和半空间上的竖向振动^[9]。本文在文献^[7]提出的饱和土波动方程的基础上, 用解析的方法研究了饱和地基上刚性圆板的扭转振动问题。文中采用 Hankel 变换求解饱和介质动力问题的控制方程, 然后按混合边值条件建立了饱和地基上刚性圆板扭转振动时的对偶积分方程, 并把对偶积分方程化为第二类 Fredholm 积分方程。文末用算例具体研究动力柔度系数和扭转角幅值曲线, 并与经典单相弹性介质情况进行了对比分析。

2 基本控制方程及其求解

根据文献^[7]的分析, 饱和土在不考虑固液相之间惯性耦合效应时的基本运动方程为

$$\mu \nabla^2 \mathbf{W} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{W}) + \text{grad} P_w = \rho_1 \ddot{\mathbf{U}} + \rho_2 \ddot{\mathbf{W}} \quad (1)$$

$$\text{grad} P_w + b(\dot{\mathbf{W}} - \dot{\mathbf{U}}) = \rho_1 \ddot{\mathbf{U}} \quad (2)$$

收稿日期: 2001-07-08; 修改日期: 2002-03-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50079027)

作者简介: 陈龙珠(1962), 男, 安徽枞阳人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事土的波动与基础振动理论、结构与地基加固技术、工程检测技术与防灾减灾科学研究与教学等

王国才(1971), 男, 安徽天长人, 博士生, 主要从事土动力学研究

$$n \operatorname{div} \dot{\mathbf{U}} + (1-n) \operatorname{div} \dot{\mathbf{W}} - \frac{n}{E_w} \dot{P}_w = 0 \quad (3)$$

这里, $\mathbf{W}$ 是土骨架的位移矢量, $\mathbf{U}$ 是水相的位移矢量, n 为土骨架的孔隙率, P_w 和 E_w 分别为孔隙水压力 and 水的体变模量, λ 、 μ 是土骨架的 Lamé 常数。 $\rho_1 = n\rho_w$, $\rho_2 = (1-n)\rho_s$; $b = n\rho_w g/k$, 其中 ρ_w 、 ρ_s 分别为水和土颗粒的质量密度, g 为重力加速度, k 为土体的渗透系数。

在如图 1 所示的圆柱坐标系下, 结合所研究问题的对称性并假设所有运动都是简谐运动(圆频率为 ω), 则土骨架和水相的切向位移分别为 $w_\theta e^{i\alpha x}$ 、 $u_\theta e^{i\alpha x}$, 而其余位移分量皆为零。这样, 式(1)~(3)可进一步化为

$$\mu(\nabla^2 - \frac{1}{r^2})w_\theta = -(\rho_w \omega^2 v_\theta + \rho \omega^2 w_\theta) \quad (4)$$

$$-\frac{ib\omega}{n}v_\theta = -(\rho_w \omega^2 v_\theta + \rho_1 \omega^2 w_\theta) \quad (5)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad v_\theta = n(u_\theta - w_\theta)$$

为水相相对于土颗粒的切向位移。为书写简便起见, 这里及下面的推导过程中, 省略了因子 $e^{i\alpha x}$ 。

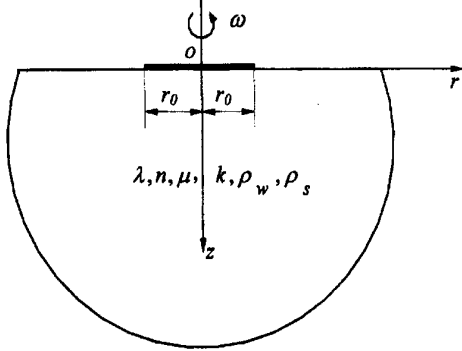


图 1 饱和地基力学模型

Fig.1 The mechanical model of saturated media
土骨架的应力—应变关系可表示为

$$\tau_{z\theta} = \mu \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \right) \quad (7)$$

为了便于分析, 引入无量纲参数和变量:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{z} = \frac{z}{r_0}, \quad \bar{w}_\theta = \frac{w_\theta}{r_0}, \quad \bar{v}_\theta = \frac{v_\theta}{r_0},$$

$$\bar{\rho}_w = \frac{\rho_w}{\rho}, \quad \bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad a = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} r_0 \omega,$$

$$\bar{b} = \frac{r_0}{\sqrt{\rho \mu}} b, \quad \bar{\tau}_{z\theta} = \frac{\tau_{z\theta}}{\mu}, \quad \bar{\tau}_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{\mu}$$

这里 r_0 是圆柱形刚性基础的半径。

引入无量纲量后, 式(4)~(7)可化为

$$(\nabla^2 - \frac{1}{\bar{r}^2})\bar{w}_\theta = -(\bar{\rho}_w a^2 \bar{v}_\theta + a^2 \bar{w}_\theta) \quad (8)$$

$$\frac{ib a}{n} \bar{v}_\theta = \bar{\rho}_w a^2 \bar{v}_\theta + \bar{\rho}_1 a^2 \bar{w}_\theta \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_{z\theta} = \frac{\partial \bar{w}_\theta}{\partial \bar{z}} \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \left(\frac{\partial \bar{w}_\theta}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{w}_\theta}{\bar{r}} \right) \quad (11)$$

记

$$f^1(p, z) = \int_0^\infty r f(r, z) J_1(pr) dr$$

为 $f(r, z)$ 的一阶 Hankel 变换, 其逆变换为

$$f(r, z) = \int_0^\infty p f^1(p, z) J_1(pr) dp$$

其中 $J_\nu(z)$ 为 ν 阶第一类 Bessel 函数。

对式(8)~(10)进行一阶 Hankel 变换, 得

$$-p^2 \bar{w}_\theta + \frac{d^2}{d\bar{z}^2} \bar{w}_\theta = -\bar{\rho}_w a^2 \bar{v}_\theta - a^2 \bar{w}_\theta \quad (12.1)$$

$$\frac{ib a}{n} \bar{v}_\theta = \bar{\rho}_w a^2 \bar{v}_\theta + \bar{\rho}_1 a^2 \bar{w}_\theta \quad (12.2)$$

$$\bar{\tau}_{z\theta} = \frac{d}{d\bar{z}} \bar{w}_\theta \quad (13)$$

考虑到波的辐射条件后, 解常微分方程(12),

得

$$\bar{w}_\theta = A e^{-j\bar{z}} \quad (14)$$

$$\bar{v}_\theta = \frac{n \bar{\rho}_1 a}{ib - \bar{\rho}_1 a} A e^{-j\bar{z}} \quad (15)$$

其中

$$j^2 = p^2 - s^2, \quad s^2 = \left(\frac{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 a^3}{ib} - a^2 \right) / \left(\frac{\bar{\rho}_1 a}{ib} - 1 \right)$$

s 对应于 S 波的无量纲复波数, A 为与 p 有关的任意函数。

将式(14)代入式(13), 得

$$\bar{\tau}_{z\theta} = -A j e^{-j\bar{z}} \quad (16)$$

至此, 只要我们能确定积分常数 A , 就可求出 w_θ 、 v_θ 、 $\tau_{r\theta}$ 、 $\tau_{z\theta}$ 的 Hankel 变换解, 进一步就可求出饱和地基的扭转动力响应。

3 刚体扭转振动的积分方程

饱和地基上基础的扭转振动在弹性力学中属于混合边值问题, 假设基础与半空间完全粘着接触, 即接触面上无相对位移, 基础与半空间完全粘结在一起, 则半空间表面无量纲化后的边界条件为

$$\bar{w}_q(\bar{r}, 0) = \bar{r}f \quad (0 \leq \bar{r} \leq 1) \quad (17)$$

$$\bar{t}_{zq}(\bar{r}, 0) = 0 \quad (\bar{r} > 1) \quad (18)$$

式中, $\bar{f}$ 为基础扭转振动的角位移振幅。

根据式(14)~(18), 可建立如下的对偶积分方程

$$\int_0^{\infty} p A J_1(p \bar{r}) d p = \bar{r} f \quad (0 \leq \bar{r} \leq 1) \quad (19.1)$$

$$\int_0^{\infty} p A J_1(p \bar{r}) d p = 0 \quad (\bar{r} > 1) \quad (19.2)$$

设

$$p j A(p) = \frac{4}{p} p f \int_0^1 q(t) \sin(pt) dt \quad (20)$$

将式(20)代入式(19.1)、(19.2), 可得如下第二类 Fredholm 积分方程

$$q(t) + \frac{2}{p} \int_0^1 q(t) K(t, t) dt = t \quad (21)$$

其中

$$K(t, t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{p}{j} - 1 \right) \sin(pt) \sin(pt) dp$$

设作用在圆柱形刚性基础的扭矩为 T (无量纲后为 $\bar{T} = \frac{T}{m r_0^3}$), 则由基础的动力平衡条件可写出

$$\bar{T} = - \int_0^{2p} d q \int_0^1 \bar{t}_{zq}(\bar{r}, 0) \bar{r}^2 d \bar{r} = -2p \int_0^1 \bar{r}^2 \bar{t}_{zq} d \bar{r} \quad (22)$$

将式(16)进行一阶 Hankel 逆变换后, 代入式(22), 并考虑式(20), 得

$$\bar{T} = \frac{16f}{3} \cdot 3 \int_0^1 t q(t) dt \quad (23)$$

故饱和地基上刚性基础扭转振动的无量纲柔度系数为

$$C_T = \frac{1}{3 \int_0^1 t q(t) dt} \quad (24)$$

记 $f_1 = \text{Re}[C_T]$, $f_2 = \text{Im}[C_T]$, 基础的质量惯性矩为 I_q (无量纲化后为 $\bar{I}_q = \frac{I_q}{r r_0^5}$), 则基础扭转振动时

的等效扭转刚度 $K_q = m r_0^3 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}$, 等效阻尼

$C_T = -\sqrt{r m r_0^4} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2}$ 。根据初等的振动分析法^[12],

可得到圆形刚性基础扭转振动的角位移幅值为

$$A_T = \frac{T}{m r_0^3} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - \bar{I}_q a^2 f_1)^2 + (\bar{I}_q a^2 f_2)^2}} \quad (25)$$

如果在上述推导过程中令 $r_w = 0$, 即不考虑水相的影响, 则问题将退化为单相弹性半空间的动力问题, 对此 Robertson^[10]等已作了研究。

4 算例

由式(21)求出第二类 Fredholm 积分方程的解 $q(t)$ 后, 就可计算出刚性圆板扭转振动时的动力柔度系数 C_T , 从而可进一步分析其动力响应。考虑到工程实际情况, 这里选取了饱和砂性土与饱和粘性土两组典型地基模型作为算例, 它们的物理力学参数见表 1。

表 1 饱和地基参数

Table 1 The parameters of saturated grounds

地基类别	剪切模量 m (Pa)	渗透系数 k (m.s ⁻¹)	孔隙率 n	土颗粒密度 r_s (kg.m ⁻³)
饱和砂性土	1.83 $\cdot 10^8$	$>10^{-4}$	0.35	2650
饱和粘性土	1.94 $\cdot 10^7$	$10^{-6} \sim 10^{-10}$	0.55	2700

式(21)的求解关键在于核函数 $K(t, t)$ 的求解。

因当 p 很大时核函数 $K(t, t)$ 是一个高振荡型积分函数, 因此在计算核函数时, 采用了 Filon 积分法, 而式(21)的求解则采用了梯形积分法。

取机器转速不大于 1000/rpm, 基础半径 $1\text{m} \leq r_0 \leq 5\text{m}$, 基础的无量纲质量惯性矩 $\bar{I}_q = 2.0$ 、10.0。对表 1 中的参数无量纲化后, 我们分别对砂性土取 $\bar{b} = 0.2$ 、10 和 300, 粘性土取 $\bar{b} = 3 \times 10^4$ 、 5×10^6 并计算了饱和地基的动柔度和扭转角幅值, 其结果如图 2~图 5 所示。为了与单相弹性介质情况进行比较, 我们还计算了单相弹性半空间的基础振动, 其物理力学参数取值与对应的饱和土土骨架的相同。为了便于总结出单相弹性介质与饱和地基振动特性的规律性, 对单相弹性介质情况, 图中的横坐标已关于土骨架参数作了归一化处理, 即横坐标对应于 $\sqrt{r/r_s} a$ 。

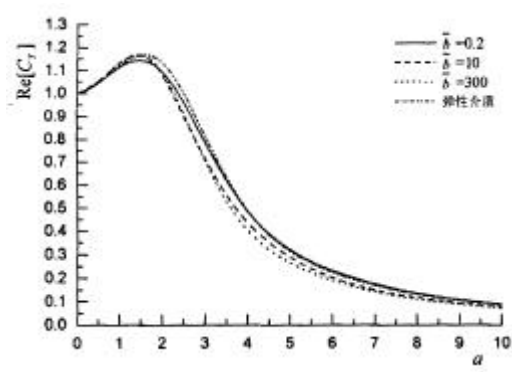
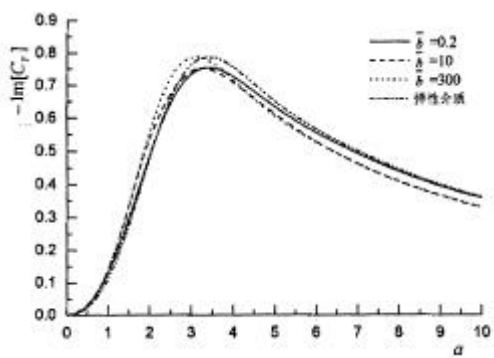
(a) $\text{Re}[C_T]$ (b) $\text{Im}[C_T]$

图 2 饱和砂性土的无量纲动柔度

Fig.2 The dynamic compliance coefficients versus dimensionless frequency for saturated sands

由图 2 可见,当 $\bar{b}$ 较小时, C_T 的实部和虚部在振动频率较小时小于单相弹性半空间的情况,而当振动频率较大时则大于单相弹性半空间;随着 $\bar{b}$ 的增大, C_T 的实部和虚部在中频段(指峰值周围)与单相弹性半空间有一定的差异,而当振动频率较小和较大时,其 C_T 曲线与单相弹性半空间的颇为接近。由图 3 可看出,饱和粘性地基的 C_T 曲线与单相弹性半空间情况差异较大,尤其是在中频段。 C_T 的实部和虚部分别反映基础的刚度和阻尼,其对基础振动的综合影响可从图 4 和图 5 反映出来。

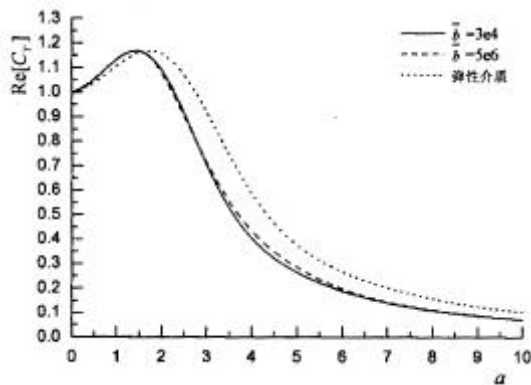
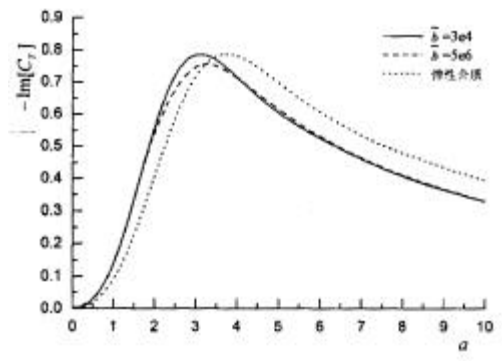
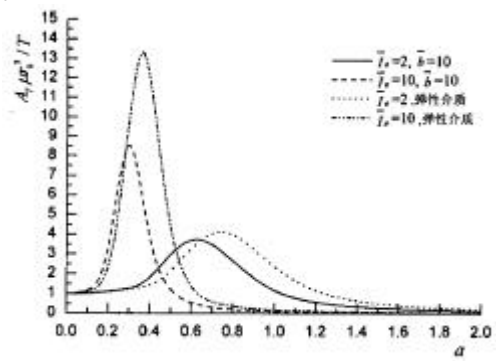
(a) $\text{Re}[C_T]$ (b) $\text{Im}[C_T]$

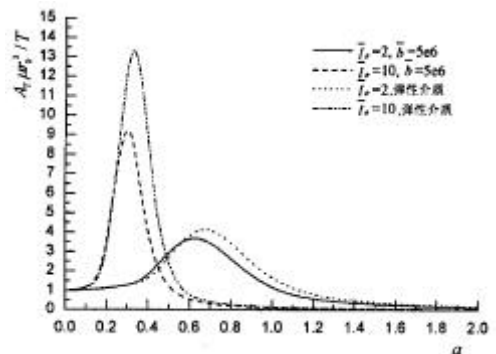
图 3 饱和粘性土的无量纲动柔度

Fig.3 The dynamic compliance coefficients versus dimensionless frequency for saturated cohesive soils

图 4 是用式(25)计算出来的,而图 5 是根据图 4 在不同的 $\bar{I}_q$ 下对应不同的峰值绘制而得。从图 4 和图 5 可看出,在一定的 $\bar{I}_q$ 下,无论是饱和砂性土地基还是饱和粘性土地基,在峰值附近的振动频率下,基础扭转角幅值均较单相弹性介质情况的为小;而当振动频率较高时,则这种差异将逐渐减小。当 $\bar{b}$ 一定时,饱和地基上基础的共振频率和扭转角幅值随 $\bar{I}_q$ 的变化趋势与单相弹性半空间理论的相类似。



(a) 饱和砂性土地基



(b) 饱和粘性土地基

图 4 基础扭转角幅值随无量纲频率的变化曲线

Fig.4 Variation of the torsional angle amplitude of foundation against dimensionless frequency

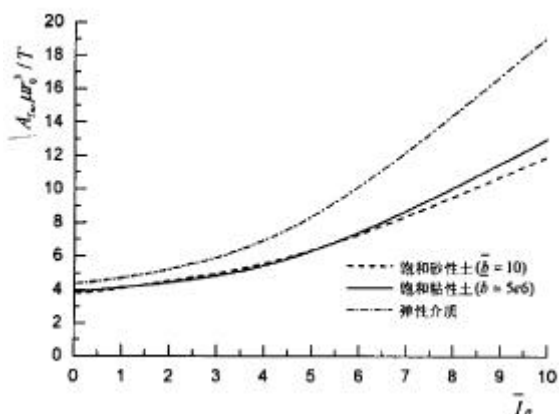


图 5 基础扭转角峰值与无量纲质量惯性矩的变化曲线

Fig.5 The peak value of foundation's torsional angle versus the dimensionless mass moment of inertia

从以上分析可看出,在低频和中频下,无论是饱和砂性土还是饱和粘性土,其振动特性均受孔隙水的影响,尤其是土体的渗透性较好时,其影响更大,不能忽略不计;但当振动频率较高时,其影响就变得很小了。

5 结语

通过本文的理论研究,对饱和地基上刚性圆板的扭转振动特性可得出如下的结论:

(1) 不论是饱和砂性土还是饱和粘性土,其振动特性曲线的变化形状与经典单相弹性地基情况相同。

(2) 饱和地基上刚性圆板的扭转振动是一种非耦合振动,土体渗透性对其振动特性有一定的影响,在渗透性较好的情况下更是如此。在中频条件下,孔隙水的存在使得其振幅会明显降低。

(3) 从本文的分析结果来看,饱和地基上基础的振动特性与经典的弹性介质理论有较大的差异。因此,在今后的工程设计中应加以考虑。

参考文献:

- [1] A O Awojobi. Torsional vibration of a rigid circular body on an infinite elastic stratum[J]. Int. J. Solids Structure, 1969, 5:369-378.
- [2] E Reissner and H F Sagoci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space[J]. Journal of Applied Physics, 1944, 15: 652-654.
- [3] M Iguchi and J E Luco. Vibration of flexible plate on viscoelastic medium[J]. J. Engineering Mechanics, ASCE,

1982, 108(6):1103-1120.

- [4] A J Philippacopoulos. Axisymmetric vibration of disk on saturated layered half-space[J]. J. Eng. Mech. ASCE, 1989, 115(10):2301-2322.
- [5] M K Kassir, K Xu and K Bandyopadhyay. Rotatory and horizontal vibrations of a circular surface footing on a saturated elastic half-space[J]. Int. J. Solids Structures, 1996, 32(2):265-281.
- [6] S Bougacha, J M Roësset and J L Tassoulas. Dynamic stiffness of foundations on fluid-filled poroelastic stratum[J]. Journal of Engineering Mechanics. 1993, 119(8): 1649-1662.
- [7] Shiming Wu, Longzhu Chen. Dispersion characteristics of elastic waves in saturated soils[C]. Proceedings of Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, 1991(II): 1409-1414.
- [8] 陈胜立. 饱和地基上基础与板的竖向振动特性研究[D]. 浙江大学博士学位论文, 2000.
Chen Shengli. Vertical vibrations of Foundations on Saturated Ground [D]. Doctor Dissertation of Zhejiang University, 2000.
- [9] 金波, 徐植信. 多孔饱和半空间上弹性圆板的动力分析[J]. 固体力学学报, 1998, 19(2):113-119.
Jin Bo, Xu Zhixin. Dynamic analysis of elastic circular plate on fluid-saturated porous half space[J]. Acta Mechanica Sinica Sinica, 1998,19(2):113-119.
- [10] I A Robertson. On a proposed determination of the shear modulus of an isotropic elastic half-space by the forced torsional oscillations of a circular disk[J]. Appl. Sci. Res, 1967, 17:305-312.
- [11] 陈龙珠, 陈胜立. 饱和地基上刚性基础的竖向振动分析[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4):392-397.
Chen Longzhu, Chen Shengli. Vertical Vibration of a Rigid Circular Footing on Saturated Soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(4):392-397.
- [12] 严人觉, 王贻荪, 韩清宇. 动力基础半空间理论概论[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 1981.
Yan Renjue, Wang Yisun, Han Qingyu. Treatise on the theory of dynamic foundation on the half space[M]. Beijing: China Building Industry Press, 1981.

TORSIONAL OSCILLATIONS OF A RIGID DISC ON SATURATED POROELASTIC GROUND

CHEN Long-zhu¹, WANG Guo-cai²

(1. School of Civil Engineering & Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030;

2. School of Civil Engineering & Architecture, Zhejiang University, Hangzhou, 310027)

Abstract: Characteristics of torsional oscillations of a rigid disc on saturated poroelastic grounds are studied by analytical method for the first time. The dynamic governing equations for saturated poroelastic media are solved by means of Hankel transform. According to the mixed boundary-value conditions, the dual integral equations of torsional oscillations of a rigid disc resting on saturated poroelastic ground are established, which are further reduced to Fredholm integral equations of the second kind. The dynamic compliance coefficient curves and the torsional angle amplitude of a rigid disc versus the dimensionless frequency are presented. Numerical results indicate that, compared with the dynamic response of a rigid disc bearing on elastic half space, the presence of pore water has some effects on the characteristics of torsional oscillations of a rigid disc resting on saturated media and can reduce the dynamic response around the resonant frequency, especially when the soil permeability is very good.

Key words: saturated poroelastic ground; torsional oscillation; Hankel transform; Fredholm integral equations of second kind; dynamical compliance coefficient

(上接 130 页)

SEISMIC CONTROL OF STRUCTURE WITH MULTIPLE TUNED MASS DAMPER SYSTEM

LIU Bao-dong, ZHU Xi

(College of Civil Engineering and Architecture, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract: The multiple tuned mass dampers (MTMD) consist of a group of single tuned mass damper (STMD) and the frequencies of the STMD group are distributed around the frequency of the controlled mode of the structure. The MTMD can overcome the disadvantage of instability of the control effect of the STMD and can enlarge the controllable frequency range of the STMD. The characteristics of frequency response of the multiple degrees structures with appending MTMD are studied. The time-history responses of the MTMD system excited by seismic waves under different site conditions are calculated. The theoretic analysis and simulating results show that the MTMD system can enlarge the applicable scope of seismic control of the STMD system and enhance the robustness of the control effect. It is concluded that the design of the MTMD system must take into consideration of the influence of the site conditions and the optimal selection of the parameters of the MTMD system must take into consideration of the specific conditions of the structure.

Key words: aseismic design; structural vibration control; tuned mass damper; multiple tuned mass dampers