

文章编号：1000-4750(2003)05-0200-04

涡激振动问题的有限元计算研究

李 立¹, 廖锦翔²

(1. 北京建达道桥咨询公司, 北京 100101; 2. 北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要：研究涡激振动的有限元计算。应用条带假设和在锁定响应时涡激作用力的 Scanlan 第二经验模型可以实现涡激作用力在时间和空间上的离散化；由于涡脱落激励中复杂的结构与尾流相互作用，使振动方程具有非线性的时间与频率混合项，为此本文推导了时频域混合变换的 AFT 方法计算涡激振动的时程响应。与传统的连续模型和随机振动理论计算涡激响应方法相比，具有更高的适应性。

关键词：有限元；涡激振动；锁定；Scanlan 涡激力模型；AFT 法

中图分类号：TU318, TB115 **文献标识码：**A

ANALYSIS OF VORTEX-INDUCED VIBRATIONS BY FINITE ELEMENT METHOD

LI Li¹, LIAO Jin-xiang²

(1. Beijing Jianda Road and Bridge Consulting Company, Beijing 100101, China;

2. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University 100871, China)

Abstract: This paper studies the computation of vortex-induced responses by finite element models. The strip hypothesis in conjunction with the second Scanlan's vortex shedding half-empirical and half-analytical model are employed to discretize the vortex-excitation force in both time and space. An Alternating Time Frequency (AFT) domain method is developed to solve the assembled equations of motion in order to account for the mixed non-linear time-frequency terms that are evoked by the complex wake-structure interaction process in vortex-shedding excitations. The proposed approach is shown to be more flexible than the traditional methods adopting continuous models or stochastic approaches.

Key words: finite element; vortex-induced vibration; lock-in; Scanlan's vortex shedding model; AFT method

1 引言

在许多工程问题中需要考虑钝体断面尾流中涡脱落产生的涡激振动。在某个临界雷诺数下风与钝体断面的非线性相互作用产生尾流中有规则的涡的脱落，当脱落频率接近结构的某一阶自振频率时产生所谓的锁定(同期)现象^[1]，此时结构将以较大的振幅振动，引起结构的疲劳并影响结构使用舒适性。

连续模型和随机振动理论是传统上计算涡激振动的常用方法，但只能计算锁定区的最大响应，并要求结构各模态能很好分离^[2]。Ehsan 等采用涡振的 Scanlan 第一模型和桥梁等结构的连续模型推导了一个简单的单一振型的涡振振幅计算方法^[3]，R.Lewandowski 采用 Scanlan 第一涡振模型和有限元模型，用谐波平衡法求解同期最大反应^[4]。与抖振问题计算的思路类似，时程的计算可以有更高的适应性。Barhoush 与 Namini 等人提议用与抖振问

收稿日期：2002-05-15；修改日期：2002-07-12

作者简介：李 立(1973)，男，安徽合肥人，博士生，从事桥梁风致振动计算研究；

廖锦翔(1974)，男，四川人，博士生，从事桥梁结构动力分析及桥梁评估研究

题类似的思路作时域积分的涡振时程计算^[5], 并给出了计算方程和程序的设想。

涡振的时程计算与抖振时程计算相比有其特点, 简单的抖振计算是线性计算, 而涡振中即使不考虑结构非线性, 也存在一个频域的非线性自限项, 最简单的涡振响应计算也是一个非线性问题。本文采用时频率混合变换的 AFT 法^[6]计算涡振时程响应, 能够较简单地计算作为时间与频率混合函数的涡振气动力, FFT 技术使本方法具有合理的计算量。涡振的另外一个特点是它最终是一种定常振动, 在频域计算时, 由于离散 Fourier 变换具有周期性, 解定常振动问题时具有很大的混叠现象, 需要一些技巧处理。

2 涡激力模型与运动方程

由于涡脱落过程的复杂性, 涡振力的计算都是基于各种半经验模型, 这些半经验模型可以分为尾流振荡器双振子模型和结构单振子涡振模型两大类^[7]。后者由于形式较简单故而在较复杂的结构计算中得到了广泛应用。在锁定区涡振具有 Van der pol 性, 成为一种自激和自限同时存在的振动。根据 Goswami, Jones, Scanlan 等基于实验研究所提出的涡振子模型(Scanlan 第二模型)^{[8][9]}, 涡振力被分解为由涡规则脱落引起的小幅度的 Strouhal 频率的谐激励项, 激发振幅的负阻尼线性自激项, 和与结构响应有关的非线性自限项, 后两者是频率的函数, 在锁定时起主要作用, 使涡振成为一种类似极限环的有限振幅周期响应。

$$m(\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y) = q(2D)Y_1(K)(1 - \varepsilon y^2 / D^2)(\dot{y} / U) + q(2D)Y_2(K)(y / D) + q(2D)C_L(K)\sin(\omega_{st}t + \phi) \quad (1)$$

其中 y 是垂直风速方向的位移, $\omega_{st} = \frac{2\pi S_t U}{D}$ 是 Strouhal 频率, S_t 是 Strouhal 数。 Y_1 是线性的气动自激阻尼项, ε 是非线性自限气动阻尼项, $K = \frac{\omega D}{U}$ 是减缩频率, $q = \frac{1}{2}\rho U^2$ 是流体动压, D 是作为特征尺寸的断面高度。 Scanlan 在实验中发现气动刚度项 Y_2 在锁定时是很小的, 可以不计。

涡振做有限元计算时气动力的计算与颤振有限元计算时的气弹力计算类似, 需要两个相对独立的步骤: 1) 节段模型试验测定各气动参数。 2) 有了气动参数, 加上作用力可以准二维分解的条带假设就可以得到用于有限元计算的气动力项。考虑

涡激振动的结构大都是细长结构, 可以用梁单元离散, 将涡激力转化为空间梁单元上的等效节点力, 有限元法组集的涡振运动方程为:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} - ([C_L] + [C_{NL}])\{y\} + [K]\{y\} = \{f(\omega, t)\} \quad (2)$$

其中 $[M], [C], [K]$ 分别为结构的质量、阻尼和刚度阵, 涡力的气动矩阵分为线性负阻尼 C_L 和非线性正阻尼 C_{NL} 两部分。 $\{\ddot{y}\}, \{\dot{y}\}$ 和 $\{y\}$ 分别为结构的节点加速度、速度和位移列向量。方程右端是涡规则脱落引起的谐激励项。采用堆聚式气动阻尼阵, 得:

$$C_L(2,2) = -qDY_1(K)L/U = C_L(8,8) \quad (3)$$

$$C_{NL}(2,2) = q\varepsilon Y_1(K)Ly^2 / (DU) = C_{NL}(8,8) \quad (4)$$

其它各元素为零。 L 是作用涡激力的节点对应的单元长度。第 j 个节点上作用的谐激励力为

$$f_j = q(2D_j)C_L(K)\sin(\omega_{st}t) \quad (5)$$

Barhoush 和 Namini 采用一致式推导了涡振的气动阻尼阵^[5], 由于涡振自限项是结构运动的非线性函数, 采用堆聚式比一致式要简化很多。

3 时频混合格式的涡振分析法

对涡振方程作振型主坐标变换: $\{y\} = [\Phi]\{q\}$ 得:

$$\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [\Lambda]\{q\} - ([D_L^{(1)}(\omega) + [D_L^{(2)}(\omega)] - [D_{NL}(\omega, y)])\{q\} = \{F\} \quad (6)$$

其中: $[D] = \text{Diag}(2\xi_1\omega_1, \dots, 2\xi_n\omega_n)$ 是结构振型阻尼阵, $[\Lambda] = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 是特征值阵。广义力 $\{F(t)\} = [\Phi]_T \{f(t)\}$ 。 $D_L^{(1)}(\omega)$ 是主坐标下线性涡力阻尼阵的对角部分, $D_L^{(2)}(\omega)$ 是其非对角部分。 $[D_{NL}(\omega, y)]$ 是主坐标下的非线性涡力阻尼阵。对方程(6), 应用 FFT(快速 Fourier 变换)技术的频域求解是非常高效的, 只是频域计算无法计算非线性问题, 因此取(6)式的参考线性系统的动力刚度阵:

$$[S_0(\omega)] = -I\omega^2 + i\omega([D] - [D_L^{(1)}(\omega)]) + [\Lambda] \quad (7)$$

I 是单位阵。此动力刚度是对角阵, 可以解耦计算出初始位移

$$\{\hat{q}(\omega)\}^{(0)} = [S_0(\omega)]^{-1}\{\hat{F}\} \quad (8)$$

$\{\hat{q}\}$ 与 $\{\hat{F}\}$ 是广义位移与广义力的 Fourier 变换。把 $[D_L^{(2)}], [D_{NL}]$ 有关项移往方程右边, 作 Fourier 变换得频域内的非线性效应的拟力序列为:

$$\{\hat{F}_p(\omega)\} = FT([D_L^{(2)}]\{\hat{q}\} - [D_{NL}]\{\hat{q}\}) \quad (9)$$

$FT()$ 表示 Fourier 变换。注意 $[D_{NL}(\omega, y)]$ 无论单独在时域还是频域都无法直接计算, 但是可以在时频

域交替计算求出 $[D_{NL}]\{\dot{q}\}$ 的 Fourier 变换。

由此得时频混合变换(AFT)的拟力迭代格式如下:

步骤 1: 计算参考线性系统的动力刚度 $[S_0(\omega)]$, 右端广义力作 Fourier 变换, 按(8)式在频域内求出初始反应值。

步骤 2: 在时域内求拟力, 作 Fourier 变换后与右端力项的 Fourier 变换迭加, 得新的右端力项。

步骤 3: 对新的右端力项, 求出在此激励力下参考线性系统的响应值。

步骤 4: 判断前后两次的响应值是否收敛, 若收敛则计算结束, 否则重复步骤 2。

设真实系统在真实反应时程下的动力刚度阵为 $[S(\omega)]$, 令

$$[A(\omega)] = [I] - [S_0(\omega)]^{-1}[S(\omega)] \quad (10)$$

AFT 法迭代的收敛准则^[10]是: 要求 $[A(\omega)]$ 的谱半径小于 1, 即 $\rho([A(\omega)]) < 1$ 。对单自由度情况作分析, 不考虑质量非线性时有:

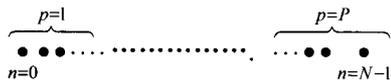
$$\rho(\omega) = \left| 1 - \frac{-\omega^2 m_0 + i\omega c + k}{-\omega^2 m_0 + i\omega c_0 + k_0} \right| \quad (11)$$

k 与 c 是真实系统的实际刚度与阻尼, k_0 与 c_0 是参考线性系统的刚度与阻尼。

当 $\omega \rightarrow 0$, $\rho(\omega) = \left| 1 - \frac{k}{k_0} \right|$; 当 $\omega \rightarrow \infty$, $\rho(\omega) = 0$

对 $\omega \rightarrow \infty$ 情况, 收敛是没有问题的。对于 $\omega \rightarrow 0$ 情况, 只要结构是弱非线性, 都能保证收敛。

由于在时域与频域的来回变换是通过 FFT 来进行的, 计算必须采用 $N = 2^m$ 模式, 并满足 Nyquist 采样定律。另外即使满足了收敛性要求, 由于离散 Fourier 变换的周期性, 在反应不能快速收敛时会产生较大的混叠与泄露误差。频域计算是对 N 个点同时计算的全局性方法, 在作拟力迭代计算时, 容易造成局部计算误差的扩散, 使计算不稳定, 所以本文引入了分段时间推进法克服这一问题。



如上图所示, 将 N 点分作 P 段, 首先在迭代中只对 $p=1$ 段求拟力作迭代, 迭代也只以这第一段中时间点的收敛为判据。由因果性原则, 后面的拟力对这一段中的反应是没有影响的。在这一段内反应收敛后, 推进至下一段。此时上一段的反应已求出, 拟力项相应固定为常值。只求这一段的拟力作迭代直至此段内各点反应收敛。如此推进直至计算时间

末尾。在采用分段技术后, 每次只需要一小段时间内的非线性拟力, 不是对全部时间都求出拟力来, 可以减少计算量。

4 计算与分析

采用本文的方法计算与 Namini 的文章^[4]中一样的一个单根简支梁的算例。此简支梁各数据见表 1。

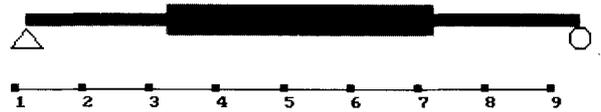


图 1 算例梁及其有限元模型

Fig.1 Example beam and its finite element model

与 Namini 文章中一样也是离散为 8 个三维梁单元(图 1)。各气动系数采用 Goswami 与 Scanlan 实验值^[8], 取结构的前四个振型做计算。各个振型阻尼比都取为 0.015。只用第一阶振型按照 Scanlan 法计算的最大涡振振幅是 1.422cm, Namini 等人用时程积分法计算出的是 1.45cm, 本方法的结果是 1.51cm。在 Goswami 和 Scanlan 等人做的实验中, 发现涡激振动的时程有拍的现象, 一般认为是高阶振型的干扰造成的, 从梁中点响应的时程图中也可以看出拍的现象。多模态的共同作用的最明显表现是高阶振型使定常振动变的不平滑了, 使反应在相平面内表现为一定的随机性, 而不是一条光滑的极限环。从相平面图(图 3)上可以看的十分明显。

图 3 的左边是各阶振型阻尼比都取为 0.015 时的响应相图, 右边是对高阶振型采用大的振型阻尼比后的响应, 可以为减少高阶振型的干扰后相平面内反应曲线变的光滑了。另外由于高阶振型的参与被阻尼掉了, 使反应最大振幅减少到了 1.40cm。

Barhoush 与 Namini 等人用 Newmark 积分法来求解涡振方程在锁定时的响应^[4], 计算气动阻尼时设其频率为锁定频率。为使计算开始, 必须给一个初始扰动。由于涡振的稳态解与初始条件无关, 原则上可以从任意初始扰动开始作计算, 但是由于计算量十分巨大, Barhoush 等人认为从一个和目标稳态解近似的初始条件开始可以得到快的收敛。本文方法不需要给出初始值, 实际上 Fourier 方法考虑初始值也比较困难。锁定是激发一个具有与 Strouhal 频率最接近频率的模式, 因此 Scanlan 第二模型里的谐和扰动项正好作为一个激发因素使计

算收敛到稳态解上去。Scanlan 法只能计算一个单独的模态，实际上结构总是多模态共同作用的，很难说有绝对分离的单一弯曲或扭转振型，与颤振导数一样，涡振的气动系数随频率而变，因而可以激发多个模态，但是往往有某一个特定的结构模态占主导。

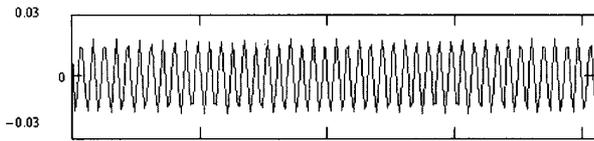


图2 梁中节点的涡激振动时程(风速10m/s)

Fig.2 Vortex induced time response at the mid-point of beam (wind speed=10m/s)

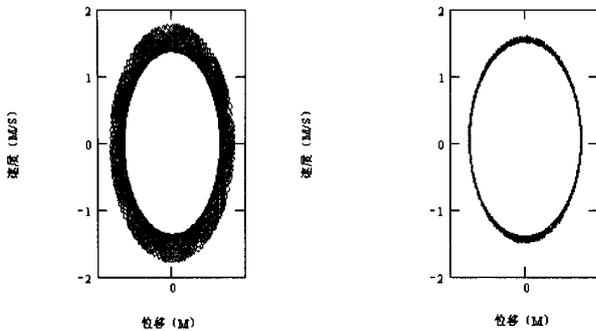


图3 梁中节点响应的相平面图

Fig.3 Phase plane plot of response at the mid-point of beam

5 结论

本文应用 Scanlan 的非线性涡振力模型，用有限元法计算结构的涡激振动。针对涡振方程的特点，本文提出用时频域混合变换(AFT)法来计算涡振时程响应，推导了具体的分段推进的计算格式，并通过数值算例证实了其有效性。与同样是基于 Scanlan 模型的单模态算法相比，有限元法计算涡振时程可以考虑多模态作用对涡振锁定响应的影响，并具有更大的灵活性。

表1 算例梁的特性参数

Table 1 Property parameters of the example beam

	长度 $L(m)$	直径 $D(m)$	截面积 $A(m^2)$	惯性矩 (mm^4)	质量密度 $M(N/m)$
中跨	6.096	0.1683	3.6E-3	11.07E6	276.8
边跨	3.048	0.1143	2.045E-3	3.009E6	159.9

参考文献:

- [1] 孙天凤, 崔尔杰. 钝物体绕流和流致振动研究[J]. 空气动力学学报, 1987, 5(1): 62-75.
Sun Tianfeng, Cui erjie. On the flow around the bluff bodies and flow induced vibrations[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 1987, 5(1): 62-75. (in Chinese)
- [2] 南条正洋, 山村信道など. 桥梁の渦励振に関する 3 次元応答解析と風洞実験[J]. 土木学会論文集, 1996, 543/I-36: 187-194.
Masahiro Nanjo, Nobumichi Yamamura et al. Analysis and model tests on vortex-induced oscillation of bridges[J]. JSCE, 1996, 543/I-36: 187-194.
- [3] Fazl Ehsan, R H Scanlan. Vortex-induced vibrations of flexible bridges[J]. Engineering Mechanics, 1990, 116(6): 1392-1411.
- [4] R Lewandowski. Computational formulation for non-linear vortex-induced vibration of beams [A]. Structural Dynamics-EURODYN'96[C]. Amsterdam: Elsevier Science, 1996, 221-226.
- [5] H Barhoush, A H Namini, R A Skop. Vortex shedding analysis by finite elements[J]. J. Sound & vibration, 1995, 184(1): 111-127.
- [6] T M Cameron, J H Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems[J]. J. Applied Mechanics, 1989,56: 149-154.
- [7] Instituto de Meteorologia. Fuerzas del viento sobre las estructuras[C]. DESA Nacional, 1995.
- [8] I Goswami, R H Scanlan, N P Jones. Vortex-induced vibration of circular cylinders [J]. 1: Experimental data, Engineering Mechanics, 1993, 119(11): 2270-2287.
- [9] I Goswami, R H Scanlan, N P Jones. Vortex-induced vibration of circular cylinders [J]. 2: new model, Engineering Mechanics, 1993, 119(11): 2288-2302.
- [10] 李立. 桥梁风振响应问题的计算研究[D]. 北京大学力学与工程科学系, 2002.

Li Li. Computation of wind-induced vibrations on bridges [D]. Doctoral dissertation, Peking University, 2002. (in Chinese)