

文章编号: 1000-4750(2002)03-069-05

工程弹塑性断裂随机分析的多维插值方法

李建康¹, 孙训方²

(1. 兰州铁道学院土木工程系, 兰州 730070; 2. 西南交通大学应用力学与工程系, 成都 610031)

摘 要: 为解决用确定性有限元或已有无量纲断裂参数表值时进行弹塑性断裂随机分析的问题, 本文研究了利用数值插值方法进行随机参数计算的可行性。以单边裂纹板为例, 根据确定性有限元计算的无量纲断裂参数表值, 通过多维插值计算获得断裂参数及其对基本随机变量变化率, 应用“弹塑性断裂随机分析的工程方法”进行弹塑性断裂随机分析。算例表明在敏感区用插值方法计算的结果小于用随机有限元方法计算的结果。

关键词: 弹塑性断裂力学; 工程方法; 有限元插值方法

中图分类号: O344.7, O346.1 文献标识码: A

1 引言

随机分析是断裂力学发展的一个方向,也是结构可靠性评估的基础。就断裂力学方面而言,弹、塑性断裂的随机分析研究是难点又是热点。由于弹塑性随机分析的复杂性,延性断裂的可靠性研究在结构可靠性领域中仍然是薄弱环节。这类问题的关键有两点,一是要解决适于工程应用的弹塑性断裂参数的工程估算方法,二要解决弹、塑性断裂参数及其变化率的计算。目前这方面有关的研究工作还不多^[1,2]。在已有确定性有限元或无量纲断裂参数表值情况下利用数值插值方法进行参数计算,根据计算结果进行塑性断裂随机分析是一种较方便和较简单的方法。本文应用“弹塑性断裂随机分析的工程方法”,以单边裂纹板为例,根据确定性有限元计算的无量纲断裂参数表值,通过多维插值计算获得弹、塑性断裂参数及其对基本随机变量变化率的计算。同时进行方差、可靠性指标、可靠度的计算。

2 断裂随机分析的工程方法

按照 Kumar, German, Shih 等提出的“弹塑性断裂力学的工程方法”^[3,4]。对于满足下列 Ramberg-Osgood 特性的材料

$$e/e_0 = s/s_0 + a(s/s_0)^N \quad (1)$$

弹塑性的结果可通过线弹性和全塑性情况下的结果进行估算^[3](如图 1), 有

$$\begin{cases} J = J^e(a_e) + J^p(a, N) \\ \mathbf{d} = \mathbf{d}^e(a_e) + \mathbf{d}^p(a, N) \\ \mathbf{D}_c = \mathbf{D}_c^e(a_e) + \mathbf{D}_c^p(a, N) \\ \mathbf{q}_c = \mathbf{q}_c^e(a_e) + \mathbf{q}_c^p(a, N) \end{cases} \quad (2)$$

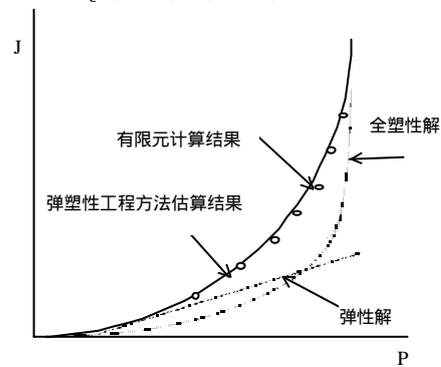


图 1 弹—塑性估算方法(J 积分随载荷变化)的说明

Fig.1 The illustration for elastic-plastic fracture estimation method (J-integral vs applied load)

式(1)中 a 、 s_0 、 e_0 、 N —分别是材料常数, 屈服应力、屈服应变和硬化指数; 式(2)中 J —J 积分; \mathbf{d} —裂纹张开位移; \mathbf{D}_c —由裂纹引起的加载点的位移; \mathbf{q}_c —由裂纹引起的加载线的转角。 a_e —修正后的裂纹长度, 由下式给出

$$a_e = a + fr_p \quad (3)$$

收稿日期: 2000-09-22; 修改日期: 2000-12-21

基金项目: 冻土工程国家重点实验室基金资助(200102)

作者简介: 李建康(1956), 男, 江苏泰兴人, 副教授, 博士, 从事固体力学研究

孙训方(1923), 男, 安徽寿县人, 教授, 博士生导师, 从事固体力学研究

而

$$r_p = \frac{1}{b} \left(\frac{N-1}{N+1} \right) \left(\frac{K_I}{S_0} \right)^2 \quad (4)$$

$$f = 1 / \left[1 + \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 \right] \quad (5)$$

平面应力时 $b=2$ ，平面应变时 $b=6$ 。 P 是作用于每单位厚度板上的广义载荷， P_0 为每单位厚度板上的极限载荷或参考载荷， $P_0 = g S_0$ ， g 是约束因子， c 为韧带宽。(2)中每式的线性部分可表示为：

$$\begin{cases} J = f_1(a_e) \frac{P^2}{E'} \\ \mathbf{d} = f_2(a_e) \frac{P}{E'} \\ \mathbf{D}_c = f_3(a_e) \frac{P}{E'} \\ \mathbf{q}_c = f_4(a_e) \frac{P}{E'} \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$E' = \begin{cases} E & (\text{平面应力}) \\ E / (1 - m^2) & (\text{平面应变}) \end{cases}$$

而 E —弹性模量； m —泊松比； P —拉伸载荷。 f_i ($i=1, 2, 3, 4$) 为弹性解系数。(2)中每式的塑性部分可表示为：

$$\begin{cases} J = \mathbf{a} \mathbf{s}_0 \mathbf{e}_0 c(a/b) H_1(a/b, N) [P/P_0]^{N+1} \\ \mathbf{d} = \mathbf{a} \mathbf{e}_0 a H_2(a/b, N) [P/P_0]^N \\ \mathbf{D}_c = \mathbf{a} \mathbf{e}_0 a H_3(a/b, N) [P/P_0]^N \\ \mathbf{q}_c = \mathbf{a} \mathbf{e}_0 H_4(a/b, N) [P/P_0]^N \end{cases} \quad (7)$$

式中： H_1 —塑性解系数； P_0 —理想塑性材料 ($N = \infty$) 的极限载荷。 f_i 、 H_i ($i=1, 2, 3, 4$) 也称无量纲断裂参数。所谓工程方法就是预先由断裂有限元计算专家将无量纲断裂参数算出并制成表，工程人员进行断裂分析时只依据无量纲断裂参数表和式(6)、(7)进行断裂参数的计算，而无需进行复杂的有限元计算。

将上述“工程方法”推广至随机分析(从数学观点看，当两函数近似相等时要使其导数也保持近似关系，两函数应连续且具有相同的单调性。断裂参数满足此条件，见图1)。对弹塑性解有

$$\begin{cases} J_{,i} = J_{,i}^e(a_e) + J_{,i}^p(a, N) \\ \mathbf{d}_{,i} = \mathbf{d}_{,i}^e(a_e) + \mathbf{d}_{,i}^p(a, N) \\ \mathbf{D}_{c,i} = \mathbf{D}_{c,i}^e(a_e) + \mathbf{D}_{c,i}^p(a, N) \\ \mathbf{q}_{c,i} = \mathbf{q}_{c,i}^e(a_e) + \mathbf{q}_{c,i}^p(a, N) \end{cases} \quad (8)$$

全塑性问题是关键、是难点。对全塑性解有：

$$\begin{cases} J_{,i} = \{ \mathbf{a} \mathbf{s}_0 \mathbf{e}_0 c(a/b) [P/P_0]^{N+1} \}_{,i} H_1(a/b, N) \\ + \{ \mathbf{a} \mathbf{s}_0 \mathbf{e}_0 c(a/b) [P/P_0]^{N+1} \}_{,i} H_{1,i}(a/b, N) \\ \mathbf{d}_{,i} = \{ \mathbf{a} \mathbf{e}_0 a [P/P_0]^N \}_{,i} H_2(a/b, N) \\ + \{ \mathbf{a} \mathbf{e}_0 a [P/P_0]^N \}_{,i} H_{2,i}(a/b, N) \\ \mathbf{D}_{c,i} = \{ \mathbf{a} \mathbf{e}_0 a [P/P_0]^N \}_{,i} H_3(a/b, N) \\ + \{ \mathbf{a} \mathbf{e}_0 a [P/P_0]^N \}_{,i} H_{3,i}(a/b, N) \\ \mathbf{q}_{c,i} = \{ \mathbf{a} \mathbf{e}_0 [P/P_0]^N \}_{,i} H_4(a/b, N) \\ + \{ \mathbf{a} \mathbf{e}_0 [P/P_0]^N \}_{,i} H_{4,i}(a/b, N) \end{cases} \quad (9)$$

由此知，应用式(8)，需预先计算好 f_i 、 H 函数及其变化率值。下面以 H_1 函数为例说明计算断裂参数及其变化率的数值插值方法。

3 计算断裂参数及其变化率的数值插值方法

计算断裂参数及其变化率的多维局部数值插值方法是先用确定性的有限元计算无量纲断裂参数值，并将其随基本随机变量的变化情况列表，再对表值进行局部插值，以得到所要求的无量纲断裂参数及其对基本随机变量的变化率。本文计算所用幂律全塑性罚函数有限元方法和程序见[5,6]

3.1 多维局部插值方法

当关于自变量(基本随机变量)的函数(断裂参数)表值已经给出时，求函数值(如 H 函数)及其偏导数(如： $\partial H / \partial n, \partial H / \partial \mathbf{x}$)可借助插值方法。插值方法是工程计算的基本工具。关于插值函数的存在唯一性，构造法以及误差分析，有关“计算方法”的教科书如[7]已有论述。现仅给出本文编程所用公式。

对于 m 个参数的 n 次 Lagrange 插值，需考虑 $(n+1)^m$ 个点的数据。设 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为 m 个自变量的多元函数，且 f 在 $(n+1)^m$ 个数值点的函数值已知。 $(n+1)^m$ 个数值点对应于每个自变量 x_i ($i=1, 2, \dots, m$) 有 $n+1$ 个坐标值： $x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{n-1}, x_i^n$ (此处 $0, 1, \dots, n$ 为上角标不是指数) 是已知的。于是 $(n+1)^m$ 个数值点的函数值可表示为：

$$f = f(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \dots, x_m^{j_m}) \quad (10)$$

$$(j_1, j_2, \dots, j_m = 0, 1, 2, \dots, n \text{ 为上角标})$$

对于变量 x_i 的第 j ($j=0, 1, 2, \dots, n$) 个基函数为：

$$l_j(x_i) = \frac{(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^1) \cdots (x_i - x_i^{j-1})(x_i - x_i^{j+1}) \cdots (x_i - x_i^n)}{(x_i^j - x_i^0)(x_i^j - x_i^1) \cdots (x_i^j - x_i^{j-1})(x_i^j - x_i^{j+1}) \cdots (x_i^j - x_i^n)} \quad (11)$$

则有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{j_1}^n \sum_{j_2}^n \dots \sum_{j_m}^n l_{j_1}(x_1) l_{j_2}(x_2) \dots l_{j_m}(x_m) f(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \dots, x_m^{j_m}) \quad (12)$$

及

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{K}_s} &= \sum_{j_1}^n \sum_{j_2}^n \dots \sum_{j_m}^n l_{j_1}(x_1) l_{j_2}(x_2) \dots l_{j_m}(x_m) f(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \dots, x_m^{j_m}) \\ &\dots \frac{\mathcal{I}_{j_s}(x_s)}{\mathcal{K}_s} \dots l_{j_m}(x_m) f(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \dots, x_m^{j_m}) \\ &(s=1, 2, \dots, m) \\ \frac{\mathcal{I}_{j_s}(x_s)}{\mathcal{K}_s} &= \sum_{k=0}^n \frac{l_{j_s}(x_s)}{x_s - x_j^k} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

根据以上列式即可编制程序。

3.2 H_1 函数值确定性有限元计算

本文所用无量纲断裂参数表值是用确定性的幂律全塑性罚函数有限元计算的。列式为：

$$H_1(a/b, N) = J / \mathbf{a} s_0 \mathbf{e}_0 c(a/b) [P / P_0]^{N+1} \quad (14)$$

式中 a 、 b 、 c —分别是裂纹长、板宽和韧带宽(图 2); P —拉伸载荷, P_0 是理想塑性材料($N=\infty$)的极限载荷, 对单边裂纹板由下式计算:

$$P_0 = \begin{cases} 1.455 \mathbf{h} s_0 & (\text{平面应变}) \\ 1.072 \mathbf{h} s_0 & (\text{平面应力}) \end{cases} \quad (15)$$

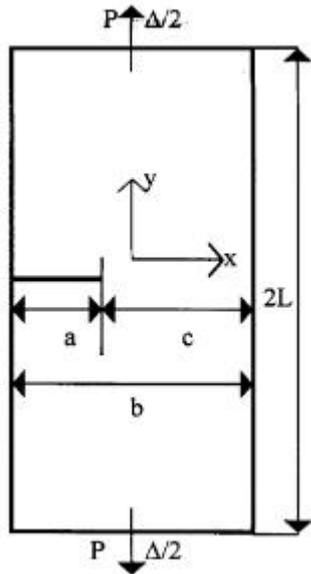


图 2 远场拉伸下的单边裂纹板

Fig.2 A single edged crack plate under tensile load

式中

$$\mathbf{h} = [1 + (a/c)^2]^{1/2} - a/c \quad (16)$$

按照形变理论和 HRR 场理论, H 函数只是相对

裂纹长 a/b 和幂律指数 N 的函数。对幂律材料的裂纹板而言, H 函数有两个基本随机变量。采用八结点等参幂律非线性随机有限元, 对平面应变下的单边裂纹板, 考虑板的上半部, 进行网格划分, 用 192 个单元, 633 个结点, 裂尖采用压缩四分之一结点的奇异单元。计算时取弹性模量 $E=2.0 \times 10^5 \text{MPa}$, 屈服极限 $s_0=500 \text{MPa}$, 系数 $\mathbf{a}=1$, 泊松比 $\mathbf{m}=0.4999$, 板宽 $b=0.020 \text{m}$, 拉伸载荷 $P=20 \times 400=8000 \text{N}$ 。表 1 给出了 $N=1 \sim 10$, $\mathbf{x}=1/8, 3/16, 1/4, 5/16, 3/8, 7/16$ 的幂律材料单边裂纹板在平面应变下无量纲断裂参数 H_1 确定性的幂律全塑性有限元计算结果。

表 1 平面应变下单边裂纹板的 H_1 值

Table 1 H_1 of a single edged crack plate under plane strain

$N \backslash \mathbf{x}$	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16
1	4.89	4.57	4.34	4.12	3.89	3.65
2	7.02	6.00	5.07	4.11	3.37	2.86
3	8.91	6.92	5.06	3.67	2.78	2.23
4	10.7	7.52	4.83	3.20	2.27	1.72
5	12.5	7.84	4.51	2.76	1.82	1.32
6	14.3	7.92	4.18	2.36	1.45	1.00
7	16.1	7.93	3.85	2.00	1.15	0.760
8	17.9	7.90	3.53	1.69	0.912	0.575
9	19.7	7.84	3.23	1.43	0.721	0.435
10	21.5	7.78	2.94	1.21	0.570	0.328

3.3 应用插值方法进行断裂随机分析

断裂随机分析首先要进行断裂参数及其变化率的计算, 下面以全塑性 J 积分及其对裂纹长度、幂率指数变化率的计算为例, 说明方法的应用。

假定平面应变下单边裂纹板为纯幂律材料: 已知弹性模量 $E=2.0 \times 10^5 \text{MPa}$, 系数 $\mathbf{a}=1$, 幂律指数的均值 $N=5$ 。板的裂纹长度 $a=0.007 \text{m}$, 板宽 $b=0.020 \text{m}$ (此时相对裂纹长度 $\mathbf{x}=0.35$)。在拉伸载荷 $P=20 \times 400=8000 \text{N}$, 求屈服极限分别为 $s_0=400, 500 \text{MPa}$ 时幂律全塑性的 J 积分的值 J 和 J 积分对裂纹长度 a , 幂律指数 N 的变化率 J_a, J_n 。

解: 平面应变下单边裂纹板的 H_1 函数有两个自变量, 幂律指数 N 和裂纹相对长 \mathbf{x} , 故插值公式中 $m=2$, 取插值次数 $n=2$, 由 $N=5, \mathbf{x}=0.35$ 则 N 的 $n+1$ 个值(3 个)可取: 4, 5, 6; \mathbf{x} 的 $n+1$ 个值可取: 1/4, 5/16, 3/8。从表 1 取出 H_1 的相应表值(如表 2)用插值公式计算 $\mathbf{x}=0.35$ 时的对应值, 得表 3。

表 2 取出的 H_1 函数值

Table 2 H_1 taken from Table 1

N	X		
	1/4	5/16	3/8
4	4.83	3.20	2.27
5	4.51	2.76	1.82
6	4.18	2.36	1.45

表 3 插值计算结果

Table 3 The interpolating results

X	H_1	$H_{1,x}$	
		$H_{1,x}$	$H_{1,N}$
0.35	2.10	-14.0	-0.43

表 5 插值方法的随机分析结果

Table 5 Results of stochastic analysis by interpolation method

参 数	均值	方差 Var(J)/	可靠性	可靠度	失效	
	J/MPa-m	(MPa-m) ²	指标 b	P_f	概率 P_f	
$S_0 = 400\text{MPa}$	$E(J_c)=0.30 \quad \text{Var}(J_c)=5.0 \times 10^{-4}$					
	随机	2.52E-01	5.25E-04	1.50	93.32%	6.58%
	有限元方法	0.235	3.66E-04	2.13	98.33%	1.66%
$S_0 = 500\text{MPa}$	$E(J_c)=0.11 \quad \text{Var}(J_c)=5.0 \times 10^{-5}$					
	随机	1.03E-01	0.81E-04	1.49	93.20%	6.80%
	有限元方法	0.0964	0.634E-04	2.22	98.68%	1.32%

将有关值代入下式:

$$\begin{cases}
 J = \alpha s_0 e_0 c(a/b) H_1(a/b, N) [P/P_0]^{N+1} \\
 J_a = \alpha s_0 e_0 [P/P_0]^{N+1} \left\{ \left[\frac{c-a}{b} - (N+1) \right] \cdot \frac{ac}{b} \frac{P_{0a}}{P_0} H_1(a/b, N) \right\} + \frac{ac}{b} \frac{H_1}{a} \\
 J_n = \alpha s_0 e_0 [P/P_0]^{N+1} \frac{ac}{b} \left[H_1(a/b, N) \ln \frac{P}{P_0} + \frac{H_1}{N} \right] \\
 P_0 = 1.455 s_0 (\sqrt{a^2 + c^2} - a) \\
 \frac{P_{0a}}{P_0} = \frac{\frac{a-c}{\sqrt{a^2 + c^2}} + 1}{\sqrt{a^2 + c^2} - a}
 \end{cases}$$

注意到 $H_{1,a} = H_{1,x} / b, c = b - a$ 计算可得表 4。由表可见插值计算方法与直接随机有限元方法所得结果的差异。表中所用是幂律非线性材料的随机有限元^[8]。

表 4 插值方法计算结果及与随机有限元计算结果比较

Table 4 Comparison the interpolating results with those of SFEM

参 数	$s_0 = 400\text{MPa}$			$s_0 = 500\text{MPa}$		
	J/MPa-m	J_x/MPa	$J_N/\text{MPa-m}$	J/MPa-m	J_x/MPa	$J_N/\text{MPa-m}$
随机有限元	2.52E-01	2.08E+02	9.58E-02	1.03E-01	8.84E+01	1.69E-02
计算结果						
数值插值	0.235	191.4	0.086	0.0964	78.4	0.014
计算结果						

假定 a 、 N 的变化是不相关的，若 a 、 N 的分布或均值、方差已知时，如取 $\bar{a} = 0.007\text{m}$ ， $\text{Var}(a) = 0.01 \times 10^{-6}(\text{m})^2$ ， $\bar{N} = 5$ ， $\text{Var}(N) = 0.01$ ，可根据上面的计算结果求得 J 的均值和方差。当韧度的分布(或均值、方差)已知时可进行可靠度分析和计算。如假定韧度变化与 J 的变化不相关， $s_0 = 400\text{MPa}$ 时 $E(J_c) = 0.30$ ， $\text{Var}(J_c) = 5.0 \times 10^{-4}$ ； $s_0 = 500\text{MPa}$ 时 $E(J_c) = 0.11$ ， $\text{Var}(J_c) = 5.0 \times 10^{-5}$ 则可算得可靠性指标 b ，和可靠度 P_f 、失效概率 P_f 等，见(表 5)。

4 结 语

弹塑性断裂随机分析时参数及其变化率的计算可以借助确定性的有限元计算结果和插值方法来完成。但需注意这种方法所含的不安全性。由于数值插值本质上是利用函数的连续性和光滑性来近似获得函数和其变化率的结果，这种结果带有局部平均的特点。当函数变化率很大时，所得均值或变化率的绝对值往往偏小，由此可能会使计算所得可靠度偏大，这是不安全的。在使用这一方法时，尤其在敏感区域要加以注意。

参 考 文 献:

- [1] Zhao J.-P., et al. The application of 2D elastic stochastic finite element method in the field of fracture mechanics[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 1997, 71(2): 169-174.
- [2] Zhao J.-P., et al. Applications of 2D elastic-plastic stochastic finite element method in the field of fracture mechanics[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 1998, 74(4): 281-286.
- [3] Kumar V., German M.D., Shih C.F. An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis[R]. EPRI NP-1931 Topical Report. Research Project 1237-1, General Electric Company, Schenectady, NY(1981)
- [4] Kumar V., German M. D., Wilkening W. W., et al. Further development in the engineering approach for elastic-plastic fracture analysis[R]. EPRI NP-3607

- Topical Report. Research Project 1237-1, General Electric Company, Schenectady, NY(1983)
- [5] 李建康, 等. 纯幂律全塑性罚函数有限元[J]. 计算力学学报, 1999, 16(4): 379-389.
- Li Jiankang, et al. A penalty finite element method for full plastic analysis of pure power-hardening materials[J]. Journal of computational Mechanics, 1999, 16(4): 379-389.
- [6] 李建康, 等. 新的幂律本构下全塑性裂纹的有限元解[J]. 兰州铁道学院学报, 1999, 18(2): 14-21.
- Li Jiankang, et al. Finite element solution of fully plastic crack in materials of a new pure power constitutive law [J]. Journal of Lanzhou Railway Institute, 1999, 18(2): 14-21.
- [7] 邓建中, 葛仁杰, 程正兴, 编. 计算方法[M]. 西安交通大学出版社, 1985. 5.
- Den Jianzhong, et al. Computational Methods[M]. Xian Jiaotong University Press, 1985(in Chinese).
- [8] 李建康. 弹塑性断裂的随机分析方法[D]. 成都: 西南交通大学, 博士学位论文, 1999. 12.
- Li Jiankang. The engineering stochastic analysis method for elastic-plastic fracture[D]. Chendu, The Southwest Jiaotong University, 1999.12.

AN INTERPOLATION METHOD FOR STOCHASTIC ANALYSIS OF ENGINEERING ELASTIC-PLASTIC FRACTURE

LI Jian-kang¹, SUN Xun-fang²

(1. Lanzhou railway institute, Lanzhou, 730070; 2. Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031)

Abstract: In probabilistic fracture analysis, it is necessary to evaluate the mean values and variances of fracture parameters. The mean values are usually computed by normal finite element method while the variances are often obtained using stochastic finite element method. In this paper, an interpolation method for stochastic analysis of engineering elastic-plastic fracture is introduced. In the present method, the mean values and the variances of fracture parameters are computed with reference to a table, which has been set up in advance. It is shown that the computed results by the interpolation method are smaller than those by stochastic finite element method in sensitive zone.

Key words: elastic-plastic fracture mechanics; engineering method; stochastic finite element-interpolation method