

文章编号：1000-4750(2002)06-136-05

柔性铰链的设计计算

吴鹰飞, 周兆英

(清华大学精密仪器与机械学系, 北京 100084)

摘 要：推导出了一般柔性铰链的系列设计计算公式和直圆柔性铰链的系列设计计算公式。计算公式是精确的推导结果，且在表达上较为简洁，有利于柔性铰链刚度(柔度)的计算和分析。与迄今沿用的 J. M. Paros 的柔性铰链设计计算公式进行了计算比较，说明了设计计算公式的简洁性、准确性和全面性。尤其是对常用的直圆柔性铰链的系列设计计算公式，更突出其既精确又简单的特点。同时指出了柔性铰链设计计算中应当注意的问题。

关键词：柔性铰链；直圆柔性铰链；柔性铰链刚度；柔性铰链柔度

中图分类号：TH132.3, TH123, TH135 **文献标识码**：A

1 引言

柔性铰链利用了弹性材料微小角变形及其自回复的特性，消除了传动过程中的空程和机械摩擦，能获得超高的位移分辨率，并有很紧凑的机械结构和很高的刚度，以及迅捷的响应。柔性铰链有成千上万的应用，如：陀螺仪、加速度计、天平、控制导弹的喷嘴、控制器 显示仪、记录仪、表面控制、调整器、阀、放大连杆、计算机、继电器和传动连杆^[1]。

在设计柔性铰链时，柔性铰链的刚度(柔度)计算是关键。早在 1965 年，J. M. PAROS 和 L. WEISBORD 便巧妙地推导出了柔性铰链的设计计算公式，并一直沿用至今^{[1]、[2]}。由此，避免了繁杂、费时的数值计算，给柔性铰链的设计计算带来了极大的方便。由于柔性铰链的设计计算公式在形式上较为复杂，他们还给出在柔性铰链的厚度远小于其切割半径的条件下的简化公式，并对常用的直圆柔性铰链给出了更为简单的表达式。由于简化公式是在铰链的厚度远小于半径的条件下给出的，所以在设计较厚的铰链时会产生较大的误差。

七十年代末，美国国家标准局引入了柔性铰链机构以放大压电驱动器的位移，使其设计的工作台既具有亚纳米级的位移分辨率，又具有相对较大的

行程^[3]。近年来，柔性铰链机构和压电驱动器的结合在许多领域得到了应用，比如微操作^[4]、精密工作台^{[5]、[6]}、光学显微镜自动聚焦系统^[7]、打印头^[8]、压电马达^[9]、金刚石切削^[10]、STM^[11]等。在设计该类柔性铰链机构时，要有紧凑的结构和较高的本征频率，所以柔性铰链的厚度接近其切割半径。在此情况下，J. M. PAROS 的简化公式不能适用，而精确公式又过于复杂。

利用力学的基本公式对柔性铰链的设计计算公式进行推导，得到了相对于 J. M. PAROS 给出的柔性铰链设计计算公式更为简洁的表达。尤其是对于常用的直圆柔性铰链，得到了精确且十分简洁的设计计算公式。这将会使柔性铰链的刚度(柔度)计算变得更加简单、明了，有利于柔性铰链的设计分析。本文将给出一般柔性铰链和直圆柔性铰链的系列设计计算公式。

2 一般柔性铰链的系列设计计算公式

如图 1 所示的柔性铰链，其杆部的截面是矩形，铰链由两个垂直于端面的对称的圆柱面切割而成。由于它的设计、制造和分析上均较为简单，所以被广泛地采用。本文就该类柔性铰链进行分析，并沿

收稿日期：2001-05-15；修改日期：2001-10-19

作者简介：吴鹰飞(1972)，男，上海人，博士研究生，从事精密定位技术研究

周兆英(1937)，男，江苏人，教授，博士生导师，清华大学微米纳米研究中心主任，从事微米纳米技术研究

用了 J. M. PAROS 对柔性铰链形状、受力和变形的定义，采用了其相关的符号。

图 1 表明了柔性铰链的几何结构、受力和变形。柔性铰链的几何尺寸为宽度 b 、厚度 t 、切割半径 R 和圆心角 q_m 。柔性铰链左端的受力和力矩为 F_x 、 F_y 、 F_z 、 M_y 和 M_z 。假设柔性铰链的右端为相对固定端，则柔性铰链左端的变形为 a_z 、 D_z 、 a_y 、 D_y 和 D_x 。

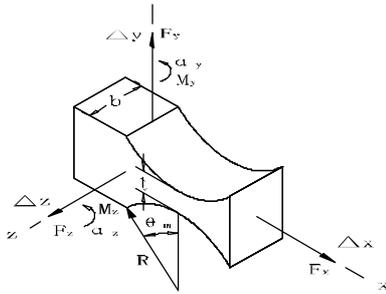


图 1 柔性铰链的几何结构、受力和变形

Fig.1 Dimensions, forces, moments and deflections of flexure hinge

柔性铰链的柔度(刚度)是首要的设计参数。计算柔性铰链的柔度时，由于柔性铰链的变形集中在柔性铰链的圆弧部分，所以忽略柔性铰链圆弧以外的变形。又由于柔性铰链的变形十分微小，所以忽略柔性铰链各个变形之间的干涉。设材料的弹性模量为 E ，剪切弹性模量为 G ，根据弹性静力学的基本分析和微积分的推导，本文给出了如图 1 所示矩形单轴柔性铰链的系列设计计算公式。

2.1 z 轴的角变形 a_z

z 轴是柔性铰链的输入轴，柔性铰链产生沿 z 轴的角变形 a_z 是柔性铰链最重要的参数。

力矩 M_z 作用下导致柔性铰链产生沿 z 轴的角变形 a_z ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_z}{M_z} = \frac{12}{EbR^2} f_2 \quad (1)$$

式(1)中的 f_2 为中间变量，其可表达为：

$$f_2 = \frac{8s^4(2s+1)}{(4s+1)^2} \frac{\tan \frac{q_m}{2}}{[1+(4s+1)\tan^2 \frac{q_m}{2}]^2} + \frac{4s^3(6s^2+3s+1)}{(4s+1)^2} \frac{\tan \frac{q_m}{2}}{1+(4s+1)\tan^2 \frac{q_m}{2}} + \frac{12s^4(2s+1)}{(4s+1)^2} \arctan(\sqrt{4s+1} \tan \frac{q_m}{2}) \quad (2)$$

其中， $s = R/t$ 。

力 F_y 作用下导致柔性铰链产生沿 z 轴的角变形 a_z ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_z}{F_y} = -\frac{12 \sin q_m}{EbR} f_2 \quad (3)$$

2.2 沿 z 轴的线性变形 D_z

力矩 M_y 作用下导致柔性铰链产生沿 z 轴的线性变形 D_z ，其柔度表达式如下：

$$\frac{D_z}{M_y} = \frac{12R \sin q_m}{Eb^3} f_1 \quad (4)$$

式(4)中的 f_1 为中间变量，其可表达为：

$$f_1 = \frac{2(2s+1)}{\sqrt{4s+1}} \arctan(\sqrt{4s+1} \tan \frac{q_m}{2}) - q_m \quad (5)$$

力 F_z 作用下由于弯矩导致柔性铰链产生沿 z 轴的线性变形 D_z ，其柔度表达式如下：

$$\frac{D_z}{F_z} = \frac{12R^2 \sin^2 q_m}{Eb^3} f_1 + \frac{12R^2}{Eb^3} f_3 \quad (6)$$

式(6)中的 f_3 为中间变量，其可表达为：

$$f_3 = \frac{2 \tan \frac{q_m}{2}}{(1 + \tan^2 \frac{q_m}{2})^2} + \frac{s+1}{s} \frac{\tan \frac{q_m}{2}}{1 + \tan^2 \frac{q_m}{2}} - \frac{(2s+1)\sqrt{4s+1}}{2s^2} \arctan(\sqrt{4s+1} \tan \frac{q_m}{2}) + \frac{2s^2+4s+1}{4s^2} q_m \quad (7)$$

力 F_z 作用下由于剪切力导致柔性铰链产生沿 z 轴的线性变形 D_z ，其柔度表达式如下：

$$\left(\frac{D_z}{F_z} \right)_d = \frac{1}{Gb} f_1 \quad (8)$$

2.3 沿 y 轴的角变形 a_y

力矩 M_y 作用下导致柔性铰链产生沿 y 轴的角变形 a_y ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_y}{M_y} = \frac{12}{Eb^3} f_1 \quad (9)$$

力 F_z 作用下导致柔性铰链产生沿 y 轴的角变形 a_y ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_y}{F_z} = \frac{12R \sin q_m}{Eb^3} f_1 \quad (10)$$

2.4 沿 y 轴的线性变形 D_y

力矩 M_z 作用下导致柔性铰链产生沿 y 轴的线性变形 D_y ，其柔度表达式如下：

$$\frac{Dy}{M_z} = -\frac{12\sin q_m}{EbR} f_2 \quad (11)$$

力 F_y 作用下由于弯矩导致柔性铰链产生沿 y 轴的线性变形 Dy ，其柔度表达式如下：

$$\frac{Dy}{F_y} = \frac{12\sin^2 q_m}{Eb} f_2 + \frac{12}{Eb} f_4 \quad (12)$$

式(12)中的 f_4 为中间变量，其可表达为：

$$f_4 = -\frac{2s^2(2s+1)}{(4s+1)} \frac{\tan \frac{q_m}{2}}{[1+(4s+1)\tan^2 \frac{q_m}{2}]^2} + \frac{s(2s^2+5s+1)}{(4s+1)} \frac{\tan \frac{q_m}{2}}{1+(4s+1)\tan^2 \frac{q_m}{2}} + \frac{(2s+1)(2s^2-4s-1)}{2(4s+1)^2} \arctan(\sqrt{4s+1} \tan \frac{q_m}{2}) + \frac{q_m}{4} \quad (13)$$

力 F_y 作用下由于剪切力导致柔性铰链产生沿 y 轴的线性变形 Dy ，其柔度表达式如下：

$$\left(\frac{Dy}{F_y}\right)_d = \frac{1}{Gb} f_1 \quad (14)$$

2.5 沿 x 轴的线性变形 Dx

力 F_x 作用下由于拉伸或压缩导致柔性铰链产生沿 x 轴的线性变形 Dx ，其柔度表达式如下：

$$\frac{Dx}{F_x} = \frac{1}{Eb} f_1 \quad (15)$$

3 直圆柔性铰链的系列设计计算公式

通常情况下使用最多的是直圆柔性铰链。直圆柔性铰链的切口是两个垂直于端面的对称半圆柱面，即 $q_m = 90^\circ$ 。对于直圆柔性铰链，可以得到更为简洁的设计计算公式。

3.1 沿 z 轴的角变形 a_z

力矩 M_z 作用下导致直圆柔性铰链产生沿 z 轴的角变形 a_z ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_z}{M_z} = \frac{12}{EbR^2} \left[\frac{2s^3(6s^2+4s+1)}{(2s+1)(4s+1)^2} + \frac{12s^4(2s+1)}{(4s+1)^2} \arctan \sqrt{4s+1} \right] \quad (16)$$

力 F_y 作用下导致直圆柔性铰链产生沿 z 轴的角变形 a_z ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_z}{F_y} = -\frac{12}{EbR}$$

$$\left[\frac{2s^3(6s^2+4s+1)}{(2s+1)(4s+1)^2} + \frac{12s^4(2s+1)}{(4s+1)^2} \arctan \sqrt{4s+1} \right] \quad (17)$$

3.2 沿 z 轴的线性变形 Dz

力矩 M_y 作用下导致直圆柔性铰链产生沿 z 轴的线性变形 Dz ，其柔度表达式如下：

$$\frac{Dz}{M_y} = \frac{12R}{Eb^3} \left[\frac{2(2s+1)}{\sqrt{4s+1}} \arctan \sqrt{4s+1} - \frac{p}{2} \right] \quad (18)$$

力 F_z 作用下由于弯矩导致直圆柔性铰链产生沿 z 轴的线性变形 Dz ，其柔度表达式如下：

$$\frac{Dz}{F_z} = \frac{12R^2}{Eb^3} \left[\frac{2s+1}{2s} + \frac{(2s+1)(4s^2-4s-1)}{2s^2\sqrt{4s+1}} \arctan \sqrt{4s+1} - \frac{2s^2-4s-1}{8s^2} p \right] \quad (19)$$

力 F_z 作用下由于剪切力导致直圆柔性铰链产生沿 z 轴的线性变形 Dz ，其柔度表达式如下：

$$\left(\frac{Dz}{F_z}\right)_d = \frac{1}{Gb} \left[\frac{2(2s+1)}{\sqrt{4s+1}} \arctan \sqrt{4s+1} - \frac{p}{2} \right] \quad (20)$$

3.3 沿 y 轴的角变形 a_y

力矩 M_y 作用下导致直圆柔性铰链产生沿 y 轴的角变形 a_y ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_y}{M_y} = \frac{12}{Eb^3} \left[\frac{2(2s+1)}{\sqrt{4s+1}} \arctan \sqrt{4s+1} - \frac{p}{2} \right] \quad (21)$$

力 F_z 作用下导致直圆柔性铰链产生沿 y 轴的角变形 a_y ，其柔度表达式如下：

$$\frac{a_y}{F_z} = \frac{12R}{Eb^3} \left[\frac{2(2s+1)}{\sqrt{4s+1}} \arctan \sqrt{4s+1} - \frac{p}{2} \right] \quad (22)$$

3.4 沿 y 轴的线性变形 Dy

力矩 M_z 作用下导致直圆柔性铰链产生沿 y 轴的线性变形 Dy ，其柔度表达式如下：

$$\frac{Dy}{M_z} = -\frac{12}{EbR} \left[\frac{2s^3(6s^2+4s+1)}{(2s+1)(4s+1)^2} + \frac{12s^4(2s+1)}{(4s+1)^2} \arctan \sqrt{4s+1} \right] \quad (23)$$

力 F_y 作用下由于弯矩导致直圆柔性铰链产生沿 y 轴的线性变形 Dy ，其柔度表达式如下：

$$\frac{D_y}{F_y} = \frac{12}{Eb} \left[\frac{s(24s^4 + 24s^3 + 22s^2 + 8s + 1)}{2(2s+1)(4s+1)^2} + \frac{(2s+1)(24s^4 + 8s^3 - 14s^2 - 8s - 1)}{2(4s+1)^2} \arctan \sqrt{4s+1} + \frac{p}{8} \right] \quad (24)$$

力 F_y 作用下由于剪切力导致直圆柔性铰链产生沿 y 轴的线性变形 D_y ，其柔度表达式如下：

$$\left(\frac{D_y}{F_y} \right)_d = \frac{1}{Gb} \left[\frac{2(2s+1)}{\sqrt{4s+1}} \arctan \sqrt{4s+1} - \frac{p}{2} \right] \quad (25)$$

3.5 沿 x 轴的线性变形 D_x

力 F_x 作用下由于拉伸或压缩导致直圆柔性铰链产生沿 x 轴的线性变形 D_x ，其柔度表达式如下：

$$\frac{D_x}{F_x} = \frac{1}{Eb} \left[\frac{2(2s+1)}{\sqrt{4s+1}} \arctan \sqrt{4s+1} - \frac{p}{2} \right] \quad (26)$$

4 与 J. M. PAROS 的设计计算公式的比较

本文给出的柔性铰链系列设计计算公式相对来说较为简洁。任取三组柔性铰链的材料和几何参

数如表 1 所示。分别运用 J. M. PAROS 的柔性铰链设计计算公式和本文给出的柔性铰链设计计算公式进行计算，得到表 2 中的计算结果。表中 P 代表运用 J. M. PAROS 的公式计算所得的结果，W 代表运用本文的公式计算所得的结果。计算结果表明在数值上两种方法所得的结果相等，但对于 a_z / F_y 和 D_y / M_z ，两种方法所得结果的符号相反，原因是 J. M. PAROS 的计算公式中没有统一受力和变形的方向。

表 1 柔性铰链的物理性能及几何参数

Table 1 Physical parameters and geometric parameters of flexure hinges

	E(Pa)	G(Pa)	b(mm)	t(mm)	R(mm)	q_m
1	2.000×10^{11}	8.000×10^{10}	6	0.3	0.4	90
2	1.875×10^{11}	6.360×10^{10}	15.72	2.16	1.89	62.3
3	9.326×10^{10}	3.296×10^{10}	7.68	0.892	3.465	36.2

表 2 柔性铰链柔度的计算结果(表中结果均为国际标准单位)

Table 2 Calculation results of compliance's of flexure hinges (In SI units)

	a_z / M_z	a_z / F_y	D_z / M_y	D_z / F_z	$(D_z / F_z)_d$	a_y / M_y
1(P)	1.369×10^{-1}	5.477×10^{-5}	2.116×10^{-7}	1.053×10^{-10}	3.967×10^{-9}	5.290×10^{-4}
1(W)	1.369×10^{-1}	-5.477×10^{-5}	2.116×10^{-7}	1.053×10^{-10}	3.967×10^{-9}	5.290×10^{-4}
2(P)	8.124×10^{-4}	1.359×10^{-6}	3.496×10^{-8}	7.484×10^{-11}	1.268×10^{-9}	2.089×10^{-5}
2(W)	8.124×10^{-4}	-1.359×10^{-6}	3.496×10^{-8}	7.484×10^{-11}	1.268×10^{-9}	2.089×10^{-5}
3(P)	4.589×10^{-2}	9.392×10^{-5}	1.954×10^{-6}	5.021×10^{-9}	1.328×10^{-8}	9.547×10^{-4}
3(W)	4.589×10^{-2}	-9.392×10^{-5}	1.954×10^{-6}	5.021×10^{-9}	1.328×10^{-8}	9.547×10^{-4}
	a_z / F_z	D_y / M_z	D_y / F_y	$(D_y / F_y)_d$	D_x / F_x	
1(P)	2.116×10^{-7}	5.477×10^{-5}	2.486×10^{-8}	3.967×10^{-9}	1.587×10^{-9}	
1(W)	2.116×10^{-7}	-5.477×10^{-5}	2.486×10^{-8}	3.967×10^{-9}	1.587×10^{-9}	
2(P)	3.496×10^{-8}	1.359×10^{-6}	2.720×10^{-9}	1.268×10^{-9}	4.302×10^{-10}	
2(W)	3.496×10^{-8}	-1.359×10^{-6}	2.720×10^{-9}	1.268×10^{-9}	4.302×10^{-10}	
3(P)	1.954×10^{-6}	9.392×10^{-5}	2.207×10^{-7}	1.328×10^{-8}	4.692×10^{-9}	
3(W)	1.954×10^{-6}	-9.392×10^{-5}	2.207×10^{-7}	1.328×10^{-8}	4.692×10^{-9}	

5 柔性铰链设计计算中应当注意的问题

按图 1 计算柔性铰链的变形，相对自由端是各个作用力所在的一端，而另一端为相对固定端。如

果将自由端和固定端弄错，就可能获得错误的结果。

在计算柔性铰链的变形时，规定 D_x 的方向与力 F_x 的方向相同； D_y 的方向与力 F_y 的方向相同； D_z 的方向与力 F_z 的方向相同； a_y 的方向与力矩

M_y 的方向相同; a_z 的方向与力矩 M_z 的方向相同。角变形和力矩符合右手螺旋法则。

计算中尤其需要注意力 F_y 作用下柔性铰链角变形 a_z 的符号和力矩 M_z 作用下柔性铰链线性变形 D_y 的符号。

6 结论

给出了一般柔性铰链的系列设计计算公式和直圆柔性铰链的系列设计计算公式。计算公式是精确的推导结果。由于选取了适当的参数,使其在表达上较为简洁而有利于柔性铰链刚度(柔度)的计算和分析。尤其是直圆柔性铰链的系列设计计算公式,在未作简化的情况下,给出了相当简单明了的表达式。与迄今沿用的 J. M. PAROS 的柔性铰链设计计算公式进行了计算比较,说明了设计计算公式的简洁性、准确性和全面性。最后,指出了柔性铰链设计计算中应当注意的受力及变形的位置、方向和符号问题。

参考文献:

- [1] Paros J. M, Weisboro L. How to design flexure hinges[J]. Machine Design, 1965, 37(27):151-157.
- [2] 薛实福, 李庆祥. 精密仪器设计[M]. 北京:清华大学出版社, 1991.
Xue Shifu, Li Qingxiang. Design of Precision Instruments [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1991.
- [3] Fredric E.Scire, E.Clayton Teague. Piezodriven 50- μ m range stage with subnanometer resolution[J]. Review of Scientific Instruments,1978, 49(12):1735-1740.
- [4] Tamio Tanikawa, Tatsuo Arai. Development of a micro-manipulation system having a two-fingered micro-hand[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation,1999, 15(1): 152-162.
- [5] Peng Gao, Shan-Min Swei, Zhejun Yuan. A new piezodriven precision micropositioning stage utilizing flexure hinges[J]. Nanotechnology,1999, 10:394-398.
- [6] 吴鹰飞, 李勇, 周兆英, 刘钦彦. 蠕动式 X-Y- 微动工作台的设计实现[J]. 中国机械工程, 2001, 12(3): 263-265.
Wu Yingfei, Li Yong, Zhou Zhaoying, Liu Qingyan. Design and Development of an inchworm type X-Y- micro stage[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 12(3):263-265
- [7] Ryuji Suyama, Kei Tanemoto, Yoshinari Kobayashi, et al. Autofocusing System of Optical Microscope Utilizing Electrostrictive Actuators[J]. Japanese Journal of Applied Physics,1991, 30(6):1290-1294.
- [8] Kenji Uchino. Electrostrictive Actuators: Materials and Applications[J]. Ceramic Bulletin,1986, 65(4):647-652.
- [9] Bi Zhang, Zhenqi Zhu, Bolin Zhang, et al. A Linear Piezomotor of High Stiffness and Nanometer Resolution[J]. Annals of the CIRP,1997, 46(1):305-308.
- [10] Y Okazaki. A micro-positioning tool post using a piezoelectric actuator for diamond turning machines[J]. Precision Engineering, 1990, 12(3):151-156.
- [11] S T Smith, D G Chetwynd, D K Bowen. Design and assessment of monolithic high precision translation mechanisms[J]. J.Phys.E:Sci.Instrum,1987, 20:977-983.

DESIGN OF FLEXURE HINGES

WU Ying-fei , ZHOU Zhao-ying

(Department of Precision Instruments and Mechanology, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract: This paper presents the compliance equations for rectangular single-axis hinges and right circular hinges. The equations are given in closed-form and concise expressions so that they are handy for design. Comparison is made between the present equations and those of widely used J. M. Paros' equations. Results indicate that the present equations are simple and effective, particularly for the right circular hinges. Some suggestions are made in regard to the design of flexure hinges.

Key words: flexure hinges; right circular hinges; spring rates of flexure hinges; compliances of flexure hinges