文章编号：1000-4750(2007)06-0021-04

结构物理参数的分频段加权辨识

*任宜春[1,2]，易伟建[1]

(1. 湖南大学土木工程学院，长沙 410082; 2. 长沙理工大学桥结学院，长沙 410076）

摘 要：利用小波分析多分辨率分析原理，建立线性系统多尺度动力平衡方程。将外荷载和线性系统在荷载作用下的响应作正交小波变换，得到各频段的小波系数，由多尺度动力平衡方程建立系统的参数识别方程。在不同频段根据系统的信噪比大小确定不同的加权值，对结构物理参数进行加权最小二乘辨识。该方法能较大地提高结构物理参数的识别精度，并且识别精度随着小波分解层次的增加而增大。

关键词：结构工程；系统辨识；小波多分辨分析；分频段加权；多尺度动力方程

中图分类号：TU311.3 **文献标识码**：A

IDENTIFICATION OF THE PHYSICAL PARAMETERS BY FREQUENCY BAND WEIGHTING APPROACH

*REN Yi-chun[1,2], YI Wei-jian[1]

(1. Institute of Civil Engineering Hunan University, Changsha 410082, China

2. Institute of Bridge and Structure Engineering , Changsha Science and Technology University , Changsha 410076, China)

Abstract: Based on wavelet multi-resolution analytical theory, differential equation of linear structural dynamic system was decomposed and dynamic time series were described in different scales. The loads and structural responses were transformed by orthogonal wavelet and the parameter identification equation was gained by wavelet coefficients on different frequency bands. The physical parameters were obtained by weighting least-square method. The weighing values were derived by the ratio of noise to signal on different frequency band. The numerical simulations show that the proposed method can improve the identification accuracy greatly and the accuracy is raised by the level of wavelet decomposition.

Key words: structural engineering; system identification; wavelet multi-resolution analysis; frequency band weighting approach; multi-scale dynamic equation

结构动力学系统辨识是动力学研究的逆问题，它利用系统在试验或运行中测得的输入和输出数据，采用系统辨识技术，建立反映系统本质动态特性的数学模型，并确定模型中的待定参数。结构动力学系统遵循牛顿力学基本定律，所以系统的理论模型往往是已知的，需要辨识的只是模型中某些待定的物理参数或系统的动力学特性参数。近四十年来，结构动力学系统辨识研究有了很大的进展，提出了许多辨识理论与算法，主要分为频域方法和时域方法[1]。动力系统在测试响应时不可避免地存在噪声，特别是土木工程结构具有低信噪比的特点，如何提高参数辨识精度一直是一个值得研究的课题。最常用的信号消噪方法是对信号进行频域滤波以及时域平均处理[2]，文献[3]在用时域法进行系统参数辨识时，选择振幅较高的采样点从而提高了识别的精度。文献[4]提出了一种基于虚拟响应信息提

收稿日期：2005-10-27; 修改日期：2006-04-14
基金项目：国家自然科学基金(50378034)；教育部博士点基金(20030532020)资助项目。
作者简介：*任宜春(1969)，女，湖南湘潭人，副教授，博士生，从事结构工程研究(E-mail: ryc_is_me@163.com);
易伟建(1954)，男，湖南长沙人，教授，博士，博导，副院长，从事结构工程研究(E-mail: hunuyi@public.cs.hn.cn).

取的信号去噪方法。国内外学者在研究系统识别方法时都十分注重测量噪声对识别的影响[5~7]。

对于输入、输出信息皆完备的线性参数识别系统来说，最小二乘法可一次性完成结构的物理参数识别。对于单自由度系统：

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t) \tag{1}$$

若已知系统输入的时程信息 $f(t)$ 和系统的输出时程信息 $x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t)$，则只需要时间段内任取三个采样点即可确定结构物理参数 m,c,k。但在实际问题中，系统输入输出时程信息不可避免地存在噪声，为了消除噪声的影响，可以采用扩展采样区间的方式，应用最小二乘法识别系统参数[1]。实际工程中多为白噪声，在整个频率上功率谱大小相同，而系统输入输出信号在不同的频段有不同大小的功率谱，也就是说，在不同的频段输入输出时程信息的信噪比不同。近年来，小波变换作为信号处理的一种手段，逐渐引起了各个领域研究人员的关注和重视[8]，特别是在系统识别中的应用越来越多[9~10]。多分辨分析是小波理论的一个重要概念，本文利用小波多分辨率分析原理，建立线性系统多尺度动力平衡方程，由多尺度动力平衡方程建立系统的参数识别方程。利用离散小波变换将输入输出信息分解到不同频段上，由小波系数构成识别方程的系数矩阵和输入向量，在不同频段上根据信噪比大小确定不同权值对系统物理参数进行加权最小二乘辨识。

1 多分辨率分析[8]

多分辨率分析又称为多尺度分析，是建立在函数空间概念上的理论。多分辨率分析不仅为正交小波基的构造提供了一种简单方法，也为正交小波变换的快速算法提供了理论依据。

空间 $L^2(R)$ 中的多分辨率分析是将 $L^2(R)$ 空间做逐级二分解产生一组逐级包含的子空间：

$$\cdots,V_0=V_1\oplus W_1,V_1=V_2\oplus W_2,\cdots,V_j=V_{j+1}\oplus W_{j+1},\cdots$$

j 是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整数，j 值越小空间越大。空间序列 $\{V_j\}_{j\in z}$ 满足如下条件：

(1) 单调性：$V_j\subset V_{j-1}$，对任意 $j\in Z$。

(2) 逼近性：$\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\},\bigcup_{j\in Z}V_j=L^2(R)$。

(3) 伸缩性：$\phi(t)\in V_j\Leftrightarrow\phi(t/2)\in V_{j+1}$；伸缩性体现了尺度的变化、逼近正交小波函数的变化和空间的变化具有一致性。

(4) 平移不变性：对任意 $k\in Z$，有 $\phi(2^{j}t)\in V_j\Rightarrow\phi(2^{j}t-k)\in V_j$。

(5) Riesz 基存在性：存在低通的平滑函数 $2^{-j/2}\phi(2^{-j}t)\in V_j$，使得它的整数移位集合 $\{\phi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\phi(2^{-j}t-k),k\in Z\}$ 构成 V_j 的 Riesz 基，称 $\phi(t)$ 为尺度函数。尺度函数 $\phi(x)$ 的伸缩和平移生成了嵌套的子空间 V_j。

V_j 称为尺度空间，W_j 为 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补空间，称为小波空间。同样存在带通函数 $2^{-j/2}\psi(2^{-j}t)\in W_j$，使得它的整数移位集合 $\{\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(2^{-j/2}t-k),k\in Z\}$ 构成 W_j 的 Riesz 基，$\psi(t)$ 即为小波函数。对空间 V_0 中占据的总频带 (0~π) 的信号 $x(t)$ 作小波变换即将信号变换到子空间：低频的 V_1 (频带 $0\sim\pi/2$) 和高频的 W_1 (频带 $\pi/2\sim\pi$)。经第二级分解后 V_1 又被分成低频的 V_2 (频带 $0\sim\pi/4$) 和高频的 W_2 (频带 $\pi/4\sim\pi/2$)……。其中高频带反映信号的细节，低频带反映信号的概貌。离散信号经过尺度 1，2，…，J 的分解，最终分解为 $d_1,d_2,\cdots,d_J,p_J$，它们分别包含了信号从高频到低频的不同频带的信息，所以被称为多分辨率分析。同时它们各自都包含了原信号的时间信息，因而是信号的时频表示。

2 结构动力系统多尺度分析

用正交小波函数 $\psi(t)$ 对单自由度系统动力方程(1)两端进行小波变换，并由小波变换的叠加性，得到：

$$mWT_{\ddot{x}}(a,b)+cWT_{\dot{x}}(a,b)+kWT_x(a,b)=WT_f(a,b) \tag{2}$$

根据多分辨率分析，式(2)中各项都可分解为第一尺度上的细节部分和概貌部分，即为：

$$m(d_{\ddot{x}}^1+p_{\ddot{x}}^1)+c(d_{\dot{x}}^1+p_{\dot{x}}^1)+k(d_x^1+p_x^1)=d_f^1+p_f^1 \tag{3}$$

其中，$d_{\ddot{x}}^1,d_{\dot{x}}^1,d_x^1,d_f^1$ 分别为 $\ddot{x}(t),\dot{x}(t),x(t),f(t)$ 在第一尺度的小波空间 W_1 上的投影(细节部分)，$p_{\ddot{x}}^1,p_{\dot{x}}^1,p_x^1,p_f^1$ 分别为 $\ddot{x}(t),\dot{x}(t),x(t),f(t)$ 在第一尺度的尺度空间 V_1 上的投影(概貌部分)。同理可继续将 $p_{\ddot{x}}^1,p_{\dot{x}}^1,p_x^1,p_f^1$ 向高尺度空间分解下去，直到第 j 尺度空间，得到：

$$m(d_{\ddot{x}}^1+d_{\ddot{x}}^2+\cdots+d_{\ddot{x}}^j+p_{\ddot{x}}^j)+c(d_{\dot{x}}^1+d_{\dot{x}}^2+\cdots+d_{\dot{x}}^j+p_{\dot{x}}^j)+$$
$$k(d_x^1+d_x^2+\cdots+d_x^j+p_x^j)=d_f^1+d_f^2+\cdots+d_f^j+p_f^j \tag{4}$$

其中 $d_{\ddot{x}}^j,d_{\dot{x}}^j,d_x^j,d_f^j$ 分别为 $\ddot{x}(t),\dot{x}(t),x(t),f(t)$ 在第 j 尺度的小波空间 W_j 上的投影(细节部分)， $p_{\ddot{x}}^j,p_{\dot{x}}^j$, p_x^j,p_f^j 分别为 $\ddot{x}(t),\dot{x}(t),x(t),f(t)$ 在第 j 尺度的尺度空间 V_j 上的投影(概貌部分)。

由小波变换在不同尺度上的正交性[8]可知，式(4)两边在各尺度上存在等价关系：

$$\begin{cases} md_{\ddot{x}}^1+cd_{\dot{x}}^1+kd_x^1=d_f^1 \\ md_{\ddot{x}}^2+cd_{\dot{x}}^2+kd_x^2=d_f^2 \\ \cdots \\ md_{\ddot{x}}^j+cd_{\dot{x}}^j+kd_x^j=d_f^j \\ mp_{\ddot{x}}^j+cp_{\dot{x}}^j+kp_x^j=p_f^j \end{cases} \tag{5}$$

上式可以写成参数识别标准方程：

$$H\theta=Z \tag{6}$$

其中： $H=\begin{bmatrix} d_{\ddot{x}}^1 & d_{\dot{x}}^1 & d_x^1 \\ d_{\ddot{x}}^2 & d_{\dot{x}}^2 & d_x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{\ddot{x}}^j & d_{\dot{x}}^j & d_x^j \\ p_{\ddot{x}}^j & p_{\dot{x}}^j & p_x^j \end{bmatrix}$,

$\theta=[m,c,k]$， $Z=[d_f^1,d_f^2,\cdots,d_f^j,p_f^j]^T$ 。

方程的加权最小二乘解为：

$$\hat{\theta}=(H^T\Lambda H)^{-1}H^T\Lambda Z \tag{7}$$

白噪声在各个频率段上功率谱大小相同，而系统输入输出信号在不同的频段有不同大小的功率谱，也就是说，在不同的频段输入输出时程信息的信噪比不同。于是可以各频率段的信噪比高低为原则构造加权矩阵 Λ，信噪比高的频率段上，加权值应大，否则加权值应小。同理可以建立多自由度系统的多尺度动力平衡方程，并得到其物理参数的分频加权最小二乘辨识。

3　数值算例

三自由度剪切型结构，在地震作用下其振动方程可以写为：

$$m_1\ddot{x}_1+c_1\dot{x}_1+c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_1x_1+ k_2(x_1-x_2)=-m_1\ddot{x}_0 \tag{8a}$$

$$m_2\ddot{x}_2+c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+c_3(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+ k_2(x_2-x_1)+k_3(x_2-x_3)=-m_2\ddot{x}_0 \tag{8b}$$

$$m_3\ddot{x}_3+c_3(\dot{x}_3-\dot{x}_2)+k_3(x_3-x_2)=-m_3\ddot{x}_0 \tag{8c}$$

将以上三式两边分别进行小波变换，得到各尺度上的动力平衡方程。当质量已知时，可写成参数识别标准方程： $H_1\theta_1=Z_1$ (9)

其中：

表 1　结构的物理参数

Table 1 Structural physical parameters

层号	1	2	3
质量	530	530	360
阻尼	2300	2250	2100
刚度	250000	230000	220000

$$H_1=\begin{bmatrix} d_{\dot{x}_1}^1 & d_{\dot{x}_1}^1-d_{\dot{x}_2}^1 & 0 & d_{x_1}^1 & d_{x_1}^1-d_{x_2}^1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{\dot{x}_1}^j & d_{\dot{x}_1}^j-d_{\dot{x}_2}^j & 0 & d_{x_1}^j & d_{x_1}^j-d_{x_2}^j & 0 \\ p_{\dot{x}_1}^j & p_{\dot{x}_1}^j-p_{\dot{x}_2}^j & 0 & p_{x_1}^j & p_{x_1}^j-p_{x_2}^j & 0 \\ 0 & d_{\dot{x}_2}^1-d_{\dot{x}_1}^1 & d_{\dot{x}_2}^1-d_{\dot{x}_3}^1 & 0 & d_{x_2}^1-d_{x_1}^1 & d_{x_2}^1-d_{x_3}^1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{\dot{x}_2}^j-d_{\dot{x}_1}^j & d_{\dot{x}_2}^j-d_{\dot{x}_3}^j & 0 & d_{x_2}^j-d_{x_1}^j & d_{x_2}^j-d_{x_3}^j \\ 0 & p_{\dot{x}_2}^j-p_{\dot{x}_1}^j & p_{\dot{x}_2}^j-p_{\dot{x}_3}^j & 0 & p_{x_2}^j-p_{x_1}^j & p_{x_2}^j-p_{x_3}^j \\ 0 & 0 & d_{\dot{x}_3}^1-d_{\dot{x}_2}^1 & 0 & 0 & d_{x_3}^1-d_{x_2}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & d_{\dot{x}_3}^j-d_{\dot{x}_2}^j & 0 & 0 & d_{x_3}^j-d_{x_2}^j \\ 0 & 0 & p_{\dot{x}_3}^j-p_{\dot{x}_2}^j & 0 & 0 & p_{x_3}^j-p_{x_2}^j \end{bmatrix} \qquad Z_1=\begin{bmatrix} -m_1d_{\ddot{x}_0}^1-m_1d_{\ddot{x}_1}^1 \\ \cdots \\ -m_1d_{\ddot{x}_0}^j-m_1d_{\ddot{x}_1}^j \\ -m_1p_{\ddot{x}_0}^j-m_1p_{\ddot{x}_1}^j \\ -m_2d_{\ddot{x}_0}^1-m_2d_{\ddot{x}_2}^1 \\ \cdots \\ -m_2d_{\ddot{x}_0}^j-m_2d_{\ddot{x}_2}^j \\ -m_2p_{\ddot{x}_0}^j-m_2p_{\ddot{x}_2}^j \\ -m_3d_{\ddot{x}_0}^1-m_3d_{\ddot{x}_3}^1 \\ \\ -m_3d_{\ddot{x}_0}^j-m_3d_{\ddot{x}_3}^j \\ -m_3p_{\ddot{x}_0}^j-m_3p_{\ddot{x}_3}^j \end{bmatrix}$$

$\theta_1 = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T$，

在不同的尺度上采用不同的加权系数，即可用加权最小二乘法进行参数辨识。

算例 1：三自由度剪切型结构各层刚度和阻尼系数见表 1，用 Wilson-θ 法计算结构在 El-centro 波作用下的响应，在结构响应中加入白噪声以模拟实际测量结果，噪声考虑为加性高斯白噪声，且认为噪声能量与最大响应幅值成正比，即取

$$\hat{x}_i = x_i + \alpha[\max(abs(x_i))]R \tag{10}$$

式中 $\hat{x}_i$ 是噪声污染后的响应测量值，x_i 是响应信号的理论计算值，R 是均值为 0，偏差为 1 的正态分布随机数，α 是噪声程度指标，α 取 3%，5%，8%三种情况，取 1000 个采样点，采样频率为 0.02 秒。先直接用响应和地震作用进行最小二乘辨识，然后用正交 db3 小波对响应和地震波作尺度 3 上的小波变换，得到 4 个频段的小波系数代入参数识别方程中，权值的确定根据地震波和白噪声在四个频段上的小波系数的均方值之比确定，由加权最小二乘辨识法得到结构物理参数的识别值。表 2 为①直接用响应辨识与②分频率加权辨识结果的比较，可以看出分频率加权辨识方法的误差明显减小。

算例 2：算例 1 中三自由度系统在地脉动作用下，同样用两种方法进行辨识，结果如表 3 所示，同样可以看出分频加权辨识明显提高了辨识精度。

数值算例还表明：改变小波函数如改用 db5 小波，物理参数识别精度改变不大，但是提高小波分解层次，如用 db3 小波进行尺度 5 上的小波变换，得到 6 个频段的小波系数，再用加权最小二乘法，其识别精度有更大的提高。

表 2 地震作用下两种方法的参数识别结果对比

Table 2 Comparison of parameter identification results under seismic load by two methods

阻尼刚度	识别误差/%					
	3%噪声		5%噪声		8%噪声	
	①	②	①	②	①	②
$c1$	10.94	6.95	53.70	23.47	142.03	57.24
$c2$	9.33	5.92	48.37	20.96	128.52	51.85
$c3$	8.25	5.07	45.63	20.15	122.70	49.68
$k1$	2.31	1.65	7.88	4.19	16.96	8.26
$k2$	2.27	1.64	7.43	4.02	15.80	7.80
$k3$	2.30	1.68	7.24	3.97	15.30	7.62

4 结论

实际工程中，系统输入输出时程信息不可避免地存在噪声，噪声多为白噪声，在整个频率上功率谱大小相同，而系统输入输出信号在不同的频段有不同大小的功率谱，也就是说，在不同的频段系统的信噪比不同。基于此本文利用小波变换的多分辨率分析原理建立了结构动力多尺度方程，将输入输出信息分解到不同频段上，在不同频段上根据信噪比大小确定不同权值对系统物理参数进行加权最小二乘辨识。数值算例表明该方法能较大地提高系统物理参数的识别精度，识别精度随着小波分解层次的增加而增大。本文将小波分析多分辨分析理论应用于结构物理参数识别中，提出了结构物理参数的分频段加权辨识方法，能较大地提高参数识别精度，有一定的工程实用价值。

表 3 地脉动作用下两种方法的参数识别结果对比

Table 3 Comparison of parameter identification results under ground motion by two methods

阻尼刚度	识别误差/%					
	3%噪声		5%噪声		8%噪声	
	①	②	①	②	①	②
$c1$	17.32	5.79	99.93	15.07	239.06	48.69
$c2$	12.52	4.59	78.96	12.96	191.63	41.18
$c3$	9.05	6.58	67.2	10.63	166.58	38.80
$k1$	0.50	0.08	1.59	0.46	2.48	1.15
$k2$	0.57	0.11	1.77	0.52	2.75	1.29
$k3$	0.63	0.12	1.90	0.56	2.92	1.39

参考文献：

[1] 李国强，李杰. 工程结构动力检测理论与应用[M]. 北京：科学出版社, 2002.
Li Guoqiang, Li Jie. Dynamic detection theory and its application to engineering structures [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese)

[2] Hjelmstad K D, Banan Mo R, Banan Ma.R. Time-domain parameter estimation algorithm for structures. Ⅰ: computational aspects [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1995, 121(3): 424~434.

[3] Zhao X, Xu Y L, Li J, Chen J. Hybrid identification method for multi-story buildings withunknown ground motion: theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 291: 215~239.

[4] 谢献忠. 结构动力学系统时域辨识理论与试验研究[D]. 湖南：湖南大学, 2005.
Xie Xianzhong. Theoretical and experimental research on dynamic system identification in time domain [D]. Hunan: Hunan University, 2005. (in Chinese)

(参考文献[5]~[10]转第 20 页)