

多体系统动力学 Euler-Lagrange 方程的非线性规划方法

张学胜, 陈万吉

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘 要: 对多体系统动力学 Euler-Lagrange 方程, 建立了约束非线性规划模型及相应的非线性规划问题的约束变尺度法。该方法有效地克服了积分过程的违约问题, 通用性强, 易于程序化。算例说明了方法的有效性。

关键词: 多体系统; Euler-Lagrange 方程; 微分/代数方程组; 约束非线性规划

中图分类号: O313.3 **文献标识码:** A

1 引言

多体系统动力学 Euler-Lagrange 方程是一组微分/代数方程组(DAES), 微分/代数方程组求解的主要问题之一是积分过程的违约问题, 即所求的数值解不满足约束方程。数值积分过程的违约问题是影响数值计算的关键。Baumgarte^[1]提出反馈控制方法进行违约修正, 而 Bayo^[2]采用罚函数方法实现违约修正。无论那种违约修正, 都需要引入修正系数。选择修正系数没有通用的方法, 而修正系数选择不当则会导致计算发散。本文给出一个克服违约问题的新方法, 通过引进松弛变量将 Euler-Lagrange 方程转化为带约束最优化问题, 再根据其特点提出相应优化问题的约束变尺度法。

2 多体系统动力学 Euler-Lagrange 方程

多体系统动力学 Euler-Lagrange 方程为^[3]

$$M(q, t)\ddot{q} + G(q, t)^T \lambda = F(q, \dot{q}, t) \quad (2.1a)$$

$$g(q, t) = 0 \quad (2.1b)$$

其中, $q \in R^n$ 为系统的广义坐标, $M(q, t) \in R^{n \times n}$ 为系统正定对称的广义质量阵,

收稿日期: 1998-06-14; 修订日期: 1998-10-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672015)

作者简介: 张学胜(1964), 男, 讲师, 博士, 河南镇平县人, 从事多体动力学研究

$g(q, t): R^{n_q} \times R \rightarrow R^{n_\lambda}$ 为广义坐标的约束方程左部, $G(q, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}} g(q, t) \in R^{n_\lambda \times n_q}$ 为约束的雅可比矩阵, $\lambda \in R^{n_\lambda}$ 为 Lagrange 乘子, $F(q, \dot{q}, t): R^{n_q} \times R^{n_q} \times R \rightarrow R^{n_q}$ 为广义力, 包括广义外力及速度二次项 ($n_\lambda < n_q$)。

根据文[4]“指标”的定义, 方程(2.1)是指标-3 微分/代数方程组, 存在求解上的困难。约束方程(2.1b)两次对 t 求导有

$$G(q, t)\dot{q} + g_t(q, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$G(q, t)\ddot{q} + Z(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (2.3)$$

其中, $Z(q, \dot{q}, t) = (G(q, t)\dot{q})_t + 2G_t(q, t)\dot{q} + g_{tt}(q, t)$

由方程(2.1a)可解出 $\ddot{q}$, 代入方程(2.3)得

$$G(q, t)M(q, t)^{-1}F(q, \dot{q}, t) - H(q, t)\lambda + Z(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (2.4)$$

其中, $H(q, t) = G(q, t)M(q, t)^{-1}G(q, t)^T$ 。

为便于求解, 引入速度变量 $\dot{q} = v$, 考虑下列方程

$$\dot{q} - v = 0 \quad (2.5a)$$

$$M(q, t)\dot{v} + G(q, t)^T \lambda - F(q, v, t) = 0 \quad (2.5b)$$

$$G(q, t)M(q, t)^{-1}F(q, v, t) - H(q, t)\lambda + Z(q, v, t) = 0 \quad (2.5c)$$

$$G(q, t)v + g_t(q, t) = 0 \quad (2.5d)$$

$$g(q, t) = 0 \quad (2.5e)$$

这是超定的微分/代数方程组(ODAES)。根据文[4]“指标”的定义, 方程(2.5)是指标-1 微分/代数方程组。

令 $x = [q^T, v^T, \lambda^T]^T \in R^{2n_q + n_\lambda}$, 应用多步数值积分方法

$$\dot{q}_n \equiv \rho(q_n) \equiv \frac{\alpha_0}{h} q_n + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^l \alpha_i q_{n-i} - \sum_{i=1}^l \beta_i \dot{q}_{n-i} \quad (2.6a)$$

$$\dot{v}_n \equiv \rho(v_n) \equiv \frac{\alpha_0}{h} v_n + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^l \alpha_i v_{n-i} - \sum_{i=1}^l \beta_i \dot{v}_{n-i} \quad (2.6b)$$

其中, $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ 是多步数值积分方法的系数, h 是时间步长, $t_n = t_{n-1} + h$, 对方程(2.5)进行离散, 得到

$$\psi_1(x_n) = 0 \quad (2.7a)$$

$$\psi_2(x_n) = 0 \quad (2.7b)$$

其中,

$$\psi_1(x_n) = \begin{bmatrix} \rho(q_n) - v_n \\ M(q_n, t_n)\rho(v_n) + G(q_n, t_n)^T \lambda_n - F(q_n, v_n, t_n) \end{bmatrix}$$

$$\psi_2(x_n) = \begin{bmatrix} G(q_n, t_n)M(q_n, t_n)^{-1}F(q_n, v_n, t_n) - H(q_n, t_n)\lambda_n + Z(q_n, v_n, t_n) \\ G(q_n, t_n)v_n + g_t(q_n, t_n) \\ g(q_n, t_n) \end{bmatrix}$$

3 求解多体系统动力学 Euler-Lagrange 方程的非线性规划方法

基于以上分析, 现引入一松弛变量 $y_n \in R^{2n}$, 考虑下列约束非线性规划问题

$$(P_n) \quad \min \frac{1}{2} y_n^T y_n \quad (3.1a)$$

$$\text{s.t.} \quad \psi_1(x_n) - y_n = 0 \quad (3.1b)$$

$$\psi_2(x_n) = 0 \quad (3.1c)$$

若方程(2.7)相容, 那么 x_n 是方程(2.7)解的充要条件是 $(x_n^T, y_n^T)^T = (x_n^T, 0^T)^T$ 是问题 (P_n) 的解。若方程(2.7)不相容, 那么可通过求解问题 (P_n) 得到方程(2.7)的近似解。

针对约束非线性规划问题 (P_n) 的特殊结构, 给出相应的约束变尺度法:

算法: (为简化表示, 省略问题 (P_n) 中变量下标)

步骤 1: 给定初值 $x_{(0)}$ 、 $y_{(0)}$, 令 $k=0$, 选取一个 $(2n_q + n_\lambda) \times (2n_q + n_\lambda)$ 阶的正定矩阵 $B_{(0)}$ 。

步骤 2: 计算问题 (P_n) 的函数值和梯度值, 构造下列以 d 、 e 为未知变量的二次规划子问题

$$(QP) \quad \min \frac{1}{2} d^T B_{(k)} d + \frac{1}{2} e^T e + y_{(k)}^T e \quad (3.2a)$$

$$\text{s.t.} \quad \nabla \psi_1(x_{(k)})^T d - e + \psi_1(x_{(k)}) - y_{(k)} = 0 \quad (3.2b)$$

$$\nabla \psi_2(x_{(k)})^T d + \psi_2(x_{(k)}) = 0 \quad (3.2c)$$

步骤 3: 解二次规划子问题 (QP) , 得到 $d_{(k)}$ 、 $e_{(k)}$ 。

步骤 4: 以 $d_{(k)}$ 、 $e_{(k)}$ 为方向, 以

$$W(x, y) = \frac{1}{2} y^T y + \sum_{i=1}^{2n_q} \mu_i |\psi_{1i}(x) - y_i| + \sum_{j=1}^{3n_\lambda} \mu_j |\psi_{2j}(x)| \quad (3.3)$$

为效益函数, 进行一维搜索, 确定 $x_{(k+1)}$ 、 $y_{(k+1)}$ 。其中 μ_i, μ_j 为罚参数, $\psi_{1i}(x)$ 是 $\psi_1(x)$ 的第 i 行元素, $\psi_{2j}(x)$ 是 $\psi_2(x)$ 的第 j 行元素, y_i 是向量 y 的第 i 行元素。

步骤 5: 给定正数 ε , 若满足下列二式

$$|\psi_{2j}(x_{(k+1)})| \leq \varepsilon, j=1, 3n_\lambda \quad (3.4a)$$

$$\frac{|y_{(k+1)}^T y_{(k+1)} - y_{(k)}^T y_{(k)}|}{y_{(k)}^T y_{(k)}} \leq \varepsilon \quad (3.4b)$$

则停止计算。否则转步骤 6。

步骤 6: 采用 BFGS 公式修正 $B_{(k)}$, 得到 $B_{(k+1)}$ 。令 $k=k+1$, 返回到步骤 2。

注: 求解二次规划子问题 (QP) 时, 可由(3.2b)求出

$$e = \nabla \psi_1(x_{(k)})^T d + \psi_1(x_{(k)}) - y_{(k)} \quad (3.5)$$

代入(3.2a), 以便简化计算。实质上 (QP) 的求解仅依赖 $(2n_q + n_\lambda)$ 个变量, $3n_\lambda$ 个约束, 并没有因为引入松弛变量 y 而增加计算量。

4 数值算例

例：考虑三摆模型(图 1)，选取图 1 所示的广义坐标，约束方程为

$$g(q, t) = \begin{bmatrix} g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 - 1.0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 1.0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - 1.0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

广义作用力为

$$F(q, \dot{q}, t) = (0, -m_1 g, 0, -m_2 g, 0, -m_3 g)^T \quad (4.2)$$

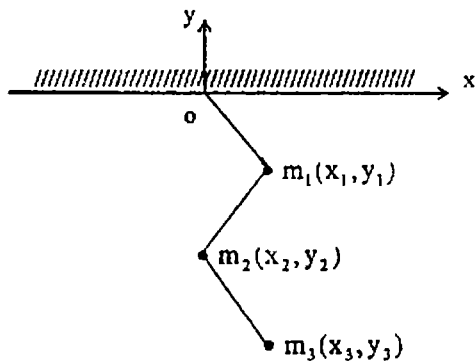


图 1 三摆模型

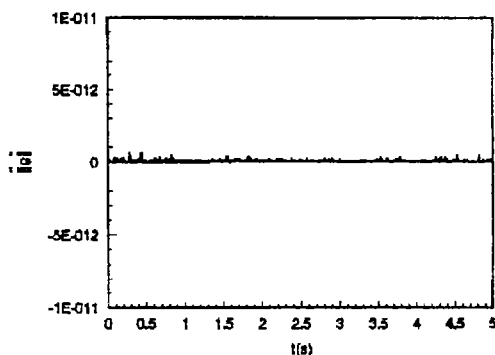


图 2 约束方程漂移 $\|g\|$ 的时间历程

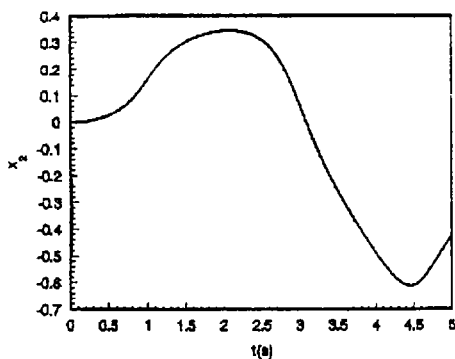


图 3 位置 x_2 的时间历程

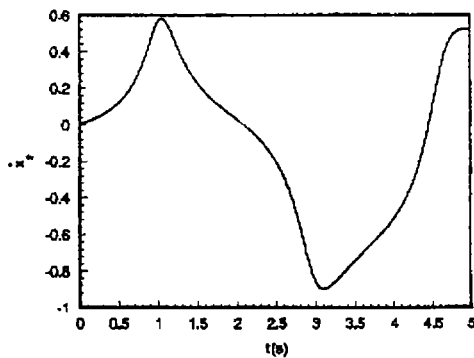


图 4 速度 $\dot{x}_2$ 的时间历程

为数值试验，取 $m_1 = 1$ ， $m_2 = 1$ ， $m_3 = 1$ ，重力加速度 $g = 1$ 。初始条件 $t_0 = 0$ 时， $x_1 = 0.5$ ， $y_1 = -\sqrt{0.75}$ ， $x_2 = 0$ ， $y_2 = -2\sqrt{0.75}$ ， $x_3 = 0.5$ ， $y_3 = -3\sqrt{0.75}$ ，速度均为零。时间 t_1 时的数值积分采用梯形公式，时间 t_1 以后的数值积分采用二阶向后差分公式。取 $\varepsilon = 10^{-4}$ ，时间步长 $h = 0.01$ ，双精度计算。平均迭代 11.36 次。

约束方程漂移 $\|g\| = (g(1)^2 + g(2)^2 + g(3)^2)^{1/2}$ 的大小是衡量算法的一个重要标准，图 2 给出了约束方程漂移 $\|g\|$ 的时间历程，图 3 给出了位置 x_2 的时间历程，图 4 给出了速度 $\dot{x}_2$ 的时间历程。

以上算例，不难看出本文算法的有效性。

参考文献:

- [1] Baumgarte.J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical system[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1972, 1:1-16.
- [2] Bayo.E etc.An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully Cartesian coordinates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1991, 92: 377-395.
- [3] 潘振宽, 赵维加等. 多体系统动力学微分/代数方程组数值方法[J]. 力学进展 1996, 26(1): 28-40.
- [4] Brean. K .E, Campbell. S. L, Petzold. L. R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations[M]. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc. 1989.

NONLINEAR PROGRAMMING METHOD FOR THE EULER-LAGRANGE EQUATIONS IN MULTIBODY SYSTEM DYNAMICS

ZHANG Xue-sheng , CHEN Wan-ji

(Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract: A constrained variable metric method for solving Euler-Lagrange equations in multibody system dynamics was presented. The framework was based on the conversion of the equations into a nonlinear programming problem. The algorithm overcomes effectively the problem of violating constraints in integral procedure. It is versatile and suitable for computerization. Numerical examples show that algorithm is numerically efficient.

Key words: multibody systems; Euler-Lagrange equations; differential-algebraic equations; constrained nonlinear programming

(上接 40 页)

THE NONLINEAR MAGNETO-ELASTIC VIBRATION OF THIN CYLINDRICAL SHELLS

HU Yu-da , BAI Xiang-zhong

(Department of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: In this paper, the nonlinear axisymmetric vibration equation of thin cylindrical shells in longitudinal magnetic field is derived. By means of perturbation-method and multi-scale method, an approximate analytic solution to the equation of the shell with two simply supported ends is obtained, and the frequency and the amplitude of vibration are discussed as well.

Key words: magneto-elastic; nonlinear; vibration; magnetic field; thin cylindrical shell