第 15 卷第 1 期　　工　程　力　学　　Vol. 15 No. 1
1998 年 2 月　　ENGINEERING MECHANICS　　Feb. 1998

一种新型厚薄板通用三角形广义协调元*

岑　松　　　龙志飞
(清华大学土木系，北京 100084)　　(中国矿大北研部，北京 100083)

提　要　本文提出了一种假设单元剪切应变场的新方法，基于广义协调理论构造了一个只有 9 个自由度的三角形厚薄板通用单元 TCGG-T9。数值算例表明：该单元具有自由度少，精度高，无剪切闭锁现象等特点，适用于从极薄板到厚板较大的范围。

关键词　剪切应变场，有限元，厚薄板通用，三角形广义协调元

一、引　　言

采用 Mindlin[1] 中厚板理论构造板弯曲单元已得到广泛的研究，其主要问题是如何避免剪切闭锁现象。降阶积分[2][3] 等一些方法虽然在一定程度上缓解了上述问题，但在使用上还是让人感到不便。将板的横向剪应变连同结点位移一起作为单元结点自由度，或是增加单元边界结点或内部结点数，将位移和剪应变及其高阶导数作为结点自由度，也都是构造此类位移板单元的有效方法[4][5]。但这些方法推导的单元，一方面不适用于单元之间剪应变有突变的情况；另一方面也使列式过于繁复。

利用广义协调的概念[6][7] 建立不闭锁的厚薄板通用弯曲单元已有多种方法[8][9][10][11][14]，但大多限于构造矩形单元，不能适用于复杂边界形状。而对于构造三角形单元却不能成功[12]。

本文提出了一种假设剪切应变场的新方案，并利用广义协调条件构造了一个 9 自由度的三角形单元。该法简便易行，列式简单，不增加单元的自由度。数值算例表明：所构造的单元精度较高，无剪切闭锁现象发生，适用于从薄板到厚板较大的范围。

*　国家自然科学基金，高校博士点基金及煤炭系统留学回国人员科技基金资助项目
本文收稿日期：1997 年 4 月

二、假设单元剪切应变场

厚薄板通用三角形单元(图1) 自由度定义如下:

$$\{q\}^e = [w_1 \quad \Psi_{x1} \quad \Psi_{y1} \quad w_2 \quad \Psi_{x2} \quad \Psi_{y2} \quad w_3 \quad \Psi_{x3} \quad \Psi_{y3}]^T \tag{1}$$

其中 w_i, Ψ_{xi}, Ψ_{yi}分别为角点i ($i=1, 2, 3$) 的挠度和转角。

1. 单元各边的剪应变

根据厚梁理论[4], 可以确定单元各边的横向剪应变如下:

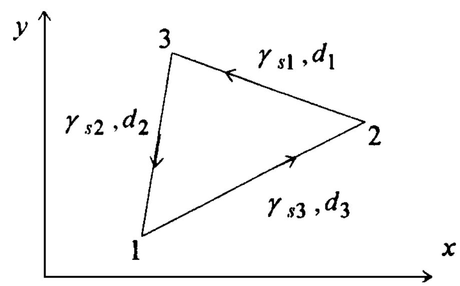


图 1

$$\gamma_{s1} = -\frac{\delta_1}{d_1}[2w_2 - w_3) + (c_1\Psi_{x2} - b_1\Psi_{y2} + (c_1\Psi_{x3} - b_1\Psi_{y3})]$$

$$\gamma_{s2} = -\frac{\delta_2}{d_2}[2w_3 - w_1) + (c_2\Psi_{x3} - b_2\Psi_{y3} + (c_2\Psi_{x1} - b_2\Psi_{y1})] \tag{2}$$

了问 $\gamma_{s3} = -\frac{\delta_3}{d_3}[2(w_1 - w_2) + (c_3\Psi_{x1} - b_3\Psi_{y1}) + (c_3\Psi_{x2} - b_3\Psi_{y2})]$

其中 γ_{s1}, γ_{s2}, γ_{s3}分别为23, 31, 12边的横向剪应变; d_1, d_2, d_3 分别为23, 31, 12边的边长

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2 \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad c_3 = x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\delta_i = \frac{\left(\frac{h}{d_i}\right)^2}{\frac{5}{6}(1-\mu) + 2\left(\frac{h}{d_i}\right)^2} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

其中 h 为板厚; μ 为泊松比。可见, 当 $h \to 0$时, $\delta_i \to 0$, 进而 $\gamma_{si} \to 0$。

令
$$\gamma_{si}^* = d_i\gamma_{si} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

$$\{\gamma_s^*\} = [\gamma_{s1}^* \quad \gamma_{s2}^* \quad \gamma_{s3}^*]^T \tag{6}$$

则有:
$$\{\gamma_s^*\} = [\Gamma^*]\{q\}^e \tag{7}$$

其中:

$$[\Gamma^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\delta_1 & -c_2\delta_1 & b_1\delta_1 & 2\delta_1 & -c_1\delta_1 & b_1\delta_1 \\ 2\delta_2 & -c_2\delta_2 & b_2\delta_2 & 0 & 0 & 0 & -2\delta_2 & -c_2\delta_2 & b_2\delta_2 \\ -2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 & 2\delta_3 & -c_3\delta_3 & b_3\delta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2. 角点剪应变的 γ_{xi}, γ_{yi} 确定

a）边线的方向余弦

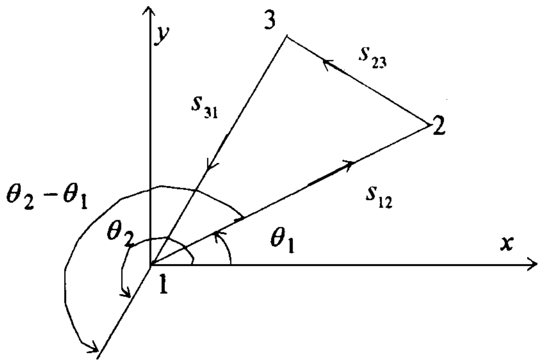


图 2

如图 2，各边的方向余弦为：

$$\begin{aligned} \cos(s_{12}, x) &= \frac{c_3}{d_3} & \cos(s_{23}, x) &= \frac{c_1}{d_1} & \cos(s_{31}, x) &= \frac{c_2}{d_2} \\ \cos(s_{12}, y) &= \frac{b_3}{d_3} & \cos(s_{23}, y) &= \frac{b_1}{d_1} & \cos(s_{31}, y) &= \frac{b_2}{d_2} \end{aligned} \tag{9}$$

b）结点的 γ_{xi}, γ_{yi}

对于结点 1，如图 2，令

$$R_1 = \frac{1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} = -\frac{d_2 d_3}{2A} \tag{10}$$

其中 A 为单元的面积，则有：

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{x1} \\ \gamma_{y1} \end{Bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} \cos(s_{31}, y) & -\cos(s_{12}, y) \\ -\cos(s_{31}, x) & \cos(s_{12}, x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s3} \\ \gamma_{s2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_2 & -b_3 \\ c_2 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^*_{s3} \\ \gamma^*_{s2} \end{Bmatrix} \tag{11a}$$

对于结点 2 和 3，同理可得：

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{x2} \\ \gamma_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ c_3 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^*_{s1} \\ \gamma^*_{s3} \end{Bmatrix} \tag{11b}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{x3} \\ \gamma_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^*_{s2} \\ \gamma^*_{s1} \end{Bmatrix} \tag{11c}$$

c）$\{\gamma_s\}$ 和 $\{\gamma_y\}$ 用 $\{\gamma^*_s\}$ 表示

由式（11）得：

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{x1} \\ \gamma_{x2} \\ \gamma_{x3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s1}^* \\ \gamma_{s2}^* \\ \gamma_{s3}^* \end{Bmatrix} \tag{12a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{y1} \\ \gamma_{y2} \\ \gamma_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{s1}^* \\ \gamma_{s2}^* \\ \gamma_{s3}^* \end{Bmatrix} \tag{12b}$$

3. 单元剪切应变场

设单元剪切应变场为线性场，则有：

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \gamma_{x1} L_1 + \gamma_{x2} L_2 + \gamma_{x3} L_3 \\ \gamma_y &= \gamma_{y1} L_1 + \gamma_{y2} L_2 + \gamma_{y3} L_3 \end{aligned} \tag{13}$$

将式（12）和式（7）代入上式得：

$$\{\gamma\} = [H^*][\Gamma^*]\{q\}^e = [B_s][q]^e \tag{14}$$

其中

$$\{\gamma\} = [\gamma_s \quad \gamma_y]^T \tag{15}$$

$$[H^*] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_3 L_2 - b_2 L_3 & b_1 L_3 - b_3 L_1 & b_2 L_1 - b_1 L_2 \\ c_3 L_2 - c_2 L_3 & c_1 L_3 - c_3 L_1 & c_2 L_1 - c_1 L_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$[B_s]$ 为剪切应变矩阵

$$[B_s] = [H^*][\Gamma^*] \tag{17}$$

可以证明，$\{\gamma\}$ 为只含有三个参数的不完全一次式，具有如下形式：

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \gamma_1 + \gamma_3 y \\ \gamma_y &= \gamma_1 - \gamma_3 x \end{aligned} \tag{18}$$

结点

三、假设单元位移场

1. 单元域内位移

单元的挠度场设为：

$$w = [F_\lambda]\{\lambda\} \tag{19}$$

其中

$$\{\lambda\} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 1 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6 \quad \lambda_7 \quad \lambda_8 \quad \lambda_9]^T \tag{20}$$

$$\begin{aligned} [F_\lambda] = [&L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_1 L_2 \quad L_2 L_3 \quad L_3 L_1 \\ &L_1(L_1 - \tfrac{1}{2})(L_1 - 1) \quad L_2(L_2 - \tfrac{1}{2})(L_2 - 1) \quad L_2(L_2 - \tfrac{1}{2})(L_2 - 1)] \end{aligned} \tag{21}$$

单元的转角场为：

$$\begin{Bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} - \gamma_s \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \gamma_v \end{Bmatrix} \tag{22}$$

2　单元的边界位移

在单元边界上，挠度 $\overline{w}$ 依据厚梁理论进行插值，而法向转角 $\overline{\Psi_n}$ 设为线性分布。例如在边界12上有：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{w}_{12} = & [L_1 + \mu_{e3} L_1 L_2 (L_1 - L_2)] w_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 [1 + \mu_{e3} (L_1 - L_2)] (c_3 \Psi_{x1} - b_3 \Psi_{y1}) \\
& + [L_2 - \mu_{e3} L_1 L_2 (L_1 - L_2)] w_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 [-1 + \mu_{e3} (L_1 - L_2)] (c_3 \Psi_{x2} - b_3 \Psi_{y2})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中 $\widetilde{\Psi}_n = -\dfrac{L_1}{d_3}(b_3 \Psi_{x1} + b_3 \Psi_{y1}) - \dfrac{L_2}{d_3}(b_3 \Psi_{x2} + b_3 \Psi_{y2})$

$$
\mu_{ei} = 1 - 2\delta_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{24}
$$

四、引入广义协调条件

采用同薄板单元相同的边—点协调方案[7]：

$$
\begin{aligned}
& w_i - \overline{w_i} = 0 \\
& \int_{d_i} (w - \overline{w}) \mathrm{d}s \qquad (i = 1, 2, 3) \\
& \int_{d_i} (\Psi - \overline{\Psi_n}) \mathrm{d}s = 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

将式(19)，(22)，(23)代入上式得：

$$
\{\lambda\} = [A]\{q\}^e \tag{26}
$$

其中

$$
[A] = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}c_3 & -\frac{1}{2}b_3 & 0 & -\frac{1}{2}c_3 & \frac{1}{2}b_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c_1 & -\frac{1}{2}b_1 & 0 & -\frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}b_1 \\
0 & -\frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c_2 & -\frac{1}{2}b_2
\end{bmatrix} \tag{27}
$$

$$
[A_1] \qquad\qquad [A_2] \qquad\qquad [A_3]
$$

$$
[A_1] = \begin{bmatrix}
-(\mu_{e2} + \mu_{e3}) & \frac{1}{2}(c_2 \mu_{e2} - c_3 \mu_{e3}) & \frac{1}{2}(b_3 \mu_{e3} - b_2 \mu_{e2}) \\
\mu_{e3} - r_2 \mu_{e2} & \frac{1}{2}(r_2 c_2 \mu_{e2} + c_3 \mu_{e3}) & -\frac{1}{2}(r_2 b_2 \mu_{e2} + b_3 \mu_{e3}) \\
\mu_{e2} + r_3 \mu_{e3} & \frac{1}{2}(r_3 c_3 \mu_{e3} - c_3 \mu_{e3}) & -\frac{1}{2}(r_3 b_3 \mu_{e3} - b_2 \mu_{e2})
\end{bmatrix} \tag{28}
$$

$$[A_2]=\begin{bmatrix}\mu_{e3}+r_1\mu_{e1} & \frac{1}{2}(r_1c_1\mu_{e1}-c_3\mu_{e3}) & -\frac{1}{2}(r_1b_1\mu_{e1}-b_3\mu_{e3})\\ -(\mu_{e3}+\mu_{e1}) & \frac{1}{2}(C_3\mu_{e3}-c_1\mu_{e1}) & \frac{1}{2}(b_1\mu_{e1}-b_3\mu_{e3})\\ \mu_{e1}-r_3\mu_{e3} & \frac{1}{2}(r_3c_3\mu_{e3}+c_1\mu_{e1}) & -\frac{1}{2}(r_3b_3\mu_{e3}+b_1\mu_{e1})\end{bmatrix} \tag{29}$$

$$[A_3]=\begin{bmatrix}\mu_{e2}-r_1\mu_{e1} & \frac{1}{2}(r_1c_1\mu_{e1}+c_2\mu_{e2}) & -\frac{1}{2}(r_1b_1\mu_{e1}+b_2\mu_{e2})\\ \mu_{e1}+r_2\mu_{e2} & \frac{1}{2}(r_2C_2\mu_{e2}-c_1\mu_{e1}) & -\frac{1}{2}(r_2b_2\mu_{e2}-b_1\mu_{e1})\\ -(\mu_{e1}+\mu_{e2}) & \frac{1}{2}(c_1\mu_{e1}-c_2\mu_{e2}) & \frac{1}{2}(b_2\mu_{e2}-b_1\mu_{e1})\end{bmatrix} \tag{30}$$

$$r_1=\frac{d_2^2-d_3^2}{d_1^1},\qquad r_2=\frac{d_3^2-d_1^2}{d_2^2},\qquad r_1=\frac{d_1^2-d_2^2}{d_3^2} \tag{31}$$

将式 (26) 代入式 (19) 得:

$$w=[N_w]\{q\}^e \tag{32}$$

其中

$$[N_w]=[N_{w1}\quad N_{wx1}\quad N_{wy1}\quad N_{w2}\quad N_{wx2}\quad N_{wy2}\quad N_{w3}\quad N_{wx3}\quad N_{wy3}] \tag{33}$$

$$N_{wi}=L_i-(\mu_{ej}+\mu_{em})L_i(L_i-\frac{1}{2})(L_i-1)+(\mu_{em}-r_j\mu_{ej})L_j(L_j-\frac{1}{2})(L_j-1)$$
$$+(\mu_{ej}+r_m\mu_{em})L_m(L_m-\frac{1}{2})(L_m-1)]$$

$$N_{wxi}=\frac{1}{2}[L_i(c_mL_j-c_jL_m)+(c_j\mu_{ej}-c_m\mu_{em})L_i(L_i-\frac{1}{2})(L_i-1)+(r_jc_j\mu_{ej}+c_m\mu_{em})]$$
$$L_j(L_j-\frac{1}{2})(L_j-1)+(r_mc_m\mu_{em}-c_j\mu_{ej})L_m(L_m-\frac{1}{2})(L_m-1)]$$

$$N_{wyi}=\frac{1}{2}[L_i(-b_mL_j+b_jL_m)-(b_j\mu_{ej}-b_m\mu_{em})L_j(L_j-\frac{1}{2})(L_i-1)-(r_jc_j\mu_{ej}+c_m\mu_{em})]$$
$$L_j(L_j-\frac{1}{2})(L_j-1)-(r_mb_m\mu_{em}-b_j\mu_{ej})L_m(L_m-\frac{1}{2})(L_m-1)]\quad(i,j,m=\overleftarrow{1,2,3})$$

五、单元刚度矩阵

1. 单元弯曲应变矩阵

单元的曲率和扭率为:

$$\{\kappa\}=[\kappa_x\quad\kappa_y\quad\kappa_{xy}]^T=[-\frac{\partial\Psi_x}{\partial x}\quad-\frac{\partial\Psi_y}{\partial y}\quad-(\frac{\partial\Psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_y}{\partial x})]^T \tag{34}$$

将式 (22) 代入上式得:

$$\{\kappa\}=[B_b]\{q\}^e \tag{35}$$

其中 $[B^b]$ 为单元的弯曲应变矩阵

$$[B_b]=[[B_{b1}]\quad[B_{b2}]\quad[B_{b3}]] \tag{36}$$

$$[B_{b1}] = \begin{bmatrix} B_{bi11} & B_{bi12} & B_{bi13} \\ B_{bi21} & B_{bi22} & B_{bi23} \\ B_{bi31} & B_{bi32} & B_{bi33} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)_e \tag{37}$$

$$B_{bi11} = -\frac{3}{4A^2}[-b_i^2(\mu_{ej} + \mu_{em})(2L_i - 1) + b_j^2(\mu_{em} - r_j\mu_{ej})(2L_j - 1)$$
$$+ b_m^2(\mu_{ej} - r_m\mu_{em})(2L_m - 1)]$$

$$B_{bi21} = -\frac{3}{4A^2}[-c_i^2(\mu_{ej} + \mu_{em})(2L_i - 1) + c_j^2(\mu_{em} - r_j\mu_{ej})(2L_j - 1)$$
$$+ c_m^2(\mu_{ej} - r_m\mu_{em})(2L_m - 1)]$$

$$B_{bi31} = -\frac{3}{4A^2}[-b_ic_i(\mu_{ej} + \mu_{em})(2L_i - 1) + b_{ji}(\mu_{em} - r_j\mu_{ej})(2L_j - 1)$$
$$+ b_mc_m(\mu_{ej} - r_m\mu_{em})(2L_m - 1)]$$

$$B_{bi12} = -\frac{3}{8A^2}[b_i^2(c_j\mu_{ej} + c_m\mu_{em})(2L_i - 1) + b_j^2(r_jc_j\mu_{ej} + c_m\mu_{em})(2L_j - 1)$$
$$+ b_m^2(r_mc_m\mu_{em} - c_j\mu_{ej})(2L_m - 1) + \frac{2}{3}b_i(b_jc_k - b_kc_j)]$$

$$B_{bi22} = -\frac{3}{8A^2}[c_i^2(c_j\mu_{ej} + c_m\mu_{em})(2L_i - 1) + c_j^2(r_jc_j\mu_{ej} - c_m\mu_{em})(2L_j - 1)$$
$$+ c_m^2(r_mc_m\mu_{em} - c_j\mu_{ej})(2L_m - 1)]$$

$$B_{bi23} = -\frac{3}{4A^2}[b_ic_i(c_j\mu_{ej} + c_m\mu_{em})(2L_i - 1) + b_jc_j(r_jc_j\mu_{ej} + c_m\mu_{em})(2L_j - 1)$$
$$+ b_mc_m(r_mc_m\mu_{em} - c_j\mu_{ej})(2L_m - 1) + \frac{1}{3}b_i(c_jc_k - b_kc_j)]$$

$$B_{bi13} = -\frac{3}{8A^2}[b_i^2(b_m\mu_{em} - b_j\mu_{ej})(2L_i - 1) - b_j^2(r_jb_j\mu_{ej} - b_m\mu_{em})(2L_j - 1)$$
$$- b_m^2(r_mb_m\mu_{em} - b_j\mu_{ej})(2L_m - 1)]$$

$$B_{bi23} = -\frac{3}{8A^2}[c_i^2(b_m\mu_{em} - b_j\mu_{ej})(2L_i - 1) - c_j^2(r_jb_j\mu_{ej} + b_m\mu_{em})(2L_j - 1)$$
$$- c_m^2(r_mb_m\mu_{em} - b_j\mu_{ej})(2L_m - 1) + \frac{2}{3}c_i(b_jc_m - b_mc_j)]$$

$$B_{bi33} = -\frac{3}{4A^2}[b_ic_i(b_m\mu_{em} - b_j\mu_{ej})(2L_i - 1) - b_jc_j(r_jb_j\mu_{ej} + b_m\mu_{em})(2L_j - 1)$$
$$- b_mc_m(r_mb_m\mu_{em} - b_j\mu_{ej})(2L_m - 1) + \frac{1}{3}c_i(b_jc_m - b_mc_j)] \quad (i, j, m = \overleftarrow{\underrightarrow{1, 2, 3}})$$

2　单元剪切应变矩阵

由式(17)得单元的剪切应变矩阵:

$$[B_s] = [[B_{s1}] \quad [B_{s2}] \quad [B_{s3}]] \tag{38}$$

其中

$$[B_{si}] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} 2\delta_j(b_iL_m - b_mL_i) - 2\delta_m(b_jL_i - b_iL_j) & -c_j\delta_j(b_iL_m - b_mL_i) - c_m\delta_m(b_jL_i - b_iL_j) & b_j\delta_j(b_iL_m - b_mL_i) + b_m\delta_m(b_jL_i - b_iL_j) \\ 2\delta_j(c_iL_m - c_mL_i) - 2\delta_m(c_jL_i - b_iL_j) & -c_j\delta_j(c_iL_m - c_mL_i) - c_m\delta_m(c_jL_i - c_iL_j) & b_j\delta_j(c_iL_m - c_mL_i) + b_m\delta_m(c_jL_i - c_iL_j) \end{bmatrix} \quad (i, j, m = \overleftarrow{1, 2, 3}) \tag{39}$$

3. 单元刚度矩阵

单元的刚度矩阵为:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} \tag{40}$$

其中

$$[K_{ij}] = \iint_{A^e}[B_{bi}]^T[D][B_{bj}]\,\mathrm{d}A + \iint_{A^e}[B_{si}]^T[C][B_{sj}]\,\mathrm{d}A \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{41}$$

$$[D] = D\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \qquad [C] = C\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \qquad C = \frac{5}{6}Gh = \frac{5D(1-\mu)}{h^2} \tag{43}$$

E 为板的弹性模量; G 为板的剪切模量。

此单元记为 TCGC- T9 单元。

由于采用同文 [13] 中薄板单元 GPL- T9 相同的挠度场和广义协调条件, 当板厚 $h \to 0$ 时, 本文推导的单元就退化为薄板单元 GPL- T9。

六、数 值 算 例

例 1　不同厚跨比 (h/l) 的四边简支和固支方板受均布荷载下的中心挠度和弯矩。设板边长为 l, $\mu = 0.3$, 采用图 3 所示网格, 计算结果见表 1 至表 3。

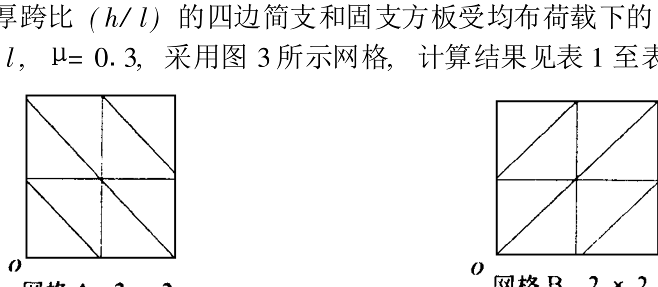
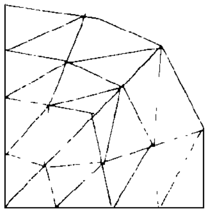


图 3　四分之一方板网格 (O 为方板中心)

例 2　不同厚跨比 (h/r) 的周边简支和周边固支圆板受均载作用下的中心挠度和弯矩。设圆板半径为 r, $L= 0.3$, 采用图 4 所示网格, 计算结果见表 4 至表 6。



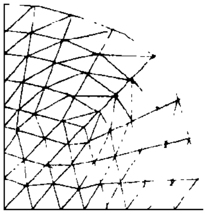


图 4 四分之一圆板网络

由表 1 至表 6 可见，本文单元具有较高的精度和较好的收敛性。当板厚趋向于薄板极限时，单元可以得到薄板解，不存在剪切闭锁现象；当板厚趋向于厚板时，单元得到的结果也很接近于 Mindlin 中厚板解，满足工程所需的精度要求。

表 1 均布荷载 q 作用下四边简支方板中心挠度(@ $\frac{ql^4}{100D}$)

厚跨比 h/l	网格数 / 网格类型	2@2	4@4	8@8	16@16	解析解
10^{-11}	A	0.3903	0.4026	0.4054	0.4061	0.4062
	B	0.3845	0.4019	0.4053	0.4060	
0.001	A	0.3903	0.4026	0.4054	0.4061	0.4062
	B	0.3845	0.4019	0.4053	0.4060	
0.01	A	0.3904	0.4027	0.4056	0.4062	0.4062
	B	0.3846	0.4020	0.4054	0.4061	
0.1	A	0.4047	0.4190	0.4243	0.4264	0.4273
	B	0.4008	0.4187	0.4244	0.4265	
0.15	A	0.4231	0.4422	0.4499	0.4526	0.4536
	B	0.4237	0.4463	0.4506	0.4528	
0.20	A	0.4501	0.4761	0.4861	0.4893	0.4906
	B	0.4580	0.4801	0.4876	0.4897	
0.25	A	0.4864	0.5205	0.5328	0.5364	0.5379
	B	0.5040	0.5278	0.5352	0.5372	
0.30	A	0.5324	0.5752	0.5898	0.5941	0.5956
	B	0.5619	0.5864	0.5935	0.5952	
0.35	A	0.5880	0.6401	0.6573	0.6622	0.6641
	B	0.6316	0.6560	0.6624	0.6638	

表 2　均布荷载 q 作用下四边固支方板中心挠度($@\frac{ql^4}{100D}$)

厚跨比 h/l	网格数 / 网格类型	2@2	4@4	8@8	16@16	解析解
10^{-11}	A	0.0978	0.1187	0.1245	0.1260	0.1265
	B	0.1186	0.1246	0.1263	0.1265	
0.001	A	0.0978	0.1187	0.1246	0.1260	0.1265
	B	0.1186	0.1246	0.1263	0.1265	
0.01	A	0.0979	0.1188	0.1247	0.1262	0.1265
	B	0.1188	0.1248	0.1264	0.1266	
0.1	A	0.1117	0.1374	0.1461	0.1492	0.1499
	B	0.1378	0.1442	0.1477	0.1496	
0.15	A	0.1299	0.1622	0.1737	0.1774	0.1798
	B	0.1616	0.1706	0.1758	0.1779	
0.20	A	0.1569	0.1973	0.2115	0.2157	0.2167
	B	0.1959	0.2082	0.2144	0.2165	
0.25	A	0.1932	0.2426	0.2593	0.2641	0.2675
	B	0.2413	0.2566	0.2632	0.2652	
0.30	A	0.2392	0.2979	0.3171	0.3226	0.3227
	B	0.2982	0.3159	0.3224	0.3241	
0.35	A	0.2947	0.3633	0.3852	0.3914	0.3951
	B	0.3670	0.3859	0.3919	0.3933	

表 3　均布荷载 q 作用下四边简支方板中心弯矩($@\frac{ql^2}{10}$)

厚跨比 h/l	网格数 / 网格类型	2@2	4@4	8@8	16@16	解析解
10^{-11}	A	0.4918	0.4845	0.4813	0.4797	
	B	0.5022	0.4800	0.4781	0.4784	
0.001	A	0.4918	0.4845	0.4813	0.4797	
	B	0.5022	0.4800	0.4781	0.4784	
0.01	A	0.4920	0.4847	0.4814	0.4798	
	B	0.5026	0.4807	0.4789	0.4791	
0.1	A	0.5115	0.4973	0.4866	0.4814	
	B	0.5304	0.4998	0.4860	0.4809	
0.15	A	0.5269	0.5031	0.4876	0.4815	0.4789
	B	0.5485	0.5054	0.4871	0.4810	

0.20	A	0.5407	0.5068	0.4881	0.4815
	B	0.5637	0.5094	0.4877	0.4811
0.25	A	0.5522	0.5090	0.4884	0.4815
	B	0.5764	0.5121	0.4880	0.4811
0.30	A	0.5612	0.5105	0.4885	0.4816
	B	0.5871	0.5140	0.4882	0.4811
0.35	A	0.5681	0.5114	0.4886	0.4816
	B	0.5959	0.5153	0.4883	0.4811

表4 均布荷载 q 作用下周边简支圆板中心挠度(@ $\frac{qr^4}{D}$)

网格 / 厚跨比 h/r	A 24 个单元	B 96 个单元	解析解
10^{-11}	0.063546(-0.24%)	0.063660(-0.07%)	0.063702
0.001	0.063546(-0.24%)	0.063660(-0.07%)	0.063702
0.01	0.063550(-0.25%)	0.063664(-0.07%)	0.063709
0.1	0.064043(-0.58%)	0.064218(-0.30%)	0.064416
0.15	0.064750(-0.86%)	0.065026(-0.43%)	0.065309
0.20	0.065807(-1.13%)	0.066210(-0.52%)	0.066559
0.25	0.067227(-1.37%)	0.067769(-0.58%)	0.068166
0.30	0.069019(-1.58%)	0.069698(-0.62%)	0.070130
0.35	0.071185(-1.75%)	0..071993(-0.63%)	0.072452

表5 均布荷载 q 作用下周边固支圆板中心挠度(@ $\frac{qr^4}{D}$)

网格 / 厚跨比 h/r	A 24 个单元	B 96 个单元	解析解
10^{-11}	0.014480(-7.32%)	0.015334(-1.86%)	0.015625
0.001	0.014480(-7.32%)	0.015334(-1.86%)	0.015625
0.01	0.014483(-7.35%)	0.015337(-1.89%)	0.015632
0.1	0.014911(-8.74%)	0.015857(-2.95%)	0.016339
0.15	0.015573(-9.63%)	0.016655(-3.35%)	0.017232
0.20	0.016596(-10.20%)	0.017834(-3.51%)	0.018482
0.25	0.017993(-10.43%)	0.019391(-3.47%)	0.020089
0.30	0.019770(-10.36%)	0.021318(-3.34%)	0.022054
0.35	0.021927(-10.04%)	0.023612(-3.13%)	0.024375

表6 均布荷载 q 作用下周边简支圆板中心弯矩(@ qr^2)

厚跨比 h/r \ 网格	A 24 个单元	B 96 个单元	解析解
10^{-11}	0.21000(1.82%)	0.20733(0.52%)	
0.001	0.21000(1.82%)	0.20733(0.52%)	
0.01	0.21001(1.82%)	0.20735(0.53%)	
0.1	0.21119(2.40%)	0.20813(0.91%)	
0.15	0.21226(2.91%)	0.20848(1.08%)	0.20625
0.20	0.21322(3.38%)	0.20869(1.18%)	
0.25	0.21400(3.76%)	0.20882(1.25%)	
0.30	0.21461(4.05%)	0.20890(1.28%)	
0.35	0.21510(4.29%)	0.20896(1.31%)	

七、结　论

本文提出了一种假设剪切应变场的新方法,采用同薄板单元相同的广义协调条件,构造了一个只有 9 个自由度的三角形厚薄板通用广义协调元 TCGG-T9。数值算例表明:该单元原理简明,列式简单,自由度少,精度与收敛性较高,是一个性能优良的单元,证明了本文所提的方法是可行的。目前文献中尚无同类单元。

本文所提出的方法具有普遍性,可以用来构造精度更高的矩形和四边形单元。

参 考 文 献

1 R D Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. JAM (Journal of Applied Mechanics), 1951; 18: 31

2 O C Zienkiewicz, E Hinton. Reduced integration, function smoothing and non- conformity in finite element analysis. Journal of Franklin Institute, 1976; 302(5- 6): 443- 461

3 O C Zienkiewicz, R L Taylor and J M Too. Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells. Int. J. Num. Meth. Eng, 1971; 3: 275- 290

4 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981

5 李志飙. 板弯曲单元及其在高层建筑结构分析中的应用. 浙江大学博士学位论文, 1996

6 龙驭球, 辛克贵. 广义协调元. 土木工程学报, 1987; 20(1): 1- 14

7 龙驭球. 广义协调法述评. 长沙: 第二届全国结构工程学术会议论文集, 1993: 1- 11

8 Long Yuqiu, Xi Fei. A universal method for including shear deformation in the thin plate elements. Int. J. Num. Meth. Eng, 1992; 34: 171- 177
9 Long Yuqiu, Zhao Junqing. A generalized conforming element for thick/ thin plates and shallow shells. The 2nd East Asia- Pacific Conference on Structural Engineering and Construction. Chiang Mai, Thailand. Jan. 11- 13, 1989: 1062- 1067
10 Bu Xiaoming, Long Yuqiu. A Method for derivation of rectangular displacement- based element of thick/thin plates. Acta Mecanica Silica. 1993; 9(2): 163- 170
11 龙志飞. 完全不闭锁的厚板矩形单元. 工程力学, 1992; 9(1): 88- 93
12 岑松. 引入广义泡状型位移场影响的厚板单元. 清华大学硕士学位论文, 1997
13 Long Yuqiu, Bu Xiaoming, Long Zhifei and Xu Yin. Generalized conforming plate bending elements using point and line compatibility conditions. Computers & Structures, 1995; 55(4): 717- 728
14 龙驭球. 新型有限元引论. 北京: 清华大学出版社, 1992

A NEW TRIANGULAR GENERALIZED CONFORMING ELEMENT FOR THIN- THICK PLATES

Cen Song (Tsinghua University, 100084)
Long Zhifei (China University of Mining & Technology, 100083)

Abstract In this paper, a new simple method considering the influence of shearing deformation in plate bending problem is proposed. According to this method and several generalized conforming conditions, a new triangular element with only 9-D. O. F. for both thin and thick plates is constructed. Numerical examples show that the element is effective for a large range of thickness-span ratio from very thin plate to thick plate.

Key words shearing strain field, finite element, thin-thick plates, triangular generalized conforming element