第 14 卷第 3 期　　工　程　力　学　　Vol. 14No. 3
1997 年 8 月　　ENGINEERING MECHANICS　　Aug. 1997

四边形单元面积坐标的微分和积分公式*

龙志飞　　李聚轩　　岑　松　　龙驭球
(中国矿业大学北京研究生部, 北京 100083)　　(清华大学土木系, 北京 100084)

提　要　构造四边形单元时, 应用面积坐标方法有其优点。文献[1]系统地论述了四边形单元面积坐标理论, 本文是文献[1]的续篇, 补充论述采用四边形单元面积坐标时的微分和积分公式。采用三角形单元面积坐标时的微分和积分公式是其特殊情况。应用面积坐标方法时, 易于得出四边形单元刚度矩阵的积分显式, 无需依赖于数值积分, 这个优点是采用四边形等参坐标时所不具备的。

关键词　有限元, 四边形元, 面积坐标, 微分和积分公式

一、引　　言

构造四边形单元时, 通常采用等参坐标方法, 该法有许多优点, 但它一般不能得出四边形单元刚度矩阵的积分显式, 而必须采用数值积分, 则是美中不足之处。

文献[1]提出四边形单元面积坐标理论, 为构造四边形单元开辟一条新途径。作为它的续篇, 本文补充采用四边形单元面积坐标方法时的微分和积分公式, 并沿用文献[1]中的符号。

二、微　分　公　式

四边形单元中任一点 P 有四个面积坐标分量 L_1, L_2, L_3, L_4。它们与直角坐标 x, y 的变

* 国家自然科学基金、高校博士点基金和煤炭系统留学回国人员科技基金资助项目
本文收到日期: 1996 年 5 月

换关系为

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

利用两种坐标的变换式(1),即可导出两种坐标中一阶导数和二阶导数的变换式如下。

(1) 一阶导数的变换式

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}\{\partial\} \tag{2}$$

$$\{\partial\} = \left[\frac{\partial}{\partial L_1} \quad \frac{\partial}{\partial L_2} \quad \frac{\partial}{\partial L_3} \quad \frac{\partial}{\partial L_4}\right]^T \tag{3}$$

(2) 二阶导数的变换式

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [T]\{\partial^2\} \tag{4}$$

其中

$$\{\partial^2\} = \left[\frac{\partial^2}{\partial L_1^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_3^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_4^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_2 \partial L_3} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_3 \partial L_4} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_4 \partial L_1} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_3} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_2 \partial L_4}\right]^T \tag{5}$$

$$[T] = \frac{1}{4A^2}\left[\begin{matrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_4^2 \\ 2b_1c_1 & 2b_2c_2 & 2b_3c_3 & 2b_4c_4 \end{matrix}\right.$$
$$\begin{matrix} 2b_1b_2 & 2b_2b_3 & 2b_3b_4 & 2b_4b_1 \\ 2c_1c_2 & 2c_2c_3 & 2c_3c_4 & 2c_4c_1 \\ 2(b_1c_2 + b_2c_1) & 2(b_2c_3 + b_3c_2) & 2(b_3c_4 + b_4c_3) & 2(b_4c_1 + b_1c_4) \end{matrix} \tag{6}$$
$$\left.\begin{matrix} 2b_1b_3 & 2b_2b_4 \\ 2c_1c_3 & 2c_2c_4 \\ 2(b_1c_3 + b_3c_1) & 2(b_2c_4 + b_4c_2) \end{matrix}\right]$$

三、法向导数和切向导数

令 n_i 和 s_i 分别表示四边形单元第 i 边的法向和切向(图 1)。各边边长为

$$l_i = \sqrt{b_i^2 + c_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{7}$$

各边法向余弦为

$$(n_i, x) = -\frac{b_i}{l_i} \qquad (n_i, y) = -\frac{c_i}{l_i} \tag{8}$$

各边切向余弦为

$$(s_i, x) = \frac{c_i}{l_i} \qquad (s_i, y) = -\frac{b_i}{l_i} \tag{9}$$

各边法向导数为

$$\frac{\partial}{\partial n_i} = -\frac{1}{l_i}\left(b_i\frac{\partial}{\partial x} + c_i\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{1}{l_i}[b_i \quad c_i]\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2A\,l_i}[b_i \quad c_i]\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\{\partial\} \tag{10}$$

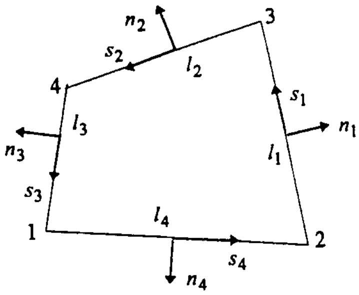

图 1

各边切向导数为

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{1}{l_i}\left(c_i\frac{\partial}{\partial x} - b_i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{l_i}[c_i \quad -b_i]\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A\,l_i}[c_i \quad -b_i]\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\{\partial\} \tag{11}$$

四、面积分的基本公式

在四边形单元中, 求面积坐标任意幂函数 $L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q$ 在单元上的面积分时, 可应用下列两个等价的基本积分公式:

$$\iint L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q \mathrm{d}A = \frac{m!\,n!\,p!\,q!}{(m+n+p+q+2)!}2A\,\cdot$$

$$\cdot\left[(1-g_1)^{m+n+1}\sum_{k=0}^{q}\sum_{j=0}^{p}C_{m+q-k}^{m}C_{n+p-j}^{n}C_{k+j}^{k}g_2^k(1-g_2)^j g_1^{p+q-k-j}\right. \tag{A}$$

$$\left.+\,g_1^{p+q+1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_{m+q-k}^{q}C_{n+p-j}^{p}C_{k+j}^{k}g_2^k(1-g_2)^j(1-g_1)^{m+n-k-j}\right]$$

$$\iint L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q \mathrm{d}A = \frac{m!\,n!\,p!\,q!}{(m+n+p+q+2)!}2A\,\cdot$$

$$\cdot\left[(1-g_2)^{n+p+1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{q}C_{n+m-k}^{n}C_{p+q-j}^{p}C_{k+j}^{k}(1-g_1)^k g_1^j g_2^{m+q-k-j}\right. \tag{B}$$

$$\left.+\,g_2^{m+q+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}C_{m+n-k}^{m}C_{q+p-j}^{q}C_{k+j}^{k}(1-g_1)^k g_1^j(1-g_2)^{n+p-k-j}\right]$$

其中

$$C_k^i = \frac{k!}{(k-i)!\,i!} \tag{12}$$

实际上, 如果在式(A)中进行循环替换, 即将(m, n, p, q)依次换成(n, p, q, m), 将$(g_1, g_2, 1-$

g_1, 1- g_2) 依次换成(g_2, 1- g_1, 1- g_2, g_1), 则得到式(B)。

如果四边形单元退化为三角形单元, 例如, 当 $g_1 = g_2 = 0$ 时, 结点 1 和 2 互相重合, $L_4 = 0$, $q = 0$, 代入式(A)或(B)后, 即得到三角形面积坐标任意幂函数的著名面积分公式如下: [2]

$$\iint_A L_1^m L_2^n L_3^p \mathrm{d}A = \frac{m!\,n!\,p!}{(m+n+p+2)!}2A \tag{13}$$

五、低阶幂函数的面积分公式

为了应用上的方便, 根据面积分基本公式(A)或(B), 列出四边形单元面积坐标低阶幂函数(由 1 阶到 3 阶) 在单元上的面积分公式如下。

(1) 一阶项(4 个, 1 组)

$$\iint_A \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \mathrm{d}A = \frac{A}{3} \begin{matrix} 1-(1-g_2)g_1 \\ 1-g_1g_2 \\ 1-g_2(1-g_1) \\ 1-(1-g_1)(1-g_2) \end{matrix} \tag{14}$$

(2) 二阶项(10 个, 3 组)

$$\iint_A \begin{matrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_4^2 \end{matrix} \mathrm{d}A = \frac{A}{6} \begin{matrix} (1-g_1)^2 + g_1g_2[(1-g_1)+g_2] \\ (1-g_2)^2 + g_2(1-g_1)[(1-g_2)+(1-g_1)] \\ g_1^2 + (1-g_1)(1-g_2)[g_1+(1-g_2)] \\ g_2^2 + (1-g_2)g_1[g_2+g_1] \end{matrix} \tag{15}$$

$$\iint_A \begin{matrix} L_1L_2 \\ L_2L_3 \\ L_3L_4 \\ L_4L_1 \end{matrix} \mathrm{d}A = \frac{A}{12} \begin{matrix} (1-g_1)+2(1-g_2)g_1g_2 \\ (1-g_2)+2g_1g_2(1-g_1) \\ g_1+2g_2(1-g_1)(1-g_2) \\ g_2+2(1-g_1)(1-g_2)g_1 \end{matrix} \tag{16}$$

$$\iint_A \begin{matrix} L_1L_3 \\ L_2L_4 \end{matrix} \mathrm{d}A = \frac{A}{12} \begin{matrix} (1-g_2)-g_1+2g_1g_2 \\ g_1-g_2+2g_2(1-g_1) \end{matrix} \tag{17}$$

(3) 三阶项(20 个, 5 组)

在上列积分公式(14)–(17)中, 如果已知每组中第 1 行公式, 则该组中的其他行公式可利用循环替换($g_1 \to g_2 \to 1-g_1 \to 1-g_2 \to g_1$) 依次写出。为了节省篇幅, 以后在每组中只列出第 1 行公式。

$$\iint_A L_1^3 \mathrm{d}A = \frac{A}{10}\{(1-g_1)^3 + g_1g_2[(1-g_1)^2 + (1-g_1)g_2 + g_2^2]\} \tag{18}$$

$$\iint_A L_1^2 L_2 \mathrm{d}A = \frac{A}{30}\{(1-g_1)^2 + 2g_1g_2(1-g_1) + g_2^2 g_1(2+g_1) - 3g_2^3 g_1\} \tag{19}$$

$$\iint_A L_1^2 L_3 \mathrm{d}A = \frac{A}{30}\{(1-g_1)^2 - g_2(1-g_1)(1-2g_1) + g_2^2 g_1^2\} \tag{20}$$

$$\iint_A L_1^2 L_4 \mathrm{d}A = \frac{A}{30}\{3g_1(1-g_1)^2 + g_2(1-g_1)[(1-g_1)^2+2g_1^2] + g_1^2 g_2^2\} \tag{21}$$

$$\iint_A L_1 L_2 L_3 \mathrm{d}A = \frac{A}{60}\{(1-g_2) - g_1 + 3g_1 g_2 - 2g_1^2 g_2^2\} \tag{22}$$

六、边积分的基本公式

在四边形单元中, 求面积坐标任意幂函数在任一边 $L_i = 0(i = 1, 2, 3, 4)$ 上的边积分时, 可应用下列基本积分公式:

在边12($L_4 = 0$) 上

$$\int_l L_1^m L_2^n L_3^p \mathrm{d}s = \frac{m!\,n!\,p!}{(m+n+p+1)!} g_2^m g_1^p \sum_{k=0}^{n} (1-g_1)^{n-k}(1-g_2)^k C_{p+n-k}^{p} C_{m+k}^{m} \tag{C-1}$$

在边23($L_1 = 0$) 上

$$\int_l L_2^n L_3^p L_4^q \mathrm{d}s = \frac{n!\,p!\,q!}{(n+p+q+1)!} (1-g_1)^n g_2^q \sum_{k=0}^{p} (1-g_2)^{p-k} g_1^k C_{q+p-k}^{q} C_{n+k}^{n} \tag{C-2}$$

在边34($L_2 = 0$) 上

$$\int_l L_3^p L_4^q L_1^m \mathrm{d}s = \frac{p!\,q!\,m!}{(p+q+m+1)!} (1-g_2)^p (1-g_1)^m \sum_{k=0}^{q} g_1^{q-k} g_2^k C_{m+q-k}^{m} C_{p+k}^{p} \tag{C-3}$$

在边41($L_3 = 0$) 上

$$\int_l L_4^q L_1^m L_2^n \mathrm{d}s = \frac{q!\,m!\,n!}{(q+m+n+1)!} g_1^q (1-g_2)^n \sum_{k=0}^{m} g_2^{m-k}(1-g_1)^k C_{n+m-k}^{n} C_{q+k}^{q} \tag{C-4}$$

其中 s 是边 jk 上的无量纲坐标, 在 j 点为零, 在 k 点为 1。

实际上, 如果在式(C- 1) 中进行循环替换, 则依次可得出式(C- 2) 、(C- 3) 和(C- 4)。

如果四边形单元退化为三角形单元, 例如, 当 $g_1 = g_2 = 0$ 时, 结点 1 和 2 互相重合, $L_4 = 0$, $q = 0$, 代入式(C- 2)、(C- 3)、(C- 4) 后, 即得到三角形面积坐标幂函数的边积分公式如下:

$$\begin{aligned}
&\int_l L_2^n L_3^p \mathrm{d}s = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!} \qquad (\text{在边 } L_1 = 0 \text{ 上}) \\
&\int_l L_3^p L_1^m \mathrm{d}s = \frac{p!\,m!}{(p+m+1)!} \qquad (\text{在边 } L_2 = 0 \text{ 上}) \\
&\int_l L_1^m L_2^n \mathrm{d}s = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \qquad (\text{在边 } L_3 = 0 \text{ 上})
\end{aligned} \tag{23}$$

参 考 文 献

1 龙驭球, 李聚轩, 龙志飞, 岑松. 四边形单元面积坐标理论. 工程力学, 1997; 14(3) : 1– 12

2 M A Eisenberg and L E Malvern. On finite element integration in natural coordinates. IJNME, 1973; 7(4): 574－575

附录1 面积分基本公式(A)、(B)的证明

1. 预备公式(D)

$$\int_0^1 (1-t)^i t^j \mathrm{d}t = \frac{i!j!}{(i+j+1)!} \tag{D}$$

证: 应用分部积分公式

$$\int_0^1 u\mathrm{d}v = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v\,\mathrm{d}u \tag{24}$$

可知

$$\text{左边} = \frac{1}{j+1}\int_0^1 (1-t)^i \mathrm{d}t^{j+1} \overset{(24)}{=} \frac{i}{j+1}\int_0^1 (1-t)^{i-1} t^{j+1}\mathrm{d}t$$

$$\overset{(24)}{=} \frac{i!j!}{(i+j)!}\int_0^1 t^{j+i}\mathrm{d}t = \frac{i!j!}{(i+j+1)!} = \text{右边}, \qquad \text{证毕。}$$

2. 预备公式(E)

$$\int_0^1 t^m (1-t)^n [\alpha t + \beta(1-t)]^p \mathrm{d}t = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+1)!}\sum_{k=0}^{p} \alpha^{p-k}\beta^k C_{m+p-k}^m C_{n+k}^n \tag{E}$$

证: 应用公式(D), 可知:

$$\text{左边} = \int_0^1 t^m (1-t)^n \Big[\sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{(p-k)!k!}\alpha^{p-k}\beta^k t^{p-k}(1-t)^k\Big]\mathrm{d}t$$

$$\overset{(D)}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{(p-k)!k!}\alpha^{p-k}\beta^k \frac{(m+p-k)!(n+k)!}{(m+n+p+1)!}$$

$$= \frac{m!n!p!}{(m+n+p+1)}\sum_{k=0}^{p} \alpha^{p-k}\beta^k C_{m+p-k}^m C_{n+k}^n = \text{右边}, \qquad \text{证毕。}$$

3. 将四边形分解为两个三角形(图2)

推导基本公式(A)时, 将四边形1234分解为两个三角形: △234和△124。令A, A'和A''分别表示四边形、△234和△124的面积, 则有

$$A' = (1-g_1)A \tag{25}$$

$$A'' = g_1 A \tag{26}$$

基本公式(A)中的积分是在四边形A上的积分(记为I), 它可写成在两个三角形A'和A''上的积分(记为I_1和I_2)之和:

$$I = \int_A L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q \mathrm{d}A = \iint_{A'} L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q \mathrm{d}A + \iint_{A''} L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q \mathrm{d}A = I_1 + I_2 \tag{27}$$

在△234中任一点P有两套坐标(图2b): 四边形面积坐标(L_1, L_2, L_3, L_4)和三角形面积坐标(L_1', L_2', L_3')。两套坐标的关系为

$$L_1 = (1 - g_1) L'_1 \tag{28a}$$

$$L_2 = (1 - g_1) L'_2 \tag{28b}$$

$$L_3 = g_1 L'_2 + (1 - g_2) L'_3 \tag{28c}$$

$$L_4 = g_1 L'_1 + g_2 L'_3 \tag{28d}$$

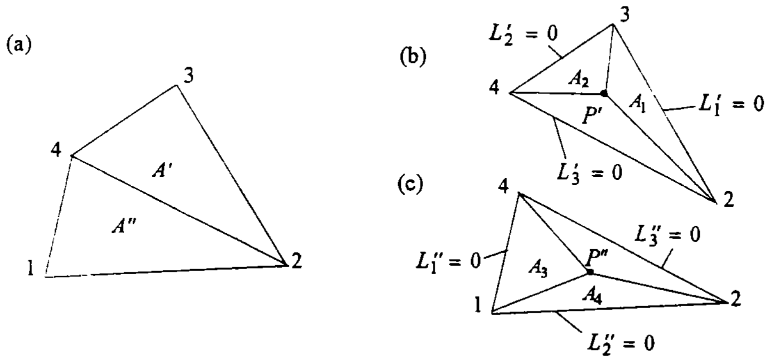

图 2

实际上, 前二式(28a, b) 可利用式(25) 导出如下:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = A_1\left(\frac{1 - g_1}{A'}\right) = (1 - g_1) L'_1$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A} = A_2\left(\frac{1 - g_1}{A'}\right) = (1 - g_1) L'_2$$

后二式(28c, d) 可利用文献[1] 的式(31) 导出如下:

$$\begin{aligned} L_3 &= (1 - g_2) - (1 - g_2)\left(\frac{L_1}{1 - g_1}\right) - (1 - g_1 - g_2)\left(\frac{L_2}{1 - g_1}\right) \\ &= (1 - g_2) - (1 - g_2) L'_1 - (1 - g_1 - g_2) L'_2 = g_1 L'_2 + (1 - g_2) L'_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4 &= g_2 + (g_1 - g_2)\left(\frac{L_1}{1 - g_1}\right) - g_2\left(\frac{L_2}{1 - g_1}\right) \\ &= g_2 + (g_1 - g_2) L'_1 - g_2 L'_2 = g_1 L'_1 + g_2 L'_3 \end{aligned}$$

同理, 在△124 中任一点 P"的两套坐标之间的关系为

$$L_3 = g_1 L''_1 \tag{29a}$$

$$L_4 = g_1 L''_2 \tag{29b}$$

$$L_1 = (1 - g_1) L''_2 + g_2 L''_3 \tag{29c}$$

$$L_2 = (1 - g_1) L''_1 + (1 - g_2) L''_3 \tag{29d}$$

4. 求面积分 I_1

利用预备公式(E) 和坐标变换式(28) 可求出面积 I_1:

$$\begin{aligned} I_1 = \iint_{\triangle 234} L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q \, \mathrm{d}A = \frac{m!\,n!\,p!\,q!}{(m + n + p + q + 2)!} 2A \cdot \\ \cdot (1 - g_1)^{m+n+1} \sum_{k=0}^{q} \sum_{j=0}^{p} C_{m+q-k}^{m} C_{n+p-j}^{n} C_{k+j}^{k} g_2^{k} (1 - g_2)^{j} g_1^{p+q-k-j} \end{aligned} \tag{30}$$

现证明如下:

首先, 应用坐标变换式(28) 和微元面积公式 $dA = 2A(1-g_1)dL'_1dL'_2$, 得

$$I_1 = \iint_{\triangle 234}(1-g_1)^{m+n}L'^m_1L'^n_2[g_1L'_2 + (1-g_2)L'_3]^p[g_1L'_1 + g_2L'_3]^q \cdot 2A(1-g_1)dL'_1dL'_2 \tag{31}$$

其次, 引入新变量 $t = \dfrac{L'_2}{1-L'_1}$, 得

$$I_1 = 2A(1-g_1)^{m+n+1}\int_0^1[L'^m_1(1-L'_1)^{n+p+1}t^n[g_1t + (1-g_2)(1-t)]^p[g_1L'_1 + g_2(1-L'_1)(1-t)]^q dt]dL'_1 \tag{32}$$

由于

$$[g_1L'_1 + g_2(1-L'_1)(1-t)]^q = \sum_{k=0}^{q}C_q^kg_1^{q-k}g_2^kL'^{q-k}_1(1-L'_1)^k(1-t)^k \tag{33}$$

代入上式, 得

$$I_1 = 2A(1-g_1)^{m+n+1}\sum_{k=0}^{q}g_1^{q-k}g_2^k\left(\int_0^1L'^{m+q-k}_1(1-L'_1)^{m+p+k+1}dL'_1\right)\left(\int_0^1t^n(1-t)^k[g_1t + (1-g_2)(1-t)]^pdt\right)$$

上式中的两个积分可用予备公式(D)、(E) 求出, 经整理后即得式(30)。

5. 求面积分 I_2 和导出基本公式(A)

同理, 应用坐标变换式(29), 可求出面积分 I_2 如下:

$$I_2 = \iint_{\triangle 124}L_1^mL_2^nL_3^pL_4^qdA = \frac{m!n!p!q!}{(m+n+p+q+2)!}2A \cdot \cdot g_1^{p+q+1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C^q_{m+q-k}C^p_{n+p-j}C^k_{k+j}g_2^k(1-g_2)^j(1-g_1)^{m+n-k-j} \tag{34}$$

将式(30) 和(34) 求得 I_1 和 I_2 进行叠加, 即得到面积分I 的表示式, 即基本公式(A)。

6. 导出基本公式(B)

四边形1234还可按图 3 分解为两个三角形: △123 和△134。采用类似的方法即可导出面积分基本公式(B)。

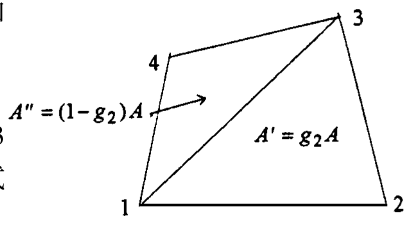

图 3

附录 2 边积分基本公式(C) 的证明

1. 在边线上面积坐标 L_1, L_2, L_3, L_4 的变化规律

定义在边 jk 上的无量纲坐标 s: 在 j 点其值为零, 在 k 点其值为 1。在边线上, 面积坐标 L_i 为 s 的线性函数, 其表示式列于下表。

	在12边上($L_4=0$)	在23边上($L_1=0$)	34边上($L_2=0$)	41边上($L_3=0$)
$L_1=$	$g_2(1-s)$	0	$(1-g_1)s$	$g_2s+(1-g_1)(1-s)$
$L_2=$	$(1-g_1)s+(1-g_2)(1-s)$	$(1-g_1)(1-s)$	0	$(1-g_2)s$
$L_3=$	g_1s	$(1-g_2)s+g_1(1-s)$	$(1-g_2)(1-s)$	0
$L_4=$	0	g_2s	$g_1s+g_2(1-s)$	$g_1(1-s)$

(35)

2. 边积分公式($C-1$)的证明

在边12($L_4=0$)上, 面积坐标L_1, L_2, L_3, L_4表示为s的一次式, 如上表中第1列所示。将其代入式($C-1$)的左边, 得

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= g_2^m g_1^p \int_0^1 (1-s)^m s^p [(1-g_1)s+(1-g_2)(1-s)]^n \mathrm{d}s \\
&= g_2^m g_1^p \int_0^1 (1-s)^m s^p \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-g_1)^{n-k} s^{n-k} (1-g_2)^k (1-s)^k\right] \mathrm{d}s \\
&= g_2^m g_1^p \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-g_1)^{n-k} (1-g_2)^k \int_0^1 s^{p+n-k} (1-s)^{m+k} \mathrm{d}s \\
&\overset{(D)}{=} g_2^m g_1^p \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-g_1)^{n-k} (1-g_2)^k \frac{(p+n-k)!(m+k)!}{(m+n+p+1)!} = \text{右边}
\end{aligned}$$

故知式($C-1$)成立。在上面推导中, 应用了予备公式(D)。式(C)中的其它三式也可类似证明。

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL FORMULAS FOR AREA COORDINATES IN QUADRILATERAL ELEMENT

Long Zhifei (China University of Mining & Technology, Beijing 100083)
Li Juxuan Cen Song Long Yuqiu (Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract The area coordinate method has been successfully applied to construct triangular elements. Recently, the area coordinate method was also applied to construct quadrilateral elements and the area coordinate theory for quadrilateral elements was systematically developed in Ref.[1]. This paper is the sequel to Ref.[1]. In this paper, the differential and integral formulas for area coordinates in quadrilateral elements are presented. Consequently, the numerical integration method which must be used in the formulation of stiffness matrix in isoparametric elements can now be discarded.

Key words finite element, quadrilateral element, area coordinates, differential and integral formulas