弯曲矩形板的广义位移解及其边界值*

边宇虹　　付宝连　　祖承德
（燕山大学，秦皇岛　066004）

提　要　本文应用功的互等定理，给出了弯曲矩形板的广义位移解及其边界值。从广义位移解可导出在各种载荷作用下具有各种边界条件矩形板的弯曲位移公式。本文导出的广义位移解的边界值是求解各种复杂边界条件矩形板弯曲的理论基础。

关键词　弹性薄板，广义位移解，边界值

一、引　言

研究弹性薄板的弯曲问题具有重要的实际意义。世界上很多国家的学者和专家在这方面曾经做过大量工作[2,4]。但是，他们给出的解都是一些在特定载荷作用下、具有特定边界条件的解，而不具有一般性。本文应用功的互等定理，给出了弯曲矩形板的广义位移解及广义位移解沿四个边的转角、等效切力及在四个角点上的角点力——十二个边界值。这就是说各种边界条件矩形板的位移解形式均可由广义位移解导出，实际矩形板的各种边界条件均可由广义位移解边界值得到。今后对各种载荷作用下具有各种边界条件的矩形板弯曲位移无需再分别求解，为获得它们只需对广义位移解及其边界值进行简化即可。因此，本文给出的解具有普遍性。另外，本文还编制了各种边界条件矩形板弯曲的通用程序。

二、广　义　解

我们取一四边简支的矩形板作为基本系统。在其上(ξ,η)点作用一单位集中载荷的解为基本解。基本系统示于图1。

为求解方便，现给出基本解的表达式

* 本文收稿日期：1996年9月

$$W_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{4}{\pi^4 Dab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{a}\xi\sin\frac{n\pi}{b}\eta}{(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{1}$$

与基本解有关的诸式在文献[1]中已给出。

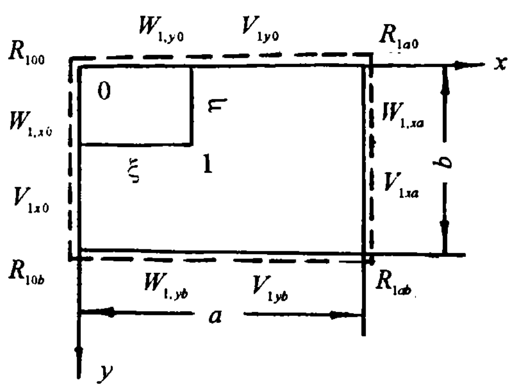

图 1 基本系统

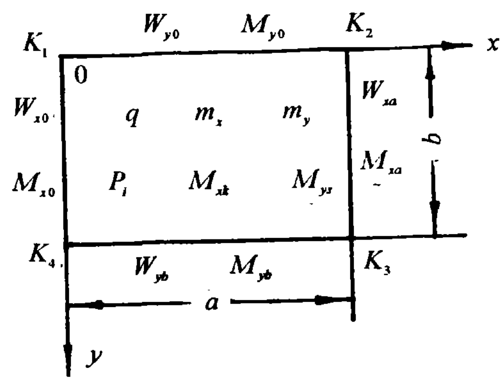

图 2 实际系统

现在我们来研究一如图 2 所示具有广义支承边的弯曲矩形板。所谓广义支承边即边上的位移、弯矩及两端点角点位移均为已知的支承边。

假设各边的已知位移和弯矩分别为

$$\left.\begin{aligned}
W_{xo}&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi y}{b}+K_1+\frac{K_4-K_1}{b}y\\
W_{xa}&=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi y}{b}+K_2+\frac{K_3-K_2}{b}y\\
W_{yo}&=\sum_{m=1}^{\infty}e_m\sin\frac{m\pi x}{a}+K_1+\frac{K_2-K_1}{a}x\\
W_{yb}&=\sum_{m=1}^{\infty}d_m\sin\frac{m\pi x}{a}+K_4+\frac{K_3-K_4}{a}x
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
M_{xo}&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi y}{b}\\
M_{xa}&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi y}{b}\\
M_{yo}&=\sum_{m=1}^{\infty}E_m\sin\frac{m\pi x}{a}\\
M_{yb}&=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\sin\frac{m\pi x}{a}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在图 1 基本系统与图 2 实际系统之间应用功的互等定理，并将与基本解有关的诸量代入，然后将三角级数转换成双曲函数，则得

$$W(\xi,\eta)=\int_0^a\int_0^b qW_1 dx dy+\int_0^b m_x W_{1,x} dy+\int_0^a m_y W_{1,y} dx+\sum_{i=1}^{j}P_i W_1(x_i,y_i;\xi,\eta)$$

$$+\sum_{k=1}^{l}M_{xk}W_{1,x}(x_k,y_k;\xi,\eta)+\sum_{s=1}^{t}M_{ys}W_{1,y}(x_s,y_s;\xi,\eta)$$

$$+\frac{a^2}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\mathrm{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}+\mathrm{cth}\alpha_n\frac{\alpha_n\xi}{a}\mathrm{ch}\frac{\alpha_n\xi}{a}-\frac{\alpha_n\xi}{a}\mathrm{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}\right]\frac{1}{\alpha_n^2}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(A_n)$$

$$+\frac{a^2}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\mathrm{cth}\alpha_n\mathrm{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}-\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\frac{\alpha_n\xi}{a}\mathrm{ch}\frac{\alpha_n\xi}{a}\right]\frac{1}{\alpha_n^2}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(B_n)$$

$$+\frac{b^2}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\mathrm{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}+\mathrm{cth}\beta_m\frac{\beta_m\eta}{b}\mathrm{ch}\frac{\beta_m\eta}{b}-\frac{\beta_m\eta}{b}\mathrm{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}\right]\frac{1}{\beta_m^2}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(E_m)$$

$$+\frac{b^2}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}\mathrm{cth}\beta_m\mathrm{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}-\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}\frac{\beta_m\eta}{b}\mathrm{ch}\frac{\beta_m\eta}{b}\right]\frac{1}{\beta_m^2}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(D_m)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2+(1-\mu)\left[\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\mathrm{cth}\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\right]\right\}\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\mathrm{sh}\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(a_n)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2+(1-\mu)\left[\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n\xi}{a}\mathrm{cth}\frac{\alpha_n\xi}{a}\right]\right\}\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\mathrm{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(b_n)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{2+(1-\mu)\left[\beta_m\mathrm{cth}\beta_m-\frac{\beta_m(b-\eta)}{b}\mathrm{cth}\frac{\beta_m(b-\eta)}{b}\right]\right\}\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}\mathrm{sh}\frac{\beta_m(b-\eta)}{b}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(e_m)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{2+(1-\mu)\left[\beta_m\mathrm{cth}\beta_m-\frac{\beta_m\eta}{b}\mathrm{cth}\frac{\beta_m\eta}{b}\right]\right\}\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}\mathrm{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(d_m)$$

$$+\frac{a-\xi}{a}\frac{b-\eta}{b}K_1+\frac{\xi}{a}\frac{b-\eta}{b}K_2+\frac{\xi}{a}\frac{\eta}{b}K_3+\frac{a-\xi}{a}\frac{\eta}{b}K_4 \tag{4}$$

式中 $\beta_m=m\pi b/a$，$\alpha_n=n\pi a/b$。式(4)是弯曲矩形板的广义位移解。其中，q、m_x、m_y 和 P_i、M_{xk}、M_{ys}分别是分布载荷，分布弯矩和集中载荷，集中弯矩。

三、广义位移解的边界值

为满足实际矩形板的边界条件，必须给出广义位移解沿四个边的挠度、转角、弯矩和等效切力及在四个角点上的角点力。

由式(4)易得，广义位移解沿四个边的挠度和弯矩还原为式(2)和(3)。而广义位移解沿四个边的转角、等效切力及在四个角点上的角点力可通过一系列运算得到，并为将来求解线性方程组的需要，还应进一步将所得结果中的一部分相应量表达式的双曲线函数展成三角级数。经整理，最后可得广义位移解沿四个边的转角，等效切力及在四个角点上的角点力分别为

$$W_{,\xi 0}=W_{,\xi 0q}+\frac{a}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\mathrm{cth}\alpha_n-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\right)\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(A_n)$$

$$+\frac{a}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{cth}\alpha_n-\frac{1}{\alpha_n})\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(B_n)+\frac{2b^2}{\pi^2Da}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m^3(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(E_m)$$

$$-\frac{2b^2}{\pi^2Da}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m^3(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}(-1)^n\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(D_m)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}+\mu(\operatorname{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n})](\frac{\alpha_n}{a})\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(a_n)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}+\alpha_n\frac{\operatorname{ch}\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}+\mu(\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}-\alpha_n\frac{\operatorname{ch}\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n})](\frac{\alpha_n}{a})\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(b_n)$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[(2-\mu)\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}]\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(e_m)$$

$$-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[(2-\mu)\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}](-1)^n\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(d_m)$$

$$+\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[K_2-K_1-(K_3-K_4)\cos n\pi]\sin\frac{\alpha_n\eta}{a} \tag{5}$$

$$W_{,\xi a}=W_{,\xi a q}+\frac{a}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\alpha_n}-\operatorname{cth}\alpha_n)\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(A_n)$$

$$+\frac{a}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}-\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{cth}\alpha_n)\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(B_n)$$

$$+\frac{2b^2}{\pi^2Da}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m^3(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}(-1)^m\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(E_m)$$

$$-\frac{2b^2}{\pi^2Da}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m^3(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}(-1)^{n+m}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(D_m)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}+\alpha_n\frac{\operatorname{ch}\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}+\mu(\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}-\alpha_n\frac{\operatorname{ch}\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n})](\frac{\alpha_n}{a})\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(a_n)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}+\mu(\operatorname{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n})](\frac{\alpha_n}{a})\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(b_n)$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[(2-\mu)\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}](-1)^m\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(e_m)$$

$$-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[(2-\mu)\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}](-1)^{m+n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(d_m)$$

$$+\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[K_2-K_1-(K_3-K_4)\cos n\pi]\sin\frac{\alpha_n\eta}{a} \tag{6}$$

这里 $W_{,\xi oq}$ 和 $W_{,\xi aq}$ 是由外载荷所引起的边界转角。

$$V_{\xi o}=V_{\xi oq}-\frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{ch}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}+\mu(\mathrm{ch}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n})]\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(A_n)$$

$$+\frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}[1+\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n+\mu(1-\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n)]\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(B_n)$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{n^2}{m^2}]\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(E_m)$$

$$-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{n^2}{m^2}](-1)^n\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(D_m)$$

$$-\frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[2(1-\mu^2)\mathrm{ch}\alpha_n+(1-\mu)^2(\mathrm{ch}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n})](\frac{\alpha_n}{a})^3\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(a_n)$$

$$+\frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[2(1-\mu^2)+(1-\mu)^2(1+\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n)](\frac{\alpha_n}{a})^3\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(b_n)$$

$$+2D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^3}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(e_m)$$

$$-2D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^3}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}(-1)^n\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(d_m) \tag{7}$$

$$V_{\xi a}=V_{\xi aq}-\frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}[1+\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n+\mu(1-\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n)]\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(A_n)$$

$$+\frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{ch}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}+\mu(\mathrm{ch}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n})]\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(B_n)$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{n^2}{m^2}](-1)^m\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(E_m)$$

$$-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{m(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2})^2}[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{n^2}{m^2}](-1)^{m+n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(D_m)$$

$$-\frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[2(1-\mu^2)+(1-\mu)^2(1+\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n)](\frac{\alpha_n}{a})^3\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(a_n)$$

$$+\frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[2(1-\mu^2)\mathrm{ch}\alpha_n+(1-\mu)^2(\mathrm{ch}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n})](\frac{\alpha_n}{a})^3\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(b_n)$$

$$+ 2D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^3}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}(-1)^n\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(e_m)$$

$$- 2D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^3}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}(-1)^{m+n}\sin\frac{\alpha_n\eta}{a}(d_m) \tag{8}$$

这里$V_{\xi oq}$和$V_{\xi aq}$是由外载荷所引起的等效切力。

$$\begin{aligned}R_{oo} &= R_{ooq} \\
&- (1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\right)\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(A_n) - (1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n-1)\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(B_n) \\
&- (1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathrm{cth}\beta_m-\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}\right)\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}(E_m) - (1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}(\beta_m\mathrm{cth}\beta_m-1)\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}(D_m) \\
&+ D(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}+\mu\left(\mathrm{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\right)\right]\left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(a_n) \\
&- D(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n+\mu(1-\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n)\right]\left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(b_n) \\
&+ D(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathrm{cth}\beta_m+\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}+\mu\left(\mathrm{cth}\beta_m-\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}\right)\right]\left(\frac{\beta_m}{b}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}(e_m) \\
&- D(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}\left[1+\beta_m\mathrm{cth}\beta_m+\mu(1-\beta_m\mathrm{cth}\beta_m)\right]\left(\frac{\beta_m}{b}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}(d_m) \\
&- 2D(1-\mu)\frac{1}{ab}(K_1-K_2+K_3-K_4)\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}R_{ao} &= R_{aoq} \\
&- (1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n)\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(A_n) - (1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}-\mathrm{cth}\alpha_n\right)\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(B_n) \\
&- (1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\beta_m-\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}\right)\frac{(-1)^m}{\mathrm{sh}\beta_m}(E_m) \\
&- (1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}(\beta_m\mathrm{cth}\beta_m-1)\frac{(-1)^m}{\mathrm{sh}\beta_m}(D_m) \\
&+ D(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n+\mu(1-\alpha_n\mathrm{cth}\alpha_n)\right]\left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(a_n) \\
&- D(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{ch}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}+\mu\left(\mathrm{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}\alpha_n}\right)\right]\left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}(b_n) \\
&+ D(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathrm{ch}\beta_m+\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}+\mu\left(\mathrm{cth}\beta_m-\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}\right)\right]\left(\frac{\beta_m}{b}\right)^2\frac{(-1)^m}{\mathrm{sh}\beta_m}(e_m) \\
&- D(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}\left[1+\beta_m\mathrm{cth}\beta_m+\mu(1-\beta_m\mathrm{cth}\beta_m)\right]\left(\frac{\beta_m}{b}\right)^2\frac{(-1)^m}{\mathrm{sh}\beta_m}(d_m) \\
&- 2D(1-\mu)\frac{1}{ab}(K_1-K_2+K_3-K_4)\end{aligned} \tag{10}$$

$$R_{ab} = R_{abq} - (1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n\text{cth}\alpha_n)\frac{(-1)^n}{\text{sh}\alpha_n}(A_n)$$
$$-(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\alpha_n}{\text{sh}\alpha_n}-\text{ch}\alpha_n)\frac{(-1)^n}{\text{sh}\alpha_n}(B_n)$$
$$-(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}(1-\beta_m\text{cth}\beta_m)\frac{(-1)^m}{\text{sh}\beta_m}(E_m)$$
$$-(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{\beta_m}{\text{sh}\beta_m}-\text{ch}\beta_m)\frac{(-1)^m}{\text{sh}\beta_m}(D_m)$$
$$+D(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}[1+\alpha_n\text{cth}\alpha_n+\mu(1-\alpha_n\text{cth}\alpha_n)](\frac{\alpha_n}{a})^2\frac{(-1)^n}{\text{sh}\alpha_n}(a_n)$$
$$-D(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}[\text{ch}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\text{sh}\alpha_n}+\mu(\text{ch}\alpha_n-\frac{\alpha_n}{\text{sh}\alpha_n})](\frac{\alpha_n}{a})^2\frac{(-1)^n}{\text{sh}\alpha_n}(b_n)$$
$$+D(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}[1+\beta_m\text{cth}\beta_m+\mu(1-\beta_m\text{cth}\beta_m)](\frac{\beta_m}{b})^2\frac{(-1)^m}{\text{sh}\beta_m}(e_m)$$
$$-D(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}[\text{ch}\beta_m+\frac{\beta_m}{\text{sh}\beta_m}+\mu(\text{ch}\beta_m-\frac{\beta_m}{\text{sh}\beta_m})](\frac{\beta_m}{b})^2\frac{(-1)^m}{\text{sh}\beta_m}(d_m)$$
$$-2D(1-\mu)\frac{1}{ab}(K_1-K_2+K_3-K_4) \tag{11}$$

这里 R_{ooq}、R_{aoq}和 R_{abq}是由外载荷所引起的角点力。

$W_{\eta o}$、$W_{\eta b}$、$V_{\eta o}$、$V_{\eta b}$和 R_{ab}的表达式可分别由式(5)、(6)、(7)、(8)和(10)得到，只要将其中的 n 和 m，α_n 和 β_m，ξ 和 η，a 和 b；A_n 和 E_m，B_n 和 D_m，a_n 和 e_m，b_n 和 d_m 互换。另外，式(5)和(6)中的 K_2 和 K_4 互换。

四、算 例

实际系统为线性分布弯矩作用下对边简支、一边自由一边固定的矩形板，如图 3 所示。对于该种边界条件——已知 $W_{xo}=W_{xa}=W_{yo}=M_{xo}=M_{xa}=M_{yb}=0$ 和四个角点的位移均为零，由式(2)和(3)知 $a_n=b_n=e_m=A_n=B_n=D_m=K_1=K_2=K_3=K_4=0$ 它的未知参数为 E_m 和 d_m。

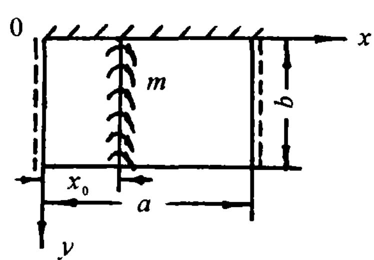

图 3

$W(\xi,\eta)$由广义位移解表达式(4)确定，其中 $W_q(\xi,\eta)$由以下两式确定

$$W_{q1}=\frac{b^2}{\pi^3 D}\sum_{n=1}^{\infty}[m_1+(-1)^{n+1}m_2]\{[-\alpha_n\text{cth}\alpha_n\text{ch}\frac{\alpha_n(a-x_o)}{a}$$
$$+\frac{\alpha_n(a-x_o)}{a}\text{sh}\frac{\alpha_n(a-x_o)}{a}]\text{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}$$

$$+\operatorname{ch}\frac{\alpha_n(a-x_o)}{a}\frac{\alpha_n\xi}{a}\operatorname{ch}\frac{\alpha_n\xi}{a}\}\frac{1}{n^3\operatorname{sh}\alpha_n}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\qquad \xi\leqslant x_0 \tag{12a}$$

$$W_{q1}=\frac{b^2}{\pi^3D}\sum_{n=1}^{\infty}[m_1+(-1)^{n+1}m_2]\{[\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n\operatorname{ch}\frac{\alpha_nx_o}{a}-\frac{\alpha_nx_o}{a}\operatorname{sh}\frac{\alpha_nx_o}{a}]\operatorname{sh}\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}$$

$$-\operatorname{ch}\frac{\alpha_nx_o}{a}\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\operatorname{ch}\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\}\frac{1}{n^3\operatorname{sh}\alpha_n}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\qquad \xi\geqslant x_o \tag{12b}$$

式中 $m_1=m_2=m$。让式(4)满足边界条件

$$W_{,\eta\rho}=V_{\eta\rho}=0 \tag{13}$$

由广义位移解边界值表达式有

$$W_{,\eta\rho q}+\frac{b}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}(-\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_m}+\frac{1}{\beta_m}\operatorname{ch}\beta_m)\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_m}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(E_m)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[1+\beta_m\operatorname{cth}\beta_m+\mu(1-\beta_m\operatorname{cth}\beta_m)](\frac{\beta_m}{b})\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_m}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(d_m)=0 \tag{14}$$

$$V_{\eta\rho q}-\frac{1}{2b}\sum_{m=1}^{\infty}[1+\beta_m\operatorname{cth}\beta_m+\mu(1-\beta_m\operatorname{cth}\beta_m)]\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}\beta_m}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(E_m)$$

$$+\frac{D}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[2(1-\mu^2)\operatorname{ch}\beta_m+(1-\mu)^2(\operatorname{ch}\beta_m+\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}\beta_m})](\frac{\beta_m}{b})^3\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_m}\sin\frac{\beta_m\xi}{b}(d_m)=0 \tag{15}$$

这里 $W_{\eta\rho q}$和 $V_{\eta\rho q}$的表达式分别为

$$W_{,\eta\rho q}=\frac{a^2}{\pi^3Db}\sum_{m=1}^{\infty}[m_1(-\frac{2}{\beta_m}\operatorname{sh}\beta_m+\operatorname{ch}\beta_m+\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}\beta_m})+m_2(\frac{2}{\beta_m}\operatorname{sh}\beta_m-1$$

$$-\beta_m\operatorname{cth}\beta_m)]\frac{\beta_m}{m^3\operatorname{sh}\beta_m}\cos\frac{m\pi x_o}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{16}$$

$$V_{\eta\rho q}=\frac{1}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\{m_1[-\frac{2(2-\mu)}{\beta_m}+\frac{X_1}{\operatorname{sh}\beta_m}]$$

$$+m_2[\frac{2(2-\mu)}{\beta_m}+(1-\mu)\beta_m-X_1\operatorname{cth}\beta_m]\}\cos\frac{m\pi x_o}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{17}$$

式中

$$X_1=3+\beta_m\operatorname{cth}\beta_m-\mu(1+\beta_m\operatorname{cth}\beta_m)$$

对于上面两组无穷联立方程(14)和(15)，各取 E_m 和 d_m25 个系数，$\mu=0.3$，$a/b=1$ 和 $x_0=0.25a$，经过计算，我们得到图 4 表 1。

表 1 固定边弯矩(单位 m)和自由边挠度(单位 ma^2/D)

x/a \ M(W)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
M_{yo}	0.074179	0.271882	−0.732564	−0.558312	−0.476305
W_{yb}	0.009299	0.020166	0.032742	0.039666	0.040887
x/a \ M(W)	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**0.95**
M_{yo}	−0.386273	−0.277601	−0.183080	−0.097860	−0.042273
W_{yb}	0.037625	0.030979	0.021929	0.011340	0.005715

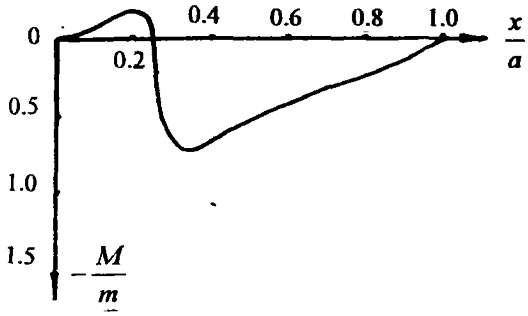

图 4a 固定边 $y=0$ 弯矩分布曲线

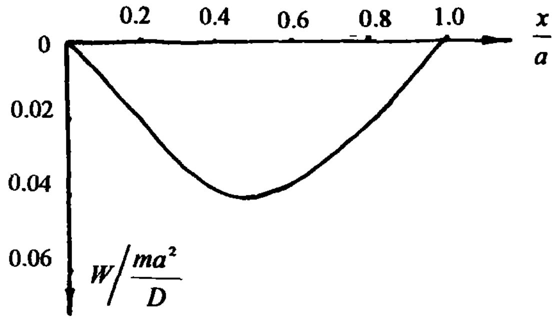

图 4b 自由边 $y=b$ 挠度分布曲线

参 考 文 献

1 付宝连. 弯曲矩形板的广义位移解. 东北重型机械学院学报, 1988(1)

2 Timoshenko S et al. Theory of Plates and Shells, MCGRAW—HILL Book Company inc, New York, 1959

3 边宇虹等. 在线性分布弯矩作用下悬臂矩形板的弯曲. 工程力学, 北京: 科学技术出版社, 1992

4 张福范. 弹性薄板(第二版). 北京: 科学出版社, 1984

GENERALIZED DISPLACEMENT SOLUTION AND ITS BOUNDARY VALUES OF THE BENDING RECTANGULAR PLATE

Bian Yuhong Fu Baolian Zu Chengde

(Department of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

Abstract In this paper, the reciprocal theorem is applied to give the generalized displacement solution and its boundary values of the bending rectangular plate. The formulas of the bending displacement of the rectangular plates with various boundary conditions under various loads are derived from the generalized displacement solution. The boundary values of the generalized displacement solution derived in this paper is the theoretical basis to solve a bending rectangular plate with various boundary conditions.

Key words elastic thin plate, generalized displacement solution, boundary value