

混凝土构件软化分析的边界元法

岑章志

(清华大学)

G. Maier G. Novati

(意大利米兰工业大学)

摘要: 本文在混凝土构件的软化分析中采用了粘性裂纹模型, 使用直接边界元子域法研究并讨论了构件中裂纹开展所引起的结构软化和失稳情形, 相应的增量迭代算法被给出。文中的数值算例表明了上述方法的有效性。

关键词: 边界元, 粘性裂纹模型, 软化分析

一、 引 言

Drucker 的失稳假定^[1]提出了一个基于经典塑性理论的重要见解。六十年代后期一些学者研究了材料、构件和某些结构的失稳问题。而文献[6]—[9]则进一步讨论了钢筋混凝土受弯梁的软化特性, 但仅对考虑结构材料局部软化的结构特性给出了工程定性分析。随着计算力学的发展, 一些学者^{[10]—[13]}应用有限元法和边界元法对结构的软化特性给出定量的分析。

由于混凝土材料具有不同的拉压特性, 其抗拉能力差而易于产生裂纹, 且裂纹附近的塑性区非常狭小。为此, 本文考虑材料在域内为各向同性线弹性模型, 在裂纹开展区采用粘性裂纹模型。由于问题的非线性仅发生在裂纹面上, 采用边界元子域法有利于发挥边界元方法的优势和便于进行非线性处理。为了获得构件失稳以后的过程和分叉情况, 本文采用粘性裂纹顶点位置作为增量计算的控制变量进行迭代计算, 文末给出相应的数值实例以说明方法的有效性。

二、 粘性裂纹模型

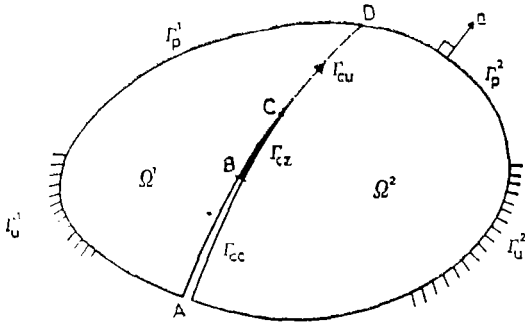
粘性裂纹模型基于以下假设, 当裂纹尖端正应力值达到材料允许极限值 σ 时, 裂纹开始张开, 裂纹表面的法向面力 p_n 随着法向张开位移 Δu_n 的增大而减少 (见图 1(b)), 当裂纹张开位移达到或超过某一极限值 w (材料参数) 时, $p_n = 0$, 称为自由裂纹面。

图 1(a) 给出一带裂纹的二维体, 此处考虑二维平面应力问题。 Γ_{oo} 为自由裂纹

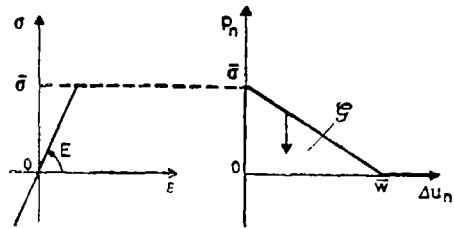
* 本文工作得到中国自然科学基金委和意大利 CNR-GNDT 的资助。

面, 此处 $p_n = p_t = 0$ 。 Γ_{cz} 称为粘性裂纹面, 或裂纹由粘接到完全张开的“过程区”, 点 C 表示粘性裂纹尖端。图 1(b) 给出了法向面力 p_n 和法向张开位移 Δu_n 之间的关系, 其中 $\Delta u_n \geq 0$ 。三角形面积 $\xi = 1/2 \sigma \bar{w}$ 表示单位长度粘性裂纹面自张开发展到自由裂纹面所耗散的能量。值得指出的是这种模型是不可逆的, 图中箭头表示材料局部区域卸载时的走向。

上述关系可以用数学公式表示为:



(a) 带裂纹的二维体



(b) 粘性裂纹中法向面力与法向张开位移关系

图 1 粘性裂纹模式

$$\phi = p_n - (\sigma + h \Delta u_n) \leq 0, \text{ 其中 } h = -\frac{\sigma}{w} \quad (1)$$

$$\Delta u_n \geq 0, \phi \Delta u_n = 0 \quad (2)$$

$$\Delta u_n \geq 0, \phi \Delta u_n = 0, \phi \leq 0 \text{ (当 } \phi = 0 \text{ 时)} \quad (3)$$

对于沿粘性裂纹面的切向面力 p_t , 可根据不同的材料特性作如下二种假设: 1) 存在切向面力 p_t 而无切向相对滑动 $\Delta u_t = 0$; 2) 允许切向相对滑动而无切向强度 $p_t = 0$ 。

三、边界积分方程

为方便起见, 考虑带裂纹的二维体 (图 1(a)), 区域被分为二个子域 Ω^1 和 Ω^2 。 Γ_n^r 和 Γ_p^r ($r=1, 2$) 分别为外部已知位移边界和已知面力边界。交界面 Γ 。由三部份组成: 自由裂纹面 Γ_{cc} , 粘性裂纹面 Γ_{cz} 和未开裂界面 Γ_{cu} 。

利用贝蒂互易定理, 我们可以对每一子域 Ω^r 给出考虑无体力情况下的边界积分方程:

$$\begin{aligned} C^r(\xi) u^r(\xi) + \int_{\Gamma^r} G_{pu}^r(x, \xi) u^r(x) d\Gamma_x \\ = \int_{\Gamma^r} G_{uu}^r(x, \xi) p^r(x) d\Gamma_x \\ \xi \in \Gamma^r = \Gamma_{cu}^r \cup \Gamma_{cz}^r \cup \Gamma_{cc}^r \end{aligned} \quad (4)$$

其界面连续条件在自由裂纹面、粘性裂纹面（采用第一种切向面力假设）和未开裂界面分别为：

$$p_n^1 = p_n^2 = p_t^1 = p_t^2 = 0 \quad \text{在 } \Gamma_{oc} \text{ 上} \quad (5)$$

$$u_i^1 = -u_i^2, u_n^1 + \Delta u_n = -u_n^2, p_t^1 = p_t^2, p_n^1 = p_n^2 \text{ 在 } \Gamma_{cz} \text{ 上} \quad (6)$$

$$u_i^1 = -u_i^2, u_n^1 = -u_n^2, p_t^1 = p_t^2, p_n^1 = p_n^2 \text{ 在 } \Gamma_{cu} \text{ 上} \quad (7)$$

相应的外部边界条件为：

$$p_i^r = \bar{p}_i^r \text{ 在 } \Gamma_p^r \text{ 上}; \quad u_i^r = \bar{u}_i^r \text{ 在 } \Gamma_u^r \text{ 上} \\ (r=1, 2; i=1, 2) \quad (8)$$

通过界面的离散化，方程（4）可以对每个子域 r 写成如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} H_{pp} & -L_{pu} & H_{po} & -L_{pc} \\ H_{up} & -L_{uu} & H_{uc} & -L_{uc} \\ H_{op} & -L_{cu} & H_{oo} & -L_{oc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_p \\ P_u \\ U_o \\ P_o \end{Bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} L_{pp} & -H_{pu} \\ L_{up} & -H_{uu} \\ L_{cp} & -H_{ou} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_p \\ \bar{U}_u \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中 α 为载荷因子，在方程（9）中，对每一个子域的外部边界未知量 U_p^r 和 P_u^r 可以被凝聚而形成一仅与界面未知量有关的方程，引入界面条件（5）—（7），我们可以得到总体结构的方程：

$$\begin{bmatrix} H_c^1 & O & H_{zn}^1 & O & -L_{zn}^1 & H_{zt}^1 & -L_{zt}^1 & H_u^1 & -L_u^1 \\ O & H_c^2 & O & H_{zn}^2 & -L_{zn}^2 & H_{zt}^2 & -L_{zt}^2 & H_u^2 & -L_u^2 \end{bmatrix} X \\ = \alpha \begin{Bmatrix} \hat{f}^1 \\ \hat{f}^2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

其中未知量列阵 X 为（上波浪线表示转置）：

$$X = [\tilde{U}_{co}^1, \tilde{U}_{co}^2, \tilde{U}_{czn}^1, \tilde{U}_{czt}^1 + \Delta \tilde{U}_n, \tilde{U}_{czt}^2, \tilde{U}_{czt}^1, \tilde{U}_{cu}^1, \tilde{P}_{cu}^1] \quad (11)$$

方程（10）是一线性代数方程组，但在粘性裂纹区界面，变量必须满足一非线性关系，且粘性裂纹区的端点 B 和 C 的位置在裂纹开展过程中也发生变化，所以该裂纹开展过程呈非线性特性。由粘性裂纹模型假设，在界面离散化后，我们要求在粘性裂纹面各离散结点上满足关系式（1）—（3）。

四、增量迭代算法

对于某些问题，我们可以事先知道裂纹开展的线路，这样可以假设一已知的界面进行增量迭代计算。为了获得构件失稳以后的过程和分叉情况，采用控制载荷增量或位移增量的方法是不合适的。为此，本文在进行迭代计算时，用粘性裂纹顶点 C 沿着界面位置的变化作为增量计算的控制变量。这样，载荷因子 α 在每一增量步为未知量，而界面变量中 C 点的法向面力为已知， $p_n = \sigma$ 。方程（10）通过给定 P_{czt}^1 初值和移项，可以求解其它未知界面变量和载荷因子 α 。

而对于一般的问题, 我们事先并不知道裂纹开展的线路, 为此, 必须采用变界面的方法。即根据对问题的了解, 事先假设一界面位置, 然后根据粘性裂纹尖端的应力状态和最大主应力方向确定裂纹开展的方向和修正界面的方位, 其增量迭代计算步骤如下:

1) 对每一裂纹开展增量步 m , 设定粘性裂纹顶点 C 的位置, 并在该点取 $p_n = \bar{\sigma}$ 。位于粘性裂纹面其它结点的法向面力取前一增量步的值。

2) 由边界元总体方程 (10) 形成求解方程并解得载荷因子和其它界面未知量。

表 1

$m-1$ 增量步结点 k 的位置	第 i 次迭代计算结果		第 $i+1$ 次迭代界面条件	
	$(\int u_n)_i^k$	$(p_n)_i^k$	$(\int u_n)_{i+1}^k$	$(p_n)_{i+1}^k$
在粘性裂纹面 Γ_{cz}^{m-1} 上: $(\int u_n)^k \leq \bar{w}$ $0 < (p_n)^k \leq \bar{\sigma}$ $(\int u_t)^k = 0$	如果 $> (\int u_n)_{m-1}^k$ $< \bar{w}$	—	$\int u_n$: 未知 $\int u_t$: 为零*	p_n : $\bar{\sigma} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{w}} (\int u_n)_i^k$ p_t : 未知*
	如果 $\geq \bar{w}$	—	$\int u_n$: Δu_t : 未知	p_n : p_t : 为零
	如果 $< (\Delta u_n)_{m-1}^k$	—	Δu_n : $(\Delta u)_{m-1}^k$ Δu_t : 为零	p_n : 未知 p_t : 未知*
	如果 $= (\Delta u_n)_{m-1}^k$	如果 $>$ $\bar{\sigma} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{w}} (\Delta u_n)_{m-1}^k$	Δu_n : $(\Delta u_n)_{m-1}^k$ Δu_t : 为零*	p_n : $\bar{\sigma} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{w}} (\Delta u_n)_{m-1}^k$ p_t : 未知*
在自由裂纹 Γ_{cc}^{m-1} 面上: $\text{Max}_{k \in m-1} (\Delta u_n)_k^k \geq \bar{w}$ $p_t^k \Delta u_n^k = 0$ $p_n^k \Delta u_n^k = 0$ $\Delta u_n^k \geq 0, p_n^k \leq 0$	如果 > 0	—	Δu_n : Δu_t : 未知	p_n : p_t : 为零
	如果 $\leq \bar{w}$	—	Δu_n : $\bar{w}$ Δu_t : 未知	p_n : 未知 p_t : 为零
	—	如果 > 0	Δu_n : Δu_t : 未知	p_n : p_t : 为零
在未开裂界面 Γ_{cu}^{m-1} 上: $p_n^k \leq \bar{\sigma}, \Delta u_n^k = 0$ $\Delta u_t^k = 0$	—	如果 $\leq \bar{\sigma}$	Δu_n : $\int u_t$: 为零	p_n : p_t : 未知
	—	如果 $> \bar{\sigma}$	$\int u_n$: 未知 $\int u_t$: 为零*	p_n : $\bar{\sigma}$ p_t : 未知*

*此处采用第一种切向面力假设

3) 根据粘性裂纹模型, 表 1 给出了由本迭代步计算结果得到下一迭代步界面条件的方法。

4) 判断收敛性: 如果满足:

$$\frac{\text{Max} |p_n^{(i)} - p_n^{(i-1)}|}{\bar{\sigma}} \leq \varepsilon$$

则迭代收敛, 并进入第 5) 步; 否则转入第 2) 步, 开始第 $i+1$ 次迭代计算。

5) 在粘性裂纹尖端 C 点, 如果满足:

$$\left| \frac{p_t}{\sigma_n - \sigma_t} \right| \leq \varepsilon$$

则裂纹开展方向合适, 转入第 1) 步, 开始第 $m+1$ 增量步; 否则进入第 6) 步修正裂纹开展方向和界面方位。

6) 根据粘性裂纹尖端 C 点处的最大主应力方向修正裂纹开展方向和界面方位, 然后转入第 2) 步开始新一轮迭代计算。

五、数值实例

1. 四点弯曲模型

该算例的裂纹开展的线路是事先知道的, 所以在划分区域时将裂纹开展线作为区域间的交界面 (图 2(a), (b)))。边界单元采用二次等参边界元, 材料参数为: $E = 1.5 \times 10^4 \text{ MPa}$; $\nu = 0.1$; $\sigma_c = 1.31 \text{ MPa}$; $\bar{w} = 0.003 \text{ cm}$ 。对各种不同构件尺寸和脆性率 $\rho = \zeta / \sigma_c b = \bar{w} / 2b$, 图 2(c) 给出了相应的无量纲化载荷——挠度 ($u = 1/2(u_1 + u_2)$) 曲线。本算例采用二种计算网格, 第一种网格 (图 2(a)) 对整个结构进行计算, 以得到非对称的响应, 图 2(c) 中以实线表示其计算结果, 其中带 * 号实线考虑材料软化是不可逆的, 而带 $\circ$ 实线考虑材料软化是可逆的。二种不同模型得到的结果在 $\rho = 4.18 \times 10^{-4}$, 1.04×10^{-3} , 2.08×10^{-3} 的不同情况下有较大差别, 说明考虑材料不可逆影响是很有必

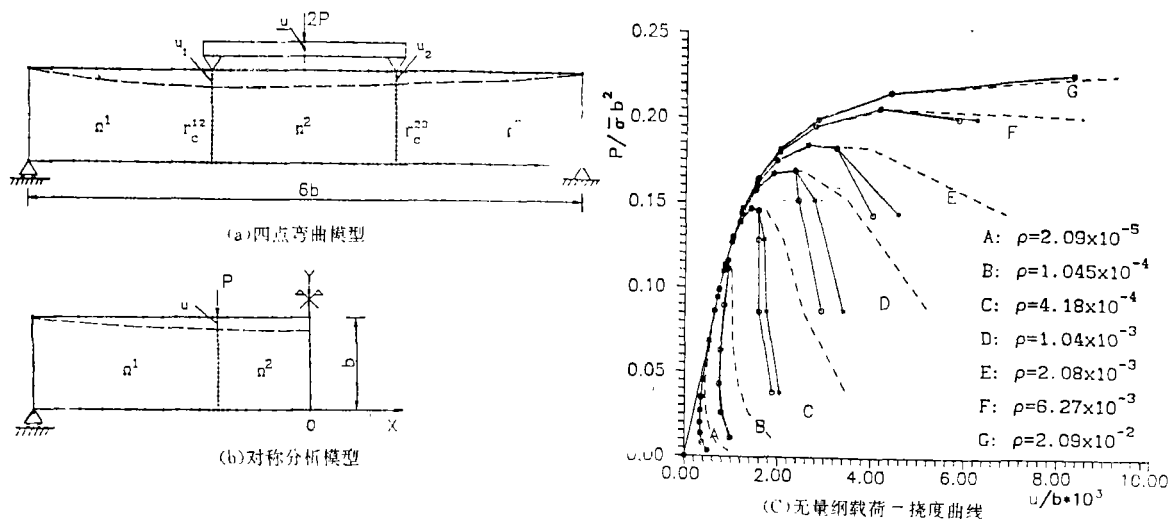


图 2

要的。第二种网格 (图 2(b))) 采用半个结构, 利用对称性进行分析以强制得到对称软

化响应, 其计算结果在图 2(c) 中以虚线表示。我们可以看到结构失稳产生分叉, 而实验得到的往往是非对称失稳。图 3 给出了混凝土梁四点弯曲试验结果与计算结果的比较, 材料参数为 $E = 29.6 \text{ kN/mm}^2$, $\nu = 0.24$, $\sigma = 9.4 \text{ N/mm}^2$, $\bar{w} = 0.09 \text{ mm}$, 梁长 1.5 m , 梁高 0.4 m , 梁宽 0.25 m , 可以看到计算结果与试验结果相当符合。

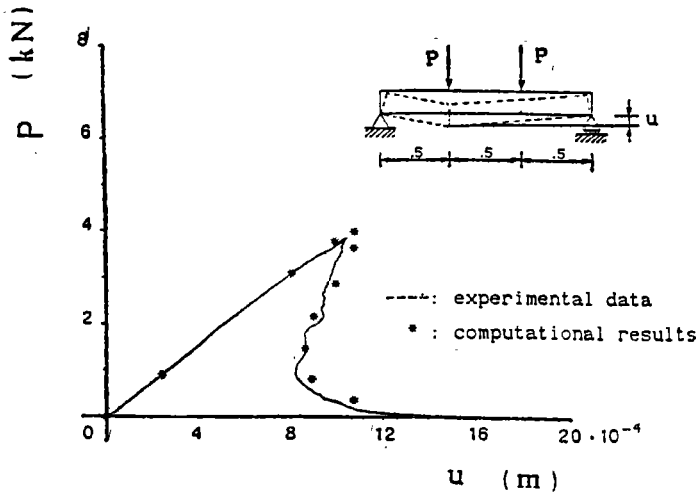


图 3 四点弯曲模型试验结果与计算结果比较

2. 四点剪切模型

该算例裂纹开展的线路事先是未知的, 所以必须对每一增量步修正其裂纹开展方向, 以得正确的结果。同样, 我们可以采用整个结构分析 (图 4) 以得到非对称响应 (实线表示); 或采用半个结构, 利用其中心对称性, 以得对称软化响应 (虚线表示)。

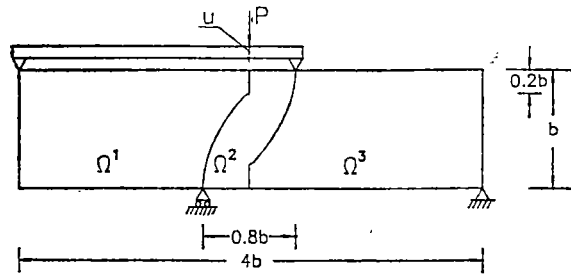


图 4 (a)

图中可清楚地看到构件的分叉和失稳现象。图 5 给出了在 $\rho = 2.5 \times 10^4$ 情况下进行整体结构分析时, 界面修正变化情况和二个裂纹面的裂纹张开情况。由图中可以看出随着裂纹的开展, 开裂方向在不断地进行修正, 而在第 17 增量步以前, 两边裂纹的张开情

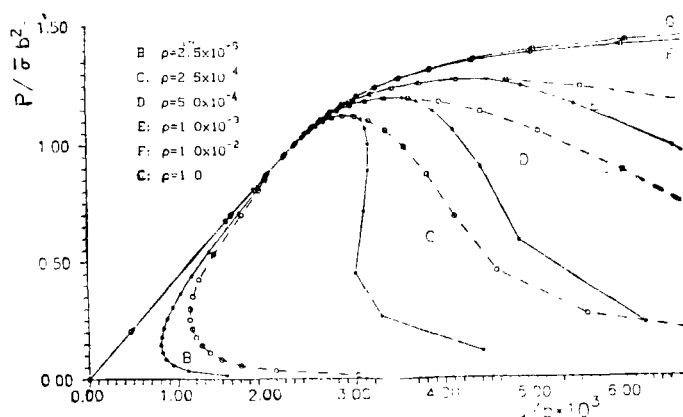


图 4 (b)

图 4 四点剪切模型无量纲荷载-挠度曲线

况基本上是中心对称的, 而从第 17 步开始, 两边裂纹张开出现非对称情况, 左端的裂纹不再继续张大, 而右边的裂纹仍在不断开展和张大。由此, 可以清楚构件软化响应出现分叉的原因。

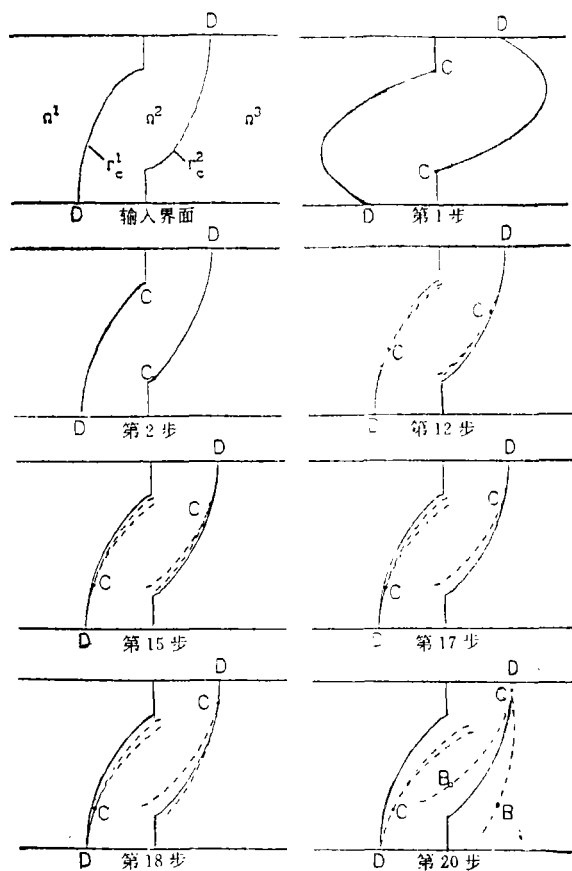


图 5 四点剪切模型在不同增量步的裂纹张开情况

六、结 论

1. 由上述分析可以看到: 试验结果的验证说明, 对于混凝土材料, 采用粘性裂纹模型是可行的。由于这种模型将狭窄区域的非线性问题简化为界面的非线性问题, 给问题的处理带来很大的方便。

2. 由于其非线性特性仅发生在界面, 采用边界元方法很有效的。特别是对于裂纹开展线路事先未知的问题, 每一步均需对界面进行修正, 此时采用有限元方法将有很大的困难。而边界元方法对于界面形状的改变有很强的适应性, 在裂纹开展分析中界面网格的重新生成是很方便的。

参 考 文 献

- [1] D. C. Drucker, Conventional and unconventional plastic response and representation, *Appl. Mech. Rev.*, 41, 1988, 151-167.
- [2] G. Maier, Behavior of elastic-plastic trusses with unstable bars, *Proc. ASCE, Journal of Engineering and Mechanics Division*, 92, N. EM3, 1966, 67-91.
- [3] A. C. Palmer, G. Maier, D. C. Druck, Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials of structural elements, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1967, 464-470.
- [4] G. Maier, On elastic-plastic structures with associated stress-strain relations allowing for work softening, *Mechanica*, 2, 1967, 55-64.
- [5] G. Maier, Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects, *Int. J. of Solid and Structures*, 7, 1971, 345-372.
- [6] E. Rosenblueth, R. Diaz de Cossio, Instability considerations in limit design of concrete beam, in *Flexural Mech. of Reinf. Concrete*, ASCE-ACI, 1965.
- [7] R. H. Wood, E. H. Johnson, Discussion of the paper "A new approach to inelastic structural design" by M. G. Lay, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 1966, 35.
- [8] G. Maier, Sul comportamento flessionale instabile nelle travi inflesse elastoplastiche, *Rendiconti dell' Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 102, 1968 648-677.
- [9] G. Maier, A. Zavelani Rossi, J. C. Dotreppe, Equilibrium branching due to flexural softening, *Proc. ASCE, J. Struct. Div.* 99, N. EM4, 1973, 897-906.
- [10] A. Carpinteri, Softening and snap-back instability in cohesive solids, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, 1989, 1521-1538.
- [11] L. Biolzi, Flexure of beams with elastic-softening behaviour, *SM Archives* 13, 3, 1988, 177-191.
- [12] Z. Cen, G. Maier, G. Novati On boundary element inelastic analysis in the presence of softening, *Int. Symposium on Boundary Element Methods, Conn., U.S. A. Oct.*, 1989, 2-6.

- [13] G. Maier, C. Polizzotto, A Galerkin approach to boundary element elastoplastic analysis, *Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering*, 60, 1987, 175-194.
- [14] Z. Cen et al., Boundary element analysis of crack propagation in elastic-cohesive-softening solids, *Proc. European Conf. in Computational structural Mechanics*, France, 1991.

BOUNDARY ELEMENT METHOD OF SOFTENING ANALYSIS FOR CONCRETE MATERIALS AND STRUCTURES

Cen Zhangzhi

(Tsinghua University)

G. Maier G. Novati

(Polyte of Milan)

Abstract In this paper the concrete material is considered as linear-elastic and isotropic but the fracture process is modelled according to the cohesive-softening crack idealization. A direct, collocation, multidomain boundary element method is employed and shown to be computationally effective in the softening analysis. Some unmerical results were given and discussed.

Key words Boundary Element Method, Cohesive-crack Model, Softening Analysis.