

重载径向轴承三维弹性流体润滑的 有限元和边界元耦合数值分析

孙 穆 林晓辉

(南京航务工程专科学校)

提 要 本文采用有限元和边界元技术分析了重载径向轴承的三维弹性流体润滑(EHL)问题,并提出了一种精度高、收敛快的加权迭代计算模式,用该计算模式成功地求解了由二阶 Reynolds 方程、粘压方程和三维弹性方程组成的非线性方程组,得到了在各种大偏心率下轴承材料分别为钢、铜和巴氏合金的径向轴承的弹流静特性参数。

关键词 弹流润滑、有限元、边界元

一、前 言

弹性流体润滑理论是经典润滑理论与弹性理论的结合,在重载情况下,轴承的弹性变形是影响最小油膜厚度的主要原因。目前国内外学者多偏重于研究高副接触的弹流润滑问题。而对于重载滑动轴承,一般要用低副接触的弹流润滑理论来分析,这时,弹性变形受轴承整体结构影响较大,不宜采用 Boussinesq 公式计算,要采用能反映轴承结构形状的三维弹性体数学模型。而在弹流润滑问题中只要求计算轴瓦表面的弹性变形,因而采用边界元求解最为合适,至于流体润滑方程,因需解出全场的油膜压力,所以采用有限元法求解较多。而本文提出的加权迭代模式,收敛速度快,计算精度高,较好地解决了大偏心率下弹流润滑非线性方程组的迭代收敛问题,并成功地将有限元与边界元的混合解法应用到弹流分析中,获得了重载下径向轴承三维弹流润滑问题的数值解。

二、基本方程

对于定常、层流、不可压缩牛顿流体,其 Reynolds 方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.1)$$

采用 Reynolds 边界条件即

$$p|_{r_1} = 0; \quad p \Big|_{r_2} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{r_2} = 0 \quad (2.2)$$

粘压方程 (本文采用指数关系) 为:

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p} \quad (2.3)$$

油膜间隙方程为:

$$h = c(1 + \varepsilon \cos \theta) + u \quad (2.4)$$

u 表示油膜压力导致轴瓦表面弹性变形对油膜厚度的修正, 其值由弹性方程确定。

弹性变形方程 (三维弹性变形方程, 即 Navier 方程) 为:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_x + \frac{\mu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \nabla u_x + b_x &= 0 \\ \mu \nabla^2 u_y + \frac{\mu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \nabla u_y + b_y &= 0 \\ \mu \nabla^2 u_z + \frac{\mu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \nabla u_z + b_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

三、数值方法

上节四组方程须用数值迭代解决。本文采用有限元法求解润滑方程, 而用边界元法求解弹性变形方程。

1. 润滑方程的有限元分析

引入无量纲参数

$$\theta = \frac{x}{R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}; \quad \bar{h} = \frac{h}{c}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0} \quad (3.1)$$

方程 (2.1) 化为

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (3.2)$$

边界条件 (2.2) 为

$$\bar{p}|_{r_1} = 0; \quad \bar{p} \Big|_{r_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \Big|_{r_2} = 0 \quad (3.3)$$

方程 (3.2) 相应的泛函为

$$I(\bar{p}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\bar{h}^3}{2\bar{\eta}} \left[\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] - \bar{h} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right\} d\Omega \quad (3.4)$$

将 Ω 域离散为几个单元, 每个单元内任意一点的压力为

$$\{\bar{p}^e\} = [N] \{\bar{p}_j\} \quad (3.5)$$

则单元代数方程组为

$$[K^e]\{\bar{p}^e\} = \{F^e\} \quad (3.6)$$

$$\text{式中 } k_{i,j}^e = \int_{\Omega^e} \frac{h^3}{\eta} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$F_i^e = \int_{\Omega^e} \bar{h} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} d\Omega$$

再将各单元方程组进行组装, 得如下润滑方程的有限元格式

$$[K]\{\bar{P}\} = \{F\} \quad (3.7)$$

引入边界条件后, 用超松弛迭代法求解上式。

2. 弹性方程的边界元分析

由 Betti 互易功定理和弹性变形方程 (2.5) 可导出三维线弹性力学的边界积分方程下标符号采用 Einstein 求和约定):

$$c_{ik} u_k + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_k^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_k^* b_k d\Omega \quad (3.8)$$

其中 $c_{ik} = \delta_{ik} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_k^* d\Gamma$ 是与边界形状有关的系数

$$u_k^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ik} + r_{,l} \cdot r_{,k}]$$

$$p_k^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,l} \cdot r_{,k}] - (1-2\nu)[r_{,l} n_k - r_{,k} n_l] \right\}$$

分别是三维线弹性力学的位移和面力基本解。下面引入无量纲参量:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{u} = \frac{u}{R}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}; \quad \bar{b} = \frac{b}{p_0} R$$

再将边界积分方程 (3.8) 沿边界 Γ 离散, 并略去体积力项, 可得其边界元方程

$$[\bar{H}]\{\bar{U}\} = [\bar{G}]\{\bar{p}\} \quad (3.9)$$

其中 $[\bar{H}] = [CI] + [\bar{H}']$

$$[CI] = \sum_i [T^i]^T [C^i] [T^i]$$

$$[\bar{H}'] = \sum_i \sum_e [T^i]^T [\bar{h}'] [T^e]; \quad [\bar{G}] = \sum_i \sum_e [T^i]^T [\bar{g}] [T^e]$$

$$[\bar{h}'] = \int_{\Gamma^e} [\bar{p}^*] [\Phi] d\Gamma; \quad [\bar{g}] = \int_{\Gamma^e} [\bar{u}^*] [\Phi] d\Gamma$$

引入边界条件:

$$\{\bar{U}\}|_{\Gamma_1} = \{\hat{\bar{U}}\}; \quad \{\bar{p}\}|_{\Gamma_2} = \{\hat{\bar{p}}\} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma; \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$$

(3.9) 式化为线性代数方程组:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (c.10)$$

其中 $[A]$ 为非对称满系数阵; $\{X\}$ 为边界节点的所有未知位移和面力分量列阵。由于

在迭代计算中要多次求解 (3.10) 式, 而在同一种工况下 $[A]$ 没有变化, 仅 $[B]$ 发生变化, 所以宜采用 Doolittle 三角分解来求解上式。

3. 数值迭代求解过程

首先用有限元法求解 Reynolds 方程, 得出其等粘度解, 再根据所解得压力分布由粘度方程求出各点的粘度, 再代回 Reynolds 方程求其粘度解, 直至收敛。将此收敛的变粘度压力分布代入弹性边界元方程, 求出各点的弹性变形, 如变形达到满意的精度, 则计算结束, 否则再回到 Reynolds 方程进行新的循环。

4. 迭代计算的收敛处理

弹流方程组的迭代收敛是弹流问题数值解的关键, 本文给出了一种有效且精度较高的迭代收敛技术, 称之为加权平均迭代法, 该方法表述如下:

设 u_k 为第 k 次迭代所得待求量 u 的当前值, 现取 $\bar{u}_k = \omega \bar{u}_{k-1} + (1-\omega)u_k$, 为了修正 u 的当前值, 收敛准则为:

$$\left| \frac{\bar{u}_k - \bar{u}_{k-1}}{\bar{u}_k} \right| \leq \varepsilon_0 \quad (3.11)$$

其中 ε_0 为给定的收敛精度; ω 为加权系数, $0 \leq \omega \leq 1$

对于收敛困难的问题, 可选取较大的值 ($\omega < 1$) 作为 ω 的初值 ω_0 , 通过若干次迭代使 (3.11) 式得到满足。然后取较 ω_0 小的 ω_1 , 并以 $\omega = \omega_0$ 时收敛的 u 值作为初值 \bar{u}_0 , 使 (3.11) 式再次得到满足。一般来说, 若 $\omega \leq 0.2$ 时仍能使 (3.11) 式满足, 便可认为通过迭代所得的 u 值具有相当高的精度。本文计算结果均是 ω 取到零迭代所得。文献 [2] 的双重均值法实际上是加权平均迭代法 $\omega = 0.5$ 的特例, 因此由双重均值法解得的 u 值精度是不高的。

四、计算结果

本文计算了三种常用材料, 九种偏心率下的 EHL 结果。原始数据为:

$$L/D = 1; U = 1300 \text{ cm/s}; D = 100 \text{ mm}; \Psi = 0.002; \eta_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ kgs/m}^2$$

图 1 和图 2 分别为润滑方程的有限元和弹性方程的边界元计算网格, 均采用三角单元。

图 3 为 $\varepsilon = 0.9$ 的三种不同轴承座材料下的轴承对称面上的弹性解和刚性解压力分布。

图 4 为三种不同轴承座材料下的弹性解和刚性解无量纲承载量曲线。刚性解的曲线是以 $\varepsilon = 1$ 为渐近线的, 而弹性解的曲线可以使 $\varepsilon > 1$ 。图 5 表示轴承座材料为钢的弹性解与刚性解的最小油膜厚度随 Sommerfeld 数的变化。图 6 为三种不同轴承座材料的弹性解最小油膜厚度随 Sommerfeld 数的变化。

图 7 为 $\varepsilon = 1.0$ 时巴氏合金轴承座材料的轴瓦表面的弹性变形 (经放大)。

表 1 至表 3 为三维弹性模型与半无限大弹性模型^[2]计算结果的比较。

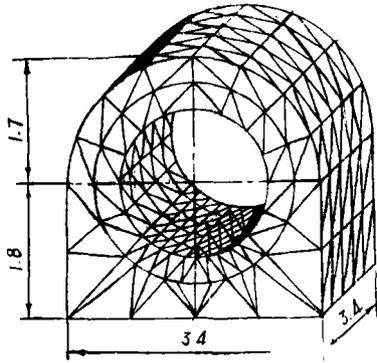


图 1

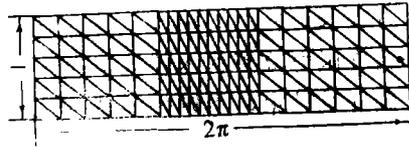


图 2

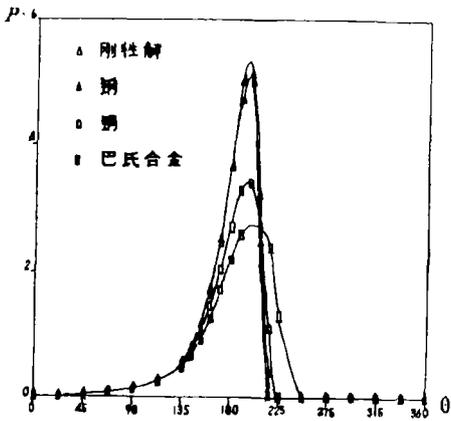


图 3

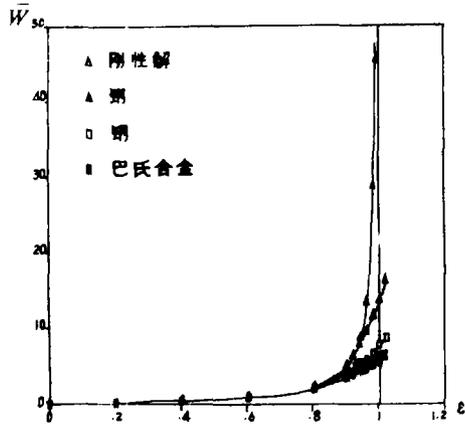


图 4

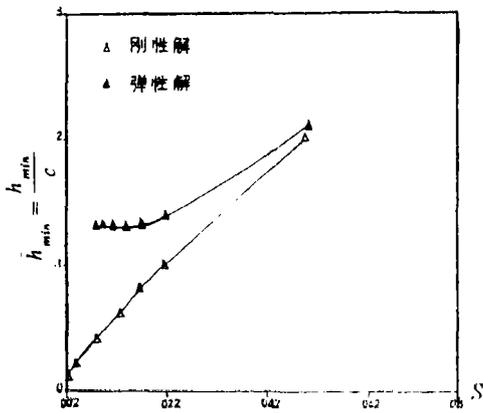


图 5

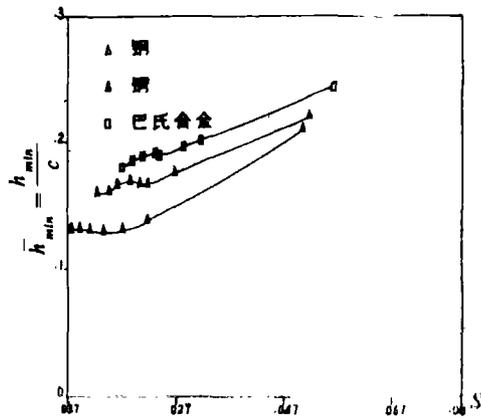


图 6

表 1 $E' = 2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ (轴颈为钢, 轴瓦为钢) *

半无限大弹性模型				三维弹性模型		
ε	\bar{W}	\bar{h}_{\min}	φ	\bar{W}	\bar{h}_{\min}	φ
0.9	13.83	0.1259	27.16°	14.78	0.1388	24.2°
0.95	20.67	0.09	22.23°	25.67	0.1317	17.4°
0.96	22.37	0.0831	21.26°	28.34	0.1307	16.2°

表 2 $E' = 0.79 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ (轴颈为钢, 轴瓦为铜)

半无限大弹性模型				三维弹性模型		
ε	\bar{W}	\bar{h}_{\min}	φ	W	\bar{h}_{\min}	φ
0.9	9.821	0.1495	28.99°	11.94	0.1759	24.9°
0.95	12.77	0.1167	24.75°	16.57	0.1656	20.10°
0.96	13.43	0.1108	24.18°	17.33	0.1697	19.1°

表 3 $E' = 0.5 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ (轴颈为钢, 轴瓦为巴氏合金)

半无限大弹性模型				三维弹性模型		
ε	\bar{W}	\bar{h}_{\min}	φ	\bar{W}	\bar{h}_{\min}	φ
0.9	8.356	0.1662	29.14°	10.15	0.2019	25.51°
0.95	10.30	0.1342	25.95°	13.43	0.1903	21.08
0.98	11.61	0.1162	24.01°	15.49	0.1896	18.87

E' 为当量弹性模量, $\frac{1}{E'} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$, 其中 E_1 、 E_2 及 ν_1 、 ν_2 分别为轴颈和轴瓦的弹性模量及泊松比。

从上列表中可以看出, 半无限大弹性模型的 \bar{W} 与 \bar{h}_{\min} 的值偏小, 而且与三维弹性模型的偏差随材料变软、偏心率增大而增加。

五、结 论

1) 本文的数值计算方法可以用于任何真实的轴承结构, 提出的加权平均迭代法可以较好地解决大偏心率即重载情况下弹流润滑问题的收敛, 并能得到较高精度的收敛解。

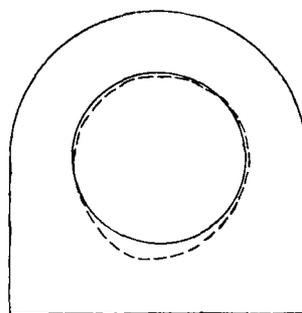


图 7

2) 计算结果表明, 采用半无限大弹性体计算模型会产生一定误差, 而且随着偏心率的增大而增大。

3) 在相同最小油膜厚度下, 弹性解的承载量大于刚性解, 且轴承座材料越软, 弹性解承载量越大。

4) 弹性解的偏心率可以大于 1。

符 号 说 明

x, y, z ——笛卡尔坐标

r, θ, z ——圆柱坐标

η ——润滑剂粘度

α ——粘压指数

p_0 ——参考压力 ($p_0 = \frac{6U\eta_0 R}{c^2}$)

c ——径向间隙

D ——轴承座内孔直径

ψ ——间隙比 ($\psi = \frac{C}{R}$)

ε ——偏心率

Γ ——计算域边界

μ ——剪切弹性模量

b_x, b_y, b_z —— x, y, z 方向上的体积力分量

S ——Sommerfelds 数 ($S = (\frac{R}{c})^2 \cdot \frac{\eta_0 N}{p}$) N ——轴颈每秒转数

n ——外法线向量

$\{p\}$ ——弹性系统节点面力列阵

$\{T^e\}$ ——单元与系统转换矩阵

$\{F\}$ ——已知节点面力列阵

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$

ϕ ——由最大间隙处顺时针方向计量的角度。

h ——油膜厚度

h_0 ——刚性假设下的油膜厚度

η_0 ——环境压力下润滑剂的粘度

p ——油膜压力

U ——轴颈表面速度

R ——轴承座内孔半径

L ——轴承座长度

W ——承载量

φ ——偏位角

Ω ——计算域

ν ——泊松比

$[N], [\Phi]$ ——插值函数

$\{\bar{U}\}$ ——弹性系统节点位移列阵

$[T^i]$ ——节点与系统转换矩阵

$\{\hat{U}\}$ ——已知节点位移列阵

$[H], [G]$ ——弹性边界元方程的影响系数矩阵

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

参 考 文 献

- [1] Carl, T. E, The Experimental Investigation of a Cylindrical Journal Bearing Under Constant and Sinusoidal Loading Proceedings, 2nd Convention on Lubrication and Wear Institution of Mechanical Engineers, Paper 19, 1964, pp100.
- [2] 岑少起, 陈瀚, 唐照民, 重载径向轴承润滑力学问题数值解, 西安交通大学学报, Vol. 16, No. 2, 1982.
- [3] Oh, k. P. & Huebner, K. H, Solution of the Elastohydrodynamic Finite Journal Bearing Problem, ASME, 1973.
- [4] 楼志文, 陈瀚, 马晓土, 弹性流体动力润滑理论有限解, 西安交通大学学报, No.2, 1979.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE FINITE ELEMENT AND THE BOUNDARY ELEMENT COUPLING OF THE THREE-DIMENSIONAL ELASTOHYDRODYNAMIC LUBRICATION FOR HEAVILY LOADED FINITE JOURNAL BEARINGS

Sun Mu Lin Xianhui

(The Navigation Engineering College of Nanjing)

Abstract A coupling of the finite element and the boundary element methods is applied to the analysis of the three-dimensional elastohydrodynamic lubrication for heavily loaded finite journal bearings. An iterative scheme, which is used to overcome the difficulty of the convergence at high eccentricity ratios, is provided in this paper. The scheme, which is called the weighted average method here, is successfully carried out in the iterative procedures of a set of non-linear equations that is constituted by a two-dimensional Reynolds' equations, a viscosity-pressure equation and three dimensional elasticity equations. The analysis yields EHL static performance parameters of journal bearings under various high eccentricity ratios. when bearing materials are steel, copper and bearing brass.

Key words: Elastohydrodynamic, finite element, boundary element.