第4卷 第3期　　工 程 力 学　　Vol. 4, №. 3
1987年8月　　Engineering Mechanics　　Aug. 1987

关于井筒巷道围岩应力分析计算模型合理尺寸的探讨

任 治 章

（阜新矿业学院工程力学教研室）

摘　　要

本文以圆截面水平巷道为例，从理论上探讨了围岩应力分析有限元计算模型的尺寸和计算精度之间的关系，并给出了简便实用的计算公式，为工程设计提供了可资参考的依据。

一、前　　言

用有限元法对矿山井筒、巷道围岩应力进行数值分析时，首先要划定一个适当的计算范围，即建立一定的计算模型。计算模型尺寸的合理确定，对保证计算精度，减少机器容量起着决定性作用。在岩土工程中，目前所采用的经验公式仅给出了模型尺寸的一个大致范围，究竟选多大尺寸才合理，往往要靠各自的经验，应用起来很不方便。本文以圆截面的水平巷道为例，从理论上对这个问题进行了初步探讨，建立了模型尺寸与计算精度之间的定量关系，给出的计算公式简便实用，为工程计算提供了可资参考的依据。

为便于理论分析，本文假定隧洞是在均匀分布的岩体初始应力场中进行开挖的。由此得到的结论，在定性上不失其一般性的规律性，对其他断面形状及处于非均匀初始应力场中的隧洞类结构围岩的分析也有一定的参考价值。

二、两种模型及其应力解析

平面轴对称问题的应力函数为

$$\varphi=\varphi(r) \tag{1}$$

代入相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\varphi=0 \tag{2}$$

可解得

$$\varphi=A\ln r+Br^2\ln r+Cr^2+D \tag{3}$$

式中A、B、C、D是任意常数。

应力分量与应力函数的关系为

本文于1986年3月10日收到

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

将式（3）代入式（4），得应力分量为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{A}{r^2}+B(1+2\ln r)+2C \\
\sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2}+B(3+2\ln r)+2C \\
\tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r}=0
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

将式（5）代入物理方程和几何方程，可得轴对称应力状态下的位移分量为

$$
\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{1}{E}\Big[-(1+\mu)\frac{A}{r}+2(1-\mu)Br(\ln r-1)+(1-3\mu)Br \\
&\quad +2(1-\mu)Cr\Big]+I\cos\theta+K\sin\theta \\
u_\theta &= \frac{4Br\theta}{E}+Hr-I\sin\theta+K\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

这是平面应力的情况。对平面应变问题，应将式（6）中的E换成$\frac{E}{1-\mu^2}$，μ换成$\frac{\mu}{1-\mu}$。式中的A、B、C、H、I、K都是任意常数。

在岩土工程中，为了用有限元法分析井筒或巷道围岩的应力场，要围绕井筒或巷道划定一个计算范围，即取出一个计算模型。为和下面的有限元模型相区别，我们称这种模型为“原始模型”。为便于分析，我们以水平巷道为例，并假定巷道的横断面为半径为a的圆形，而划出的“原始模型”为内半径为a、外半径为b的圆筒区域，如图1所示。该圆筒在内边界受均布拉力q（模拟水平巷道开挖后洞周边释放的应力，称之为开凿应力，为便于分析，假定为均布。由开凿应力产生的应力场称为开凿应力场）。“原始模型”与周围岩体保持弹性接触，因此该模型的应力可由压力隧洞的应力解答经适当变换得到。压力隧洞的应力为

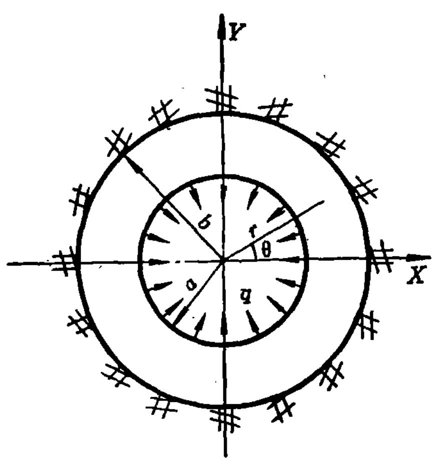

图1

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{-q\left[1+(1-2\mu)n\right]\dfrac{r^2}{b^2}-(1-n)}{\left[1+(1-2\mu)n\right]\dfrac{b^2}{a^2}-(1-n)}\\\sigma_\theta&=\frac{q\left[1+(1-2\mu)n\right]\dfrac{b^2}{r^2}+(1-n)}{\left[1+(1-2\mu)n\right]\dfrac{b^2}{a^2}-(1-n)}\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式中$n=\dfrac{E'(1+\mu)}{E(1+\mu')}$，其中$E'$、$E$分别为围岩及圆筒材料的弹性模量；$\mu'$、$\mu$分别为两种材料的泊松比。

由于"原始模型"与围岩是同种材料，因此令$n=1$，并用$-q$代换式（7）中的q（因压力隧洞在内边界受的是均布压力q），即得"原始模型"内实际应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=q\frac{a^2}{r^2}\\\sigma_\theta&=-q\frac{a^2}{r^2}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

但在用有限元位移法计算时，一般是认为模型外边界上因开挖引起的位移为零，因此，对外边界加以刚性约束，如图2所示。把原始模型做这样处理后，我们称之为有限元"计算模型"。显然，"计算模型"的应力分布与"原始模型"的将不一致。也就是说，有限元的计算结果与围岩的实际应力之间将存在一定的固有误差（即模型本身的近似所带来的基本误差。岩土工程中有限元结果的误差除了基本误差外，尚有岩体材料物理属性的模拟误差及所采用的数值方法本身的误差）。因此，为了提高有限元结果的可靠程度，把"计算模型"的选取所造成的固有误差限制在我们所希望的范围之内，具有重要的理论意义和实践意义。为了弄清这种固有误差的变化规律，我们先导出有限元"计算模型"内的应力分布规律。

这是轴对称位移问题，因此

$$u_\theta=0$$

将式（6）的第二式代入上式，显然

$$B=H=I=K=0$$

再代入式（6）的第一式，得

$$u_r=\frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r}+Cr(1-\mu)\right]\tag{9}$$

由于"计算模型"属平面应变问题，因此模型内的径向位移是

$$u_r=\frac{1-\mu^2}{E}\left[-\left(1+\frac{\mu}{1-\mu}\right)\frac{A}{r}\right.$$

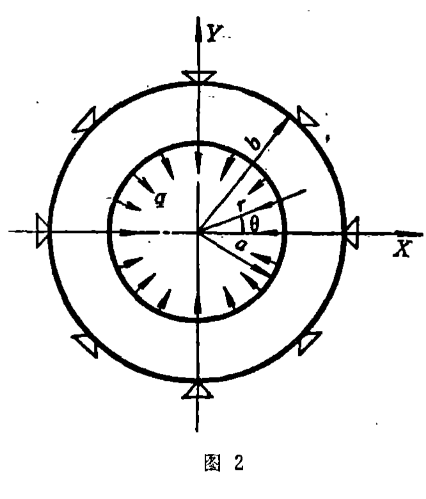

图 2

$$+2Cr\left(1-\frac{\mu}{1-\mu}\right)\Big] \tag{10}$$

将$B=0$代入式（5），得“计算模型”的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r' &= \frac{A}{r^2}+2C\\ \sigma_\theta' &= -\frac{A}{r^2}+2C\\ \tau_{r\theta}' &= \tau_{\theta r}'=0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

模型的边界条件是

$$(\sigma_r')_{r=a}=q \tag{12}$$

$$(\mu_r)_{r=b}=0 \tag{13}$$

将式（11）的第一式代入式（12），将式（10）代入式（13），得

$$\frac{A}{a^2}+2C=q$$

$$\frac{1-\mu^2}{E}\left[-\left(1+\frac{\mu}{1-\mu}\right)\frac{A}{b}+2Cb\left(1-\frac{\mu}{1-\mu}\right)\right]=0$$

解这两个方程，得

$$A=qa^2\frac{b^2(1-2\mu)}{[a^2+b^2(1-2\mu)]}$$

$$2c=\frac{qa^2}{[a^2+b^2(1-2\mu)]}$$

代入式（11），即得“计算模型”的应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r' &= q\frac{\dfrac{1-2\mu}{r^2}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1-2\mu}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}\\ \sigma_\theta' &= -q\frac{\dfrac{1-2\mu}{r^2}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1-2\mu}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

三、计算模型合理尺寸的确定

由（8）、（14）两式，可得计算模型应力分量的绝对误差：

$$\Delta\sigma_r=|\sigma_r'-\sigma_r|=qa^2\frac{r^2-a^2}{r^2[b^2(1-2\mu)+a^2]} \tag{15}$$

$$\Delta\sigma_\theta=|\sigma'_\theta-\sigma_\theta|=qa^2\frac{r^2+a^2}{r^2[b^2(1-2\mu)+a^2]} \tag{16}$$

这是围岩开凿应力场的绝对计算误差。由于围岩应力等于开凿应力与原岩应力的叠加，若假定在计算范围内原岩应力均布，则（15）、（16）两式即为峒室围岩应力的绝对计算误差。我们把$\Delta\sigma_r$、$\Delta\sigma_\theta$与原岩应力q的绝对值的比

$$\left.\begin{aligned}\eta_{\sigma r}&=\frac{\Delta\sigma_r}{q}\\ \eta_{\sigma\theta}&=\frac{\Delta\sigma_\theta}{q}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

定义为名义计算误差。显然，名义计算误差的变化规律与计算模型的绝对误差是一致的，并且一般说来名义计算误差是大于围岩的实际相对计算误差的。因此，从控制名义计算误差入手来确定计算模型的合理尺寸，一般来说是偏于安全的。

将式（15）、（16）代入式（17），得

$$\eta_{\sigma r}=\frac{a^2(r^2-a^2)}{r^2[b^2(1-2\mu)+a^2]} \tag{18}$$

$$\eta_{\sigma\theta}=\frac{a^2(r^2+a^2)}{r^2[b^2(1-2\mu)+a^2]} \tag{19}$$

由式（18）可以看到，$\eta_{\sigma r}$随着r的增大而增大，在巷道内壁处，误差最小。越靠近模型外边界，误差越大。当r一定时，$\eta_{\sigma r}$随b的增大而减小。由式（19）可以看到，$\eta_{\sigma\theta}$随着的增大而减小，在巷道内壁处误差最大。当r一定时，$\eta_{\sigma\theta}$随着b的增大而减小。

我们知道，所谓孔应力集中现象，其实就是由环向应力σ_θ的值在孔边急剧增大而引起的。因此，确定计算模型尺寸的原则，就是首先要把σ_θ的计算误差$\eta_{\delta\theta}$控制在所希望的范围内。设允许的最大误差为W，则由式（19）有

$$\eta_{\sigma\theta max}=(\eta_{\sigma\theta})_{r=a}=\frac{a^2[a^2+a^2]}{a^2[b^2(1-2\mu)+a^2]}=\frac{2a^2}{b^2(1-2\mu)+a^2}=W$$

由此得

$$b=a\sqrt{\frac{2-W}{W(1-2\mu)}} \tag{20}$$

这就是根据环向应力σ_θ的精度要求选择计算模型合理尺寸的公式。确定了b后，可利用式（18）来校核径向应力σ_r的计算精度。可以验证，一旦确定了W值，并由式（20）求出了相应的b值后，那么根据式（18）求出的径向应力σ_r的最大计算误差$(\eta_{\sigma r})_{r=b}$总是远小于W的。因此，利用式（20）确定了b后，一般不需要再来校核径向应力的计算误差。

式（20）建立了模型尺寸和计算精度之间的定量关系，是确定计算模型合理尺寸的基本公式，其具体应用包括两个方面：

（1）在峒室半径及围岩材料已知的前提下，利用该式可根据选定的最大计算误差W来确定计算模型的合理尺寸。

(2) 对于尺寸已定的计算模型，可利用该式来估计计算误差。此时，式 (20) 变成如下形式：

$$W=\frac{2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2(1-2\mu)+1} \tag{21}$$

四、应用举例

下面，通过两个例子，来具体说明上述两方面应用。

例 1　已知圆形巷道半径为 a，围岩材料 $\mu=0.3$，欲使围岩应力分析的计算误差：(1)不即超过 10%；(2) 不超过 5 %。试问计算模型的外径 b 应取多大？

解　(1) 这里$W=0.1$，将已知数据代入式 (20)，得

$$b=a\sqrt{\frac{2-0.1}{0.1\times(1-2\times0.3)}}=6.89a\approx7a$$

(2) 这里$W=0.05$，将已知数据代入式 (20)，得

$$b=a\sqrt{\frac{2-0.05}{0.05\times(1-2\times0.3}}=9.87a\approx10a$$

目前，在岩土工程中，在对地下工程围岩进行稳定分析时，根据孔边应力集中的影响范围，建议所取的计算范围的边界至峒室中心的距离为 3.5～5 倍跨宽，即计算模型的尺寸 $b=(7\sim10)a$。由此例可以看到，这样选取的计算模型，其计算精度是令人满意的。

例 2　设某巷道半径为 a，围岩 $\mu=0.3$，试考当 $b=2a$、$3a$、$4a$、$5a$、$6a$ 时计算模型的最大计算误差。

解　将已知数据代入式 (21)，得

$$(W)_{b=2a}=\frac{2}{2^2\times(1-2\times0.3)+1}=0.77=77\%$$

$$(W)_{b=3a}=\frac{2}{3^2\times(1-2\times0.3)+1}=0.44=44\%$$

$$(W)_{b=4a}=\frac{2}{4^2\times(1-2\times0.3)+1}=0.27=27\%$$

$$(W)_{b=5a}=\frac{2}{5^2\times(1-2\times0.3)+1}=0.18=18\%$$

$$(W)_{b=6a}=\frac{2}{6^2\times(1-2\times0.3)+1}=0.13=13\%$$

从此例可以看到，当 $b=6a$ 时，计算模型的计算误差便不超过 13%。鉴于当前岩土工程数值分析的特点（即由于诸如计算所需的岩石力学参数还难以准确确定各种复杂因素的

影响，使当前的定量计算，仅处于定性使用的阶段。就是说，当前数值分析的结果，一般只能作为工程设计的参考依据），过份追求模型选取的高精度并无太大的实际意义。相反，计算模型选得越大（如取 $b=10a$），对计算机容量的要求也就越高，计算成本势必相应增大。因此，笔者建议，在一般情况下，作为一种定性估计，取计算模型的尺寸 $b=6a$，即选取的计算范围的边界至峒室中心点的距离为3倍跨宽就可以啦。

五、结　语

综合本文的讨论，可归纳为下列三点：

1. 本文以圆截面水平巷道为例，建立了计算模型的计算精度和尺寸之间的定量关系，给出了简便实用的公式（20）和（21），为工程设计提供了可资参考的依据。

2. 验证了当前岩土工程中所建议采用的计算模型（$b=7\sim10a$）的计算精度是令人满意的。

3. 笔者建议，当前在一般情况下，取计算模型的尺寸 $b=6a$ 就可以了。这样做，实际的精度损失不会太大，却可以有效地减少存储容量，降低计算成本，并能减轻原始数据准备的工作量。

本文的结论，对其他断面形状及走向的隧洞类结构围岩的分析也有一定的参考价值。

参 考 文 献

［1］ 于学馥，郑颖人，刘怀恒，方正昌，地下工程围岩稳定分析，煤炭工业出版社，1983年。

［2］ 刘怀恒，有限元法原理及程序，西安矿业学院，1983年。

［3］ 徐芝纶，弹性力学，人民教育出版社，1979年。

［4］ J.C. 耶格，N.G. 库克，岩石力学基础，科学出版社，1983年。

THE EXPLOREFOP FOR REASONABLE DIMENSION OF THE CALCUIATED MODEL CONCERNING STRESS ANALYSIS FOR THE SURROUNDING ROCK OF THE PIT SHAFT OR THE TUNNEL

Ren Zhi Zhang

Abstract

In this paper, author taking the horizontal tunnel with circle section as an example, has explored theoretically the relation between the dimension of the calculated model on which we analyse the stress cf the surroundiug rock by finite element method and the calculating accurlating, and given the simple anb convenient calculating formulas, providing reference basis for engineering besign.