文章编号：1000-4750(2012)03-0230-07

塑性强化材料颗粒的微观接触摩擦研究

吴　永[1,2]，何思明[1,2]，李新坡[1,2]

(1. 中国科学院山地灾害与地表过程重点实验室，成都 610041；2. 中国科学院-水利部成都山地灾害与环境研究所，成都 610041)

摘　要：合理的颗粒接触摩擦模型是从微观角度研究各类结构面强度的基础，然而受制于岩土体颗粒在微观高应力环境中表现出的复杂接触特征，该问题一直未能很好解决。Fujimoto 在 2000 年给出了受切向荷载作用的微凸体在理想弹性或完全塑性接触状态下的微观位移特性，但却缺少对塑性强化接触状态下的摩擦进行解析，难被用于分析微观高应力状态下岩土颗粒的接触摩擦。为此，以 Fujimoto 模型为基础，结合作者曾经提出的塑性强化接触变形理论，在构建塑性强化接触状态下颗粒微观位移模型的基础上，系统的研究了切向荷载作用下塑性强化材料颗粒的接触摩擦机理，阐明了不同接触状态下塑性强化材料颗粒的切向微观位移特征。最后通过算例分析显示了模型的合理性。结果表明：颗粒摩擦本质上是不同法向荷载不同接触状态区域按照不同摩擦类型提供摩擦的综合，而摩擦失稳就是接触面上微滑区扩大、粘着区缩小并消失的过程。

关键词：Fujimoto 模型；塑性强化材料；接触摩擦；粘着区；微观位移

中图分类号：TB302.3; O313.5　　**文献标志码：**A

STUDY ON MICRO CONTACT FRICTION OF PLASTIC HARDENING PARTICLES

WU Yong[1,2] , HE Si-ming[1,2] , LI Xin-po[1,2]

(1. Key Laboratory of Mountain Hazards and Surface Process, Chinese Academy of Science, Chengdu 610041, China;

2. Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, China)

Abstract: As the foundation of the microcosmic study on shear strength of structural planes, the contact friction model of particles has never been built rationally because of the complex plastic deformation under high stress. Although the character of asperity micro-displacements caused by a tangential load under perfect elastic or fully plastic contact states was studied clearly by Fujimoto in 2000, it cannot be used to explain the friction mechanism of geotechnical particles with plastic hardening deformations. Here taken the Fujimoto model as the foundation, and based on the plastic hardening contact theory ever proposed by the author, the contact friction mechanism of plastic hardening particles is researched systematically so as to illustrate the relation between friction and tangential displacements with different contact states. At last, an example is given to verify the application of the theoretical method proposed. The result shows that the friction of micro-asperities is the sum of different kinds of friction on different contact areas with different contact states, and the start of sliding is a process that a micro-slip area increases while stick zone disappears.

Key words: Fujimoto model; plastic hardening materials; contact friction; stick zone; micro-displacement

随着技术的进步，微观接触摩擦日渐成为地学领域解决岩体结构面抗剪强度的重要手段[1−3]。然而，由于组成宏观结构面的岩土质颗粒(图 1)在微观高应力状态下因尺寸效应常表现出较强的弹塑性

收稿日期：2010-06-17；修改日期：2010-09-15
基金项目：国家自然科学基金重点项目(40830742)；国家自然科学基金项目(40872181，41002114)；四川省科技计划项目(2008JY0004)
通讯作者：吴　永(1981－)，男，安徽人，助研，博士，主要从事滑坡灾害形成机制与防治技术研究(E-mail: wyhongyu@163.com).
作者简介：何思明(1968－)，男，四川人，研究员，博士，主要从事山地灾害形成机制与防治技术研究(E-mail: hsm112003@yahoo.com.cn)；
李新坡(1978－)，男，山东人，副研，博士，主要从事滑坡灾害形成机制与防治技术研究(E-mail: sinpore@126.com).

变形特性，导致作为微观摩擦理论核心的单微凸体接触摩擦模型一直没有得到很好的解决，严重的阻碍了现代摩擦学在地学中的应用。

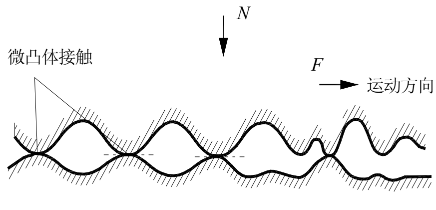


图 1　结构面微观接触形态

Fig.1　Micro contact morphology of structural plane

实际上在材料力学领域，国内外众多学者已对颗粒接触摩擦问题做了研究[4−7]，并认为接触微凸体在发生整体滑动前，其静态的接触摩擦主要由接触面上外围微观滑动区域提供。Fujimoto T 等[8]在建立微凸体和平面的接触摩擦模型的基础上，细致的研究了这种摩擦性质，同时结合相关模型试验[9]建立了微凸体切向微观位移和切向力(静摩擦力)之间的关系表达。然而，由于该理论均是基于接触材料处于完全弹性或完全塑性接触状态上提出的，得出的规律也只适用于实际材料在较低或极高法向荷载作用下的接触摩擦，与实际有很大出入。

最近，何思明等[10]以 Fujimoto 模型为基础，通过解析不同接触状态下的摩擦机理，较合理的阐明了理想弹塑性材料颗粒的微观位移特性。然而，该模型仍然没有解决普通弹塑性材料颗粒的接触摩擦变形特征。

为此，本文以 Fujimoto 模型为基础，结合法向荷载下微凸体的弹塑性接触变形模型，在构建塑性强化接触状态下颗粒微观位移模型的基础上，研究了处于微观高应力状态下岩土质颗粒材料的接触摩擦特性。

1　弹塑性颗粒的塑性强化接触模型

弹塑性颗粒接触摩擦复杂的根源在于接触状态的多重性，即随法向荷载不同，微凸体可以经历完全弹性、弹塑性甚至完全塑性等几个接触变形阶段。为描述弹塑材料颗粒的接触变形，如图 2，作者在文[11]中通过引入塑性强化系数的方式，建立了塑性强化材料颗粒的接触变形模型。

材料本构关系为：

$$p=\begin{cases}\dfrac{2E}{\pi\sqrt{R}}\sqrt{\delta}, & \sqrt{\delta}\leqslant\sqrt{\delta_y}\\ p_y+k(\sqrt{\delta}-\sqrt{\delta_y}), & \sqrt{\delta}\geqslant\sqrt{\delta_y}\end{cases}\tag{1}$$

式中：k 为强化系数，与材料本身物理性质有关；p 为法向接触应力；δ 为法向接触变形；δ_y 是临塑强度为 p_y 材料颗粒的临塑变形，可表示为：

$$\delta_y=\frac{\pi^2 R p_y^2}{4E^2}\tag{2}$$

这里 E 是材料等效弹性模量，R 是接触颗粒的等效半径，二者可分别表示为：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{E}=\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}\\ \dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\end{cases}\tag{3}$$

其中：E_1、ν_1、E_2、ν_2 分别为接触颗粒各自的弹性模量和泊松比；R_1、R_2 为接触颗粒各自半径，特别说明当 $R\to\infty$时接触颗粒即为无限大平面。

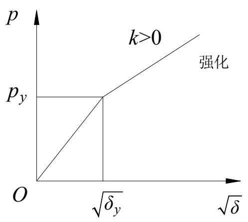


图 2　球体接触点上法向应力-变形关系

Fig.2　Relation between normal stress and normal deformation

Brizmer V 等[12]在假设材料满足 von Mises 屈服准则条件下，给出了材料临塑强度的计算公式：

$$p_y=Y(1.234+1.256\nu)\tag{4}$$

式中，Y 和 ν 分别为颗粒屈服强度和泊松比。

当法向荷载 P 小于颗粒接触中心初始进入塑性状态的临界荷载 P_y 时，微凸体与平面的接触处于完全弹性状态。根据 Hertz 理论，此时接触面是半径为 a 的圆，对应压应力 $p(r)$分布为：

$$p(r)=\frac{3P}{2\pi a^2}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{1/2}\tag{5}$$

这里 P_y 为颗粒初始屈服时的法向荷载，可表示为：

$$P_y=\frac{4}{3}ER^{1/2}\delta_y^{3/2}\tag{6}$$

如图 3，当 $P>P_y$ 时，塑性区开始从接触中心出现并向外扩散，周围弹性区仍服从 Hertz 分布。相应接触应力分布为：

$$p(r)=\begin{cases}\dfrac{3P_e}{2\pi a^2}\left[1-\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right]^{1/2}, & r\geqslant a_p\\ p_y+k\left(\sqrt{\delta-\dfrac{r^2}{2R}}-\sqrt{\delta_y}\right), & r\leqslant a_p\end{cases}\tag{7}$$

式中：P_e 为理想弹性颗粒在接触半径为 a 时的接触压力；a_p 为颗粒接触面上塑性区半径，可表示为：

$$a_p = \sqrt{a^2 - \frac{3P}{2\pi p_y}} \tag{8}$$

根据力的平衡条件，结合式(7)可以给出塑性强化材料的颗粒在塑性强化接触状态下荷载 P 方程：

$$P = \pi R(\delta - \delta_y)(p_y - k\sqrt{\delta_y}) + \frac{4k\pi R}{3}\left[\delta^{3/2} - \left(\frac{\delta + \delta_y}{2}\right)^{3/2}\right] + P_y \tag{9}$$

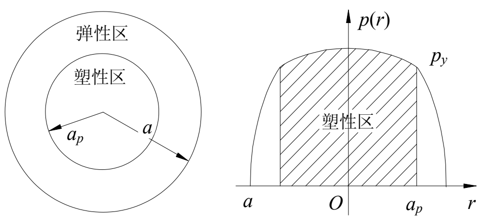


图 3　接触面上法向应力分布

Fig.3　Distribution of normal stress on contact surface

2　不同接触状态下微凸体的切向微观位移特征

研究[13−14]表明，两个粗糙面间的接触摩擦可模型化为粗糙面与平面间的接触摩擦问题。如图 4，此时微凸体与平面的接触可分为内部粘着区和外围微滑区的两种切向摩擦状态，Cattaneo(1938)[15]和 Mindlin(1949)[16]给出了中心粘着区半径 c 随法向荷载 P 和切向荷载 T 变化的规律：

$$c = a \cdot \left(1 - \frac{T}{\mu P}\right)^{1/3} \tag{10}$$

显然，随着切向荷载 T 的增加，粘着区不断缩小直至消失，并最终实现接触摩擦的宏观滑移。

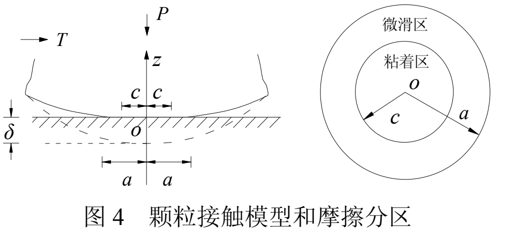
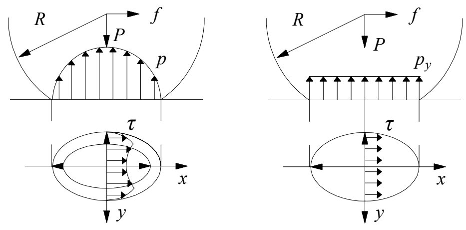


图 4　颗粒接触模型和摩擦分区

Fig.4　Contact model of particles and friction zones

2.1　理想弹性和完全塑性接触条件下微凸体的切向微观位移模型——CM 解

处于不同法向接触应力状态的微凸体微观位移特征是不同的，如图 5，Fujimoto 研究[8]通过大量理论分析和实验给出了切向荷载下处于理想弹性或完全塑性接触状态微凸体的微观位移模型。



(a) 理想弹性　　　　(b) 完全塑性

图 5　不同接触状态下接触面应力分布

Fig.5　Distribution of normal and tangential stress on contact surface with different contact states

在较小法向荷载 P 作用下，微凸体与平面法向的接触处于完全弹性状态，如图 5(a)，此时接触应力服从式(5)分布。若此时切向荷载 T 导致微凸体与平面间发生了大小为 s 的微观相对滑移，则当 $s > s_{ce} = C_e P^{2/3}$ 时，粘着区消失，整体滑移出现，接触摩擦也由最初的静摩擦过渡到滑动摩擦：

$$f = \begin{cases} \mu P\left[1 - \left(1 - \dfrac{s}{s_{ce}}\right)^{3/2}\right], & s < |s_{ce}| \\ \mu P, & s > |s_{ce}| \end{cases} \tag{11}$$

其中：临界滑移量 s_{ce} 的参数 $C_e = \dfrac{3}{8}\mu \cdot k_k \left(\dfrac{4E}{3R}\right)^{1/3}$；$k_k = \dfrac{(1+\nu_1)(2-\nu_1)}{E_1} + \dfrac{(1+\nu_2)(2-\nu_2)}{E_2}$。

反之当 P 较大时，微凸体与平面间的接触处于完全塑性状态。如图 5(b)，此时接触面压应力恒定为 p_y，对应当微观位移量 $s > s_{cp} = C_p P^{1/2}$ 时，摩擦接触由整体稳定状态向完全滑动状态过渡，即：

$$f = \begin{cases} \mu P \dfrac{s}{s_{cp}}, & s < |s_{cp}| \\ \mu P, & s > |s_{cp}| \end{cases} \tag{12}$$

其中，临界滑移量 s_{cp} 的参数 $C_p = \mu \cdot k_k \left(\dfrac{p_y}{\pi}\right)^{1/2}$。

2.2　塑性强化接触条件下微凸体微观位移特性

虽然 CM 模型合理的解析了理想弹性或完全塑性接触状态下的接触摩擦问题，但对更广泛存在的塑性强化接触状态下的摩擦问题缺乏合理解答。

结合弹塑性颗粒的塑性强化接触模型(图 2)，可定义弹塑性材料的“强化模数”K 为颗粒在塑性强化接触时接触应力-应变率相对弹性接触应力-应变率的程度：

$$K = \frac{k}{k'} \tag{13}$$

式中，k' 为弹性段弹性系数，结合图 1 可以表示为：

$$k' = \frac{p_y}{\sqrt{\delta_y}} \tag{14}$$

对Fujimoto给出的理想弹性和完全塑性接触状态下微凸体切向滑移整体启动的临界位移条件进行代换和化简后有：

$$\begin{cases} s_{ce} = 0.375\mu k_k \dfrac{P}{a} \\ s_{cp} = 0.318\mu k_k \dfrac{P}{a} \end{cases} \tag{15}$$

显然，本质上临界切向滑移条件都是外荷载 P 的函数。为此，结合“强化模数”K 的定义可给出弹塑性强化接触状态下接触微凸体切向滑移整体启动的位移条件：

$$s_{ep} = (0.318 + 0.057K)\mu k_k \frac{P}{a} \tag{16}$$

以理想弹性和完全塑性条件下微凸体微观位移特征的式(7)和式(8)为基础，可构造出塑性强化条件下微凸体微观位移模型：

$$f = \begin{cases} \mu P[1-(1-s/s_{ep})^m], & s < |s_{ep}| \\ \mu P, & s > |s_{ep}| \end{cases} \tag{17}$$

其中，m=1.5^K；其它符号意义同前。

显然，当 K=1 时式(17)即为式(11)；而 K=0 时，又符合式(12)模式。也就是说，Fujimoto 给出的理想弹性和完全塑性接触下的微凸体切向微观位移模型只是塑性强化接触状态下微凸体切向微观位移模型的特例而已。

3　塑性强化材料颗粒的接触摩擦

颗粒在不同法向荷载下表现出不同的接触状态，而不同程度的接触提供的摩擦类型又有差异，故颗粒接触摩擦就是不同接触区域按不同摩擦模式提供抗滑力的过程。

法向荷载较小或较大情况下的完全弹性及完全塑性接触摩擦已由 CM 解给出，这里仅讨论 $P>P_y$ 时颗粒的接触摩擦问题。此时接触面接触状态包含中心塑性强化和外围理想弹性两种(图 3)，而响应的摩擦状态则可分为内部粘着摩擦和外围微滑摩擦(图 4)两类。由于粘着区范围不断随按式(10)变化，导致接触状态和摩擦状态的组合方式也不断变化，继而按不同的总和模式提供颗粒接触摩擦。

3.1　半径 $c \geqslant a_p$，即粘着区大于/等于塑性强化区

在特定法向荷载 P 作用下，若 T 较小时，则粘着区域很大，粘着半径大于或等于塑性区半径。如图 6 所示。此时接触摩擦力由以下三部分构成：

1) 塑性强化粘着区 $(0 \leqslant r < a_p)$ 的摩擦可由式(17)给出：

$$f_1 = \mu P_1[1-(1-s/s_{ep})^m] \tag{18}$$

式中，$s_{ep} = (0.318+0.057K)\mu k_k P_1/a$ 时；P_1 满足：

$$P_1 = 2\pi\int_0^{a_p} k(\sqrt{\delta - r^2/(2R)} - \sqrt{\delta_y}) r\mathrm{d}r \tag{19}$$

2) 弹性粘着区 $(a_p \leqslant r < c)$ 的摩擦由式(11)给定：

$$f_2 = \mu P_2\left[1-\left(1-\frac{\delta}{\delta_{ce}}\right)^{3/2}\right] \tag{20}$$

式中，$\delta_{ce} = C_e P_2^{2/3}$；$P_2$ 满足：

$$P_2 = 2\pi\int_{a_p}^{c} \frac{3P_e}{2\pi a^2}[1-(r/a)^2]^{1/2} r\mathrm{d}r \tag{21}$$

3) 弹性微滑区 $(c \leqslant r \leqslant a)$ 的摩擦直接由滑动摩擦定律给出：

$$f_3 = \mu P_3 \tag{22}$$

$$P_3 = P - P_1 - P_2 \tag{23}$$

微凸体接触面上的摩擦力：

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \tag{24}$$

由于接触面在微观滑移阶段产生的摩擦力 f 与外力 T 大小一致，则：

$$T = \mu\frac{P_e}{a^3}[(a^2-a_p^2)^{3/2} - (a^2-c^2)^{3/2}] \tag{25}$$

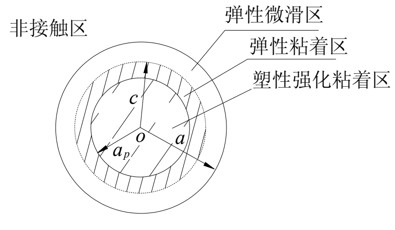


图 6　$c \geqslant a_p$ 接触面接触摩擦分区

Fig.6　Different friction zones on contact surface while $c \geqslant a_p$

3.2　半径 $c < a_p$，即粘着区在塑性强化区内

当切向荷载 T 继续增大时，粘着区域已缩小到塑性区内部，如图 7，此时摩擦由三部分构成：

1) 塑性强化粘着区 $(0 \leqslant r < c)$ 的摩擦由式(17)给出：

$$f_1 = \mu P_1[1-(1-s/s_{ep})^m] \tag{26}$$

式中，$s_{ep} = (0.318+0.057K)\mu k_k P_1/a$ 时；P_1 满足：

$$P_1 = 2\pi\int_0^c k(\sqrt{\delta - r^2/(2R)} - \sqrt{\delta_y})r\mathrm{d}r \tag{27}$$

2) 塑性强化微滑区 ($c \leqslant r < a_p$) 的摩擦：

$$f_2 = \mu P_2 \tag{28}$$

$$P_2 = 2\pi\int_c^{a_p} k(\sqrt{\delta - r^2/(2R)} - \sqrt{\delta_y})r\mathrm{d}r \tag{29}$$

3) 弹性微滑区 ($a_p \leqslant r \leqslant a$) 的摩擦：

$$f_3 = \mu P_3 \tag{30}$$

$$P_3 = P - P_1 - P_2 \tag{31}$$

由于接触面在微观滑移阶段产生的摩擦力 f 与外力 T 大小一致，则：

$$T = \mu\frac{P_e}{a^3}[(a^2 - a_p^2)^{3/2} - (a^2 - c^2)^{3/2}] \tag{32}$$

需要说明的是：1) 以上两种接触状态与摩擦状态的组合不可能同时出现，特定的法向荷载下只能遵循其中一种组合摩擦方式；2) 无论何种接触摩擦模式，微凸体宏观启滑的判据是粘着区的消失 $(c = 0)$，对应切向荷载 $T = \mu P$ 。

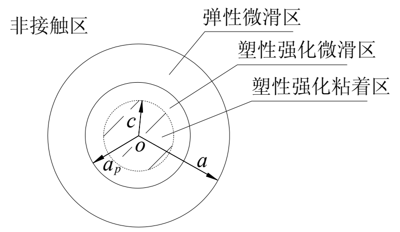


图 7 $c<a_p$ 接触面接触摩擦分区

Fig.7 Different friction zones on contact surface while $c<a_p$

4 算例

为验证本文理论方法的合理性，这里采用文[17]提供的岩质颗粒应力-应变资料进行验算。假定接触发生在半径 R_1=0.5mm 的微凸体与为 R_2=∞的平面间，而二者弹性模量 E_1 和 E_2 均为 1.6GPa，泊松比 ν_1 和 ν_2 均为 0.32，岩质颗粒的屈服强度 Y=21MPa，强化系数 k =7.0×10^9；摩擦系数 μ=0.27。

从图 8 可以看出，颗粒临塑变形 δ_y=1.824μm 很小，即只有 $\delta < \delta_y$ 时接触压力和法向接触变形才服从 Hertz 弹性接触理论，而多数情况下的 $\delta \geqslant \delta_y$ 接触则服从强化模型。

图 9 为不同接触模型所计算出来的法向压力 (P)和接触变形(δ)在 $\delta \geqslant \delta_y$ 时的关系。可见塑性强化接触模型解介于 Hertz 弹性解和 Thornton 解之间。这说明相同接触压力下，传统 Hertz 解得出的压缩变形过小，而 Thornton 解又太大，都与实际有很大出入。

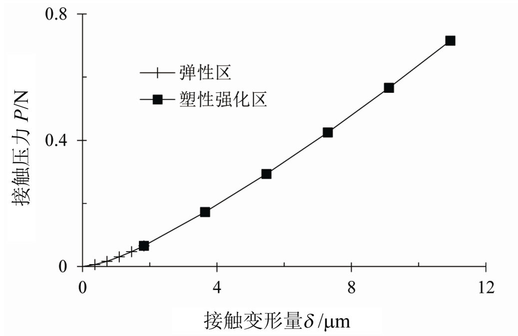


图 8 颗粒的压力-变形计算曲线

Fig.8 Contact force-normal deformation curve of particles

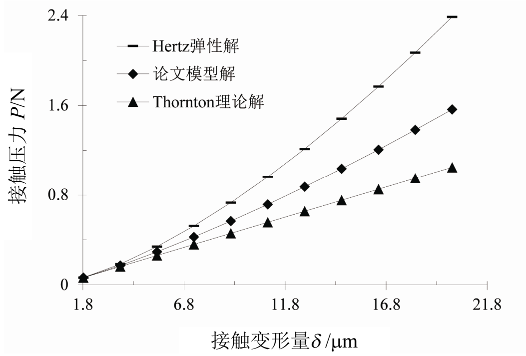


图 9 不同接触模式下法向压力-法向变形关系

Fig.9 Relation between T-δ calculated by different models

材料强化系数对接触面上 P-δ 关系的影响见图 10，可见强化系数越高，曲线越接近 Hertz 弹性解；强化系数越低，越接近 Thornton 解。

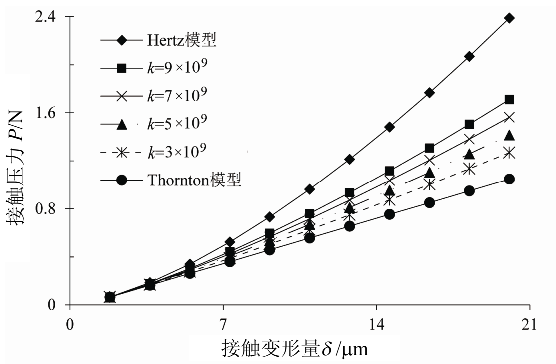


图 10 强化系数对接触压力和接触变形关系的影响

Fig.10 Effect of k on the relation of T-δ

由式(6)知颗粒初始进入塑性状态的荷载 P_y=0.065N，可见发生弹性接触摩擦的法向荷载是很小的。图 11 是法向荷载分别为 0.05N 和 0.1N 时切向荷载作用下颗粒完全弹性和塑性强化接触状态下的摩擦-微观位移曲线。可见，相对于弹性状态的接触摩擦，弹塑性接触状态下的颗粒在切向荷载作用下整体进入滑动状态的所需要的微观相对位移量有显著提高。

另外，塑性强化接触状态下的摩擦机理也复杂

的多。如图 11，微凸体出现整体滑动时处于弹性接触状态的颗粒摩擦几乎与动摩擦 μP 一致，而处于塑性强化接触状态下的摩擦极值却要大于滑动摩擦。

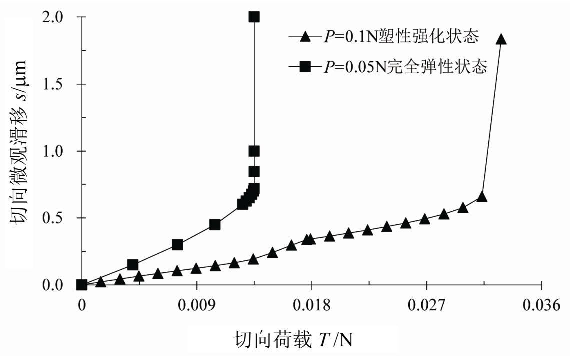


图 11　弹性和弹塑性荷载下接触面接触摩擦-微观位移关系

Fig.11　Relation between T-δ on contact surface under elastic and elastic-plastic state

按照本文理论模型，图 12 计算了法向荷载分别为 0.67N、1.34N 和 2.01N 时的颗粒摩擦力-微观位移关系曲线。显见，随法向荷载的增加，颗粒进入整体滑移状态时所需要的微观位移也越大，接触面上的摩擦阻力也越来越大，塑性微滑摩擦在整个接触摩擦演变过程中作用越来越大。

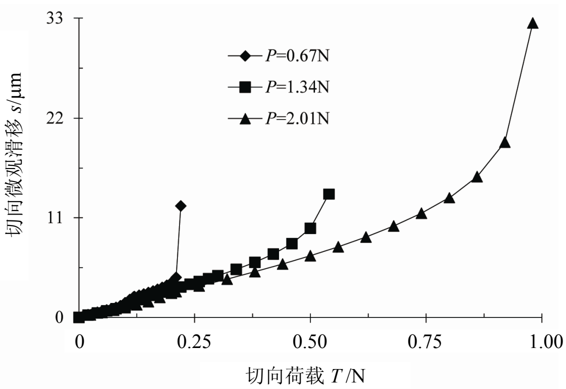


图 12　不同法向荷载下接触面接触摩擦-微观位移关系

Fig.12　Relation between T-δ on contact surface under different elastic-plastic loads

5　结论

以 Fujimoto 模型为基础，结合已提出的塑性强化接触变形理论，在构建塑性强化接触状态下颗粒微观位移模型的基础上，系统的研究了切向荷载作用下塑性强化材料颗粒的接触摩擦机理，阐明了不同接触状态下塑性强化材料颗粒的切向微观位移特征。通过算例的分析，可以得出以下结论：

(1) 组成结构面的岩土质颗粒会因应力集中和尺寸效应而表现出一定的塑性强化性质，并且很小法向荷载作用下就可进入这种接触状态。也就是说，实际结构面的抗剪强度本质上可归结为众多处于塑性强化接触状态下岩土质颗粒的摩擦问题。

(2) 计算结果表明：随法向荷载的增加，微凸体进入整体滑移状态时所需要的微观位移越大，接触面上的摩擦阻力也越来越大。

(3) 理论上，颗粒接触摩擦可分为完全弹性($P<P_y$)、弹塑性和完全塑性($P\to\infty$)三种接触摩擦，但实际中多为塑性强化接触摩擦。

(4) 颗粒摩擦本质上是接触面上不同接触状态区域按不同摩擦模式提供摩擦的总和。而摩擦滑移则是粘着区缩小，微滑区扩大的过程。

参考文献：

[1] Haberfield C M, Johnston I W. A mechanistically-based model for rough rock joints [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1994, 31(4): 279－292.

[2] Kwon T H, Hong E S, Cho G C. Shear behavior of rectangular-shaped asperities in rock joints [J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2010, 14(3): 323－332.

[3] Exadaktylos G E, Vardoulakis I. Microstructure in linear elasticity and scale effects: a reconsideration of basic rock mechanics and rock fracture mechanics [J]. Tectonophysics, 2001, 335(1/2): 81－109.

[4] Mangwandi C, Cheong Y S, Adams M J, Hounslow M J, Salman A D. The coefficient of restitution of different representative types of granules [J]. Chemical Engineering Science, 2007, 62(1/2): 437－450.

[5] Braccesi C, Landi L. A general elastic-plastic approach to impact analysis for stress state limit evaluation in ball screw bearings return system [J]. International Journal of Impact Engineering, 2007, 34(7): 1272－1285.

[6] Wan Changsen. Analysis of rolling element bearings [M]. London: Mechanical Engineering Publications Limited, 1991.

[7] Adams M J, Lawrence C J, Urso M E D, Rance J. Modelling collisions of soft agglomerates at the continuum length scale [J]. Powder Technology, 2004, 140(3): 268－279.

[8] Fujimoto T, Kagami J, Kawaguchi T, Hatazawa T. Tangential micro-displacement and stiffness in contact [J]. Proceed International Tribology Conference, Yokohama, 1995, 1: 109－114.

[9] Fujimoto T, Kagami J, Kawaguchi T, Hatazawa T. Micro-displacement characteristics under tangential force [J]. Wear, 2000, 241: 136－142.

[10] 何思明，吴永，沈均. 切向荷载下弹塑性材料的微观位移特性[J]. 工程力学学, 2010, 27(2): 73－77.
He Siming, Wu Yong, Shen Jun. Micro-displacement

characteristics of elastic-plastic materials under tangential force [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(2): 73－77. (in Chinese)

[11] 何思明, 吴永, 李新坡. 颗粒弹塑性碰撞理论模型[J]. 工程力学, 2008, 25(12): 19－24.
He Siming, Wu Yong, Li Xinpo. Theoretical model on elastic-plastic granule impact [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(12): 19－24. (in Chinese)

[12] Brizmer V, Kligerman Y, Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on the elasticity terminus of a spherical contact [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43: 5736－5749.

[13] Callaghan O M, Cameron M A. Static contact under load between nominally flat surfaces in which deformation is purely elastic [J]. Wear, 1976, 36: 76－97.

[14] Francis H A. Application of spherical indentation mechanics to reversible and irreversible contact between rough surfaces [J]. Wear, 1977, 45: 221－269.

[15] Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi [J]. Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, 1938, 27(6): 342－478.

[16] Mindlin R D. Compliance of elastic bodies in contact [J]. Journal of Applied Mechanics, 1949, 16(3): 259－268.

[17] 吴永. 岩质滑坡启动的滑面微观力学机理[D]. 成都: 中国科学院成都山地所, 2010.
Wu Yong. Micromechanics mechanism of rock landslide's starting on sliding face [D]. Chengdu: Institute of Mountain Hazards and Environment, CAS, 2010. (in Chinese)

(上接第 229 页)

[7] Mack A, Hannemann V. Validation of the unstructured DLR-TAU-Code for hypersonic flows [R]. Washington, DC: AIAA Paper 2002-3111, 2002.

[8] 赵俊波. 基于非结构网格的高超声速流场计算方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2004.
Zhao Junbo. Investigation in numerical simulation technology of hypersonic flow field based on unstructured grid [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2004. (in Chinese)

[9] 刘枫, 曹文斌, 李伟, 等. 基于网格自适应的三维非结构网格高超声速流动数值模拟[C]. 第十四届全国计算流体力学会议论文集, 贵州, 贵阳, 2009.
Liu Feng, Cao Wenbin, Li Wei, et al. Numerical simulation of hypersonic flow based on three-dimensional unstructured adaptive mesh [C]. The 14th Chinese Computational Fluid Dynamic Conference, Gui Yang in Gui Zhou Province, 2009. (in Chinese)

[10] Connell S D, D Holmes D G. A 3D unstructured adaptive multi-grid scheme for the euler equations [R]. Washington, DC: AIAA Paper 1993-3339-CP, 1993.

[11] Holmes D G, Connell S D. Solution of the 2D Navier-Stokes equations on unstructured adaptive grids [R]. Washington, DC: AIAA Paper 1989-1932, 1989.

[12] 邱征, 周磊, 朱培烨. 三维 Euler 方程非结构自适应网格投影和光顺技术研究[J]. 航空计算技术, 2006, 36(1): 79－85.
Qiu Zheng, Zhou Lei, Zhu Peiye. Genetic algorithm for task assignment in equipment rush repairing [J]. Aeronautical Computing Technique, 2006, 36(1): 79－85. (in Chinese)

[13] 李素循. 典型外形高超声速流动特性[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
Li Suxun. Hypersonic flow characteristics around typical configuration [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2007. (in Chinese)