

文章编号: 1000-4750(2012)04-0077-07

求解弹性波有限差分法中自由边界处理方法的对比

王 周¹, 李朝晖^{1,2}, 龙桂华¹, 高 琴¹, 赵家福¹

(1. 中国科学院深圳先进技术研究院, 深圳 518055; 2. 北京大学信息科学技术学院, 北京 100871)

摘 要: 自由边界条件在计算方法中的数值表征是地震波模拟中的一个重要内容, 表征的有效性直接关系到所得波场能否代表地表介质特性的真实响应。该文评估了交错网格有限差分法中 5 种常用自由边界处理方法: 直接法、应力镜像法、改进应力镜像法、横向各向同性介质替换法和声学边界替换法, 并与有限元法模拟结果进行了对比, 波形曲线直观比较及波幅比与相关系数定量比较显示横向各向同性介质替换法与有限元法模拟结果一致性最好。进一步的层状介质模型弹性波数值模拟结果表明: 横向各向同性介质替换法的精度和可靠性最高, 能真实表征地表介质中的地震波传播。

关键词: 弹性波; 自由边界; 数值模拟; 有限差分; 有限元

中图分类号: O343.1; P315.9 **文献标志码:** A

COMPARISON AMONG IMPLEMENTATIONS OF FREE-SURFACE BOUNDARY IN ELASTIC WAVE SIMULATION USING THE FINITE-DIFFERENCE METHOD

WANG Zhou¹, LI Zhao-hui^{1,2}, LONG Gui-hua¹, GAO Qin¹, ZHAO Jia-fu¹

(1. Shenzhen Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenzhen 518055, China;

2. School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Representation of free-surface boundary condition in numerical calculations is an important aspect for seismic wave simulation. The effectiveness of numerical representation directly relates to whether the wave field can represent the true response of free-surface medium characteristics. Five common implementations of free-surface boundary used in the staggered-grid finite-difference method were evaluated, including the direct method, the stress image method, the improved stress image method, the transversely isotropic medium approach and the acoustic-elastic boundary approach, and a comparison with the finite-element method was also conducted. Simulation results of the transversely isotropic medium approach and the finite-element method are consistent best in visual comparison of waveform curve and quantitative comparison of amplitude ratio and correlation coefficient. Further numerical simulation results of elastic wave in layered medium model show that the transversely isotropic medium approach is the most accurate and reliable one which could represent seismic wave propagation in free-surface medium.

Key words: elastic wave; free-surface boundary; numerical simulation; finite-difference method; finite-element method

收稿日期: 2010-07-12; 修改日期: 2010-10-08

基金项目: 国家 863 项目(2007AA12Z164)

通讯作者: 王 周(1983—), 男, 湖北钟祥人, 研究助理, 硕士, 主要从事地震波数值模拟与计算机应用研究(E-mail: wangzhou83@gmail.com).

作者简介: 李朝晖(1966—), 男, 河南罗山人, 副研究员, 博士, 主要从事声学、换能器与传感器、信号处理、电路系统研究(E-mail: zh.li@siat.ac.cn);

龙桂华(1981—), 男, 湖北公安人, 助研, 博士, 主要从事浅层波动理论和波形反演研究(E-mail: gh.long@sub.siat.ac.cn);

高 琴(1982—), 女, 湖北钟祥人, 研究助理, 硕士, 主要从事浅层三维地质建模研究(E-mail: qin.gao@sub.siat.ac.cn);

赵家福(1980—), 男, 山东日照人, 研究助理, 硕士, 主要从事地震波数据采集、处理与解释研究(E-mail: jf.zhao@sub.siat.ac.cn).

当前浅层地震勘探技术广泛应用于工程地质勘探、环境地质调查、病害工程治理、水文地质工程调查等领域。然而,由于地表的影响,浅地层中地震波场异常复杂,面波和反射波交杂,难以分离,导致浅层勘探难以进行。弹性波数值模拟有助于研究地震波在近地表介质中的传播规律,对浅层地震勘探有较大的应用价值。

目前,弹性波数值模拟多采用交错网格有限差分法,其通过将微分格点移到半格点上来提高计算精度,空间频散也比常规有限差分格式小的多,被广泛应用于地震勘探和地球动力学研究^[1-4]。在有限差分数值模拟中,自由边界处理是一个重要的研究内容,尤其是以面波方法为主的浅层地震勘探。

在带有自由边界的半无限区域弹性波数值模拟方面,一些研究人员做了很多有价值的工作^[4-13]。虽然目前存在多种基于交错网格有限差分的自由边界处理方法,但很少有人将诸多方法集中在一起进行比较和分析。因此,全面评估各种方法的精度和可靠性,并制定一个模拟优选方案就显得尤为必要。本文首先总结了交错网格有限差分法中常用的自由边界处理方法:直接法^[6,14]、应力镜像法^[6,15-16]、改进应力镜像法^[6]、横向各向同性介质替换法^[12]、声学边界替换法^[13];然后,分别采用这5种方法对二维半无限区域均匀介质中的弹性波场进行了交错网格有限差分数值模拟;最后,通过与有限元模拟结果进行波场快照、波形曲线以及波形波幅比与相关系数3个方面的比较来找出最优自由边界处理方法。

1 交错网格有限差分法中常用的自由边界处理方法

弹性波交错网格有限差分法已经有很多研究^[1-4],交错网格有限差分格式和常规有限差分格式相比,其网格频散显著减小,精度明显提高,而且可以取较大的空间步长,提高计算效率,提高弹性波模拟的精度和稳定性。交错网格有限差分以一阶弹性波方程为基础,通过将空间微分格点移到半格点上来提高计算精度,在二维交错网格中,正应力 τ_{xx} 、 τ_{zz} 采样位置在整格点,速度 v_x 、 v_z 采样位置在相应轴向棱边的半格点,切应力 τ_{xz} 采样位置在相应网格的中心,如图1所示。

时间差分格式采用中心差分。在交错网格中边界条件的处理更为复杂,尤其是自由边界的处理,

对结果影响甚大。

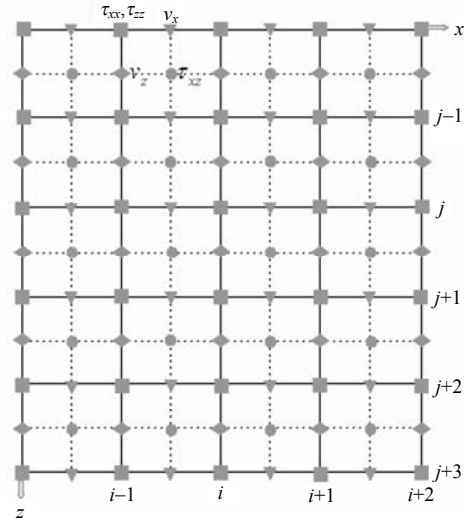


图1 二维交错空间网格示意图

Fig.1 Two-dimensional staggered grid

自由边界是介质与空气之间的物性突变界面,其边界条件为垂直表面的应力为零,理论表达式为^[12,17]:

$$\begin{cases} \tau_{zz}(x,0,t) = 0 \\ \tau_{xz}(x,0,t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

该边界条件看似简单,但用离散波动方程数值解处理时很困难,这是因为一般数值计算方法是以波场连续为前提的,仅在模型之上增加一个空气层的办法是不正确的,且差分算子越复杂,难度越大。

目前很多工作采用了不同的方法针对交错网格有限差分计算中的自由边界问题进行了研究^[4,6,13-16]。

1.1 直接法

根据自由边界的物理性质及理论表达式,最容易得到的处理方法就是直接法^[6,14],具体就是在自由边界上直接将 τ_{zz} 和 τ_{xz} 赋值为零,如下所示:

$$\begin{cases} \tau_{zz} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由于交错网格中正应力和切应力在不同的取样位置,如图1所示,因此式(2)不可能在同一条边界线上实现。如果在迭代计算中,自由边界直接采用式(2),而不考虑其他变量,可能产生不稳定的结果。在自由边界上,正应力 τ_{xx} 依据下式来迭代计算,则计算的稳定性得以满足。

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3)$$

1.2 应力镜像法

应力镜像就是把自由边界当作一面镜子,两侧

的应力关于自由边界镜像对称^[15-16]。在二维交错网格中,应力镜像法认为自由边界通过正应力 τ_{xx} 、 τ_{zz} 的采样位置,即自由边界位于实网格线上,如图2所示。

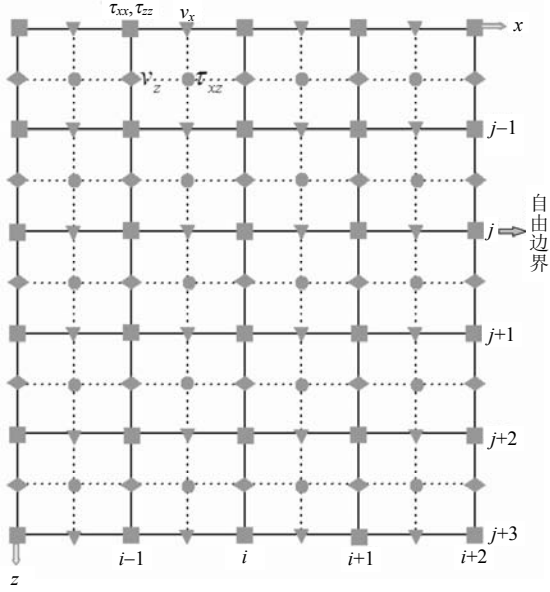


图2 应力镜像法自由边界取样位置

Fig.2 Sampling points of free-surface boundary in the stress image method

应力镜像法中自由边界的交错网格差分格式在空间域中可表示为:

$$\begin{cases} \tau_{zz}(j, m) = 0 \\ \tau_{zz}(j-1, m) = -\tau_{zz}(j+1, m) \\ \tau_{zz}(j-2, m) = -\tau_{zz}(j+2, m) \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz}(j-1, m) = -\tau_{xz}(j, m) \\ \tau_{xz}(j-2, m) = -\tau_{xz}(j+1, m) \end{cases} \quad (4b)$$

同时,在自由边界上,正应力 τ_{xx} 采用式(3)来迭代计算。

1.3 改进应力镜像法

改进应力镜像法^[6]是在现有的交错网格有限差分格式和应力镜像法基础上提出的,此算法认为自由边界不是通过正应力 τ_{xx} 和 τ_{zz} 的采样位置,而是通过切应力 τ_{xz} 的采样位置,即自由边界位于虚半网格线上,如图3所示。

改进应力镜像法中自由边界的交错网格差分格式在空间域中可表示为:

$$\begin{cases} \tau_{xz}(j, k, m) = 0 \\ \tau_{xz}(j-1, k, m) = -\tau_{xz}(j+1, k, m) \\ \tau_{xz}(j-2, k, m) = -\tau_{xz}(j+2, k, m) \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} \tau_{zz}(j, k, m) = -\tau_{zz}(j+1, k, m) \\ \tau_{zz}(j-1, k, m) = -\tau_{zz}(j+2, k, m) \end{cases} \quad (5b)$$

相对应应力镜像法而言,改进应力镜像法的处理有一些优点:首先,由于正应力 τ_{xx} 、 τ_{zz} 不在自由边界上采样,因此不需要考虑式(3),直接采用式(5)即可;其次,当边界的形状形成一个顶角时,应力镜像法需要正应力 τ_{xx} 、 τ_{zz} 为零,而改进算法只要求切应力 τ_{xz} 为零,因此提高了效率,物理上也是正确的。

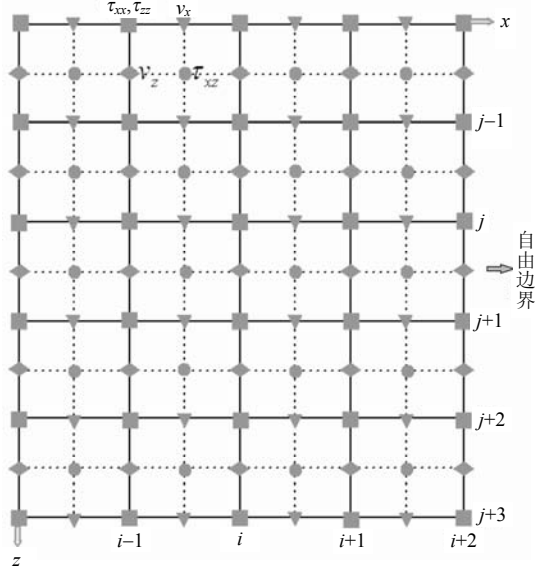


图3 改进应力镜像法自由边界取样位置

Fig.3 Sampling points of free-surface boundary in the improved stress image method

1.4 横向各向同性介质替换法

横向各向同性介质替换法^[12]用横向各向同性介质近似代替自由边界,不直接对所有应力条件进行处理,而是令正应力 τ_{zz} 在自由边界处直接为零,切应力为零的条件则通过对自由边界上物性参数的设定,在波动方程交错网格有限差分迭代求解中实现。其二维处理方式如下:

$$\begin{cases} \tau_{zz} = 0 \\ \rho = 0.5\rho_0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0.5\mu_0 \end{cases} \quad (6)$$

其中: τ_{zz} 、 ρ 、 λ 、 μ 表示自由边界上的正应力、密度和拉梅常数(自由边界以上的虚拟网格也如此赋值); ρ_0 、 μ_0 表示自由边界以下弹性介质的密度和拉梅常数。

1.5 声学边界替换法

根据自由边界上弹性介质和空气之间存在能量耦合的现象,声学边界替换法^[13]用声学和弹性介质边界近似代替自由边界,其大体思路与横向各向同性介质替换法相同,主要区别在于考虑了自由边界上下两边横向的应力连续。其二维处理方式

如下:

$$\begin{cases} \tau_{zz} = 0 \\ \rho = 0.5\rho_0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = \mu_0 \end{cases} \quad (7)$$

其中: τ_{zz} 、 ρ 、 λ 、 μ 表示自由边界上的正应力、密度和拉梅常数(自由边界以上的虚拟网格也如此赋值); ρ_0 、 μ_0 表示自由边界以下弹性介质的密度和拉梅常数。

2 数值模拟比较

由于实际地表结构非常复杂,导致地震波场非常杂乱,无法用实验来验证自由边界处理方法的精度和可靠性,本文采取有限差分 and 有限元数值模拟来分析比较各种处理方法。

有限元法处理边界问题很方便,特别是自由边界条件可以自动满足,不需加任何约束,能处理各种复杂的边界条件。本文弹性波场模拟所使用的有限元软件为 ABAQUS 商业软件,有限差分软件为自己编制的交错网格有限差分程序,以 ABAQUS 的模拟结果作为比较基准。

为了评价上述 5 种自由边界处理方法的优劣,设置模型为带有自由边界的二维半无限区域,其计算区域为 $100\text{m} \times 60\text{m}$ 。为了模拟弹性波在半无限介质中传播,除自由边界外,其余各边界在有限差分法中使用吸收边界,而在有限元法中则是通过设置

计算区域与计算时间使弹性波传不到边界处。模拟介质取为花岗岩,密度为 2660kg/m^3 ,纵波波速为 4770m/s ,横波波速为 2700m/s 。在有限差分 and 有限元计算中,空间步长均为 0.2m ,时间步长均为 0.01ms 。震源和 5 道检波器均位于自由边界上,震源位于地表中点,检波器偏移距为 10m ,道间距为 5m 。震源为向下的 v_z 速度载荷,表达式为高斯函数一阶导数:

$$\text{source}(t) = 4\pi^2 f^2 (t - t_0) e^{-2\pi^2 f^2 (t - t_0)^2} \quad (8)$$

其中: f 为震源频率; t_0 为时间延迟。数值模拟中取 $f = 500\text{Hz}$ 、 $t_0 = 1.38\text{ms}$,并乘以系数 2.5×10^{-4} ,得到的震源波形曲线如图 4 所示。

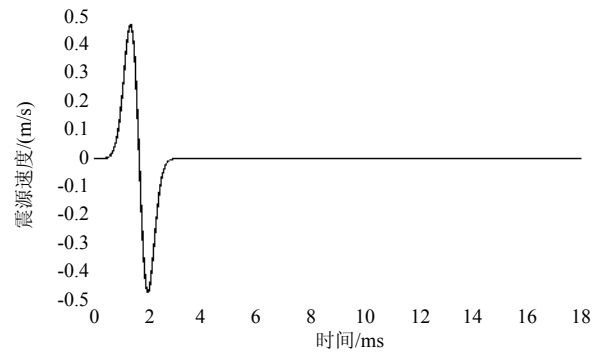


图 4 震源波形曲线

Fig.4 Waveform curve of source

取横向应力分量 τ_{xx} 与速度分量 v_x 为考察参量,分别采用 5 种自由边界处理方法的有限差分法以及有限元法模拟得到的 8ms 时应力分量与速度分量波场快照分别如图 5 和图 6 所示。

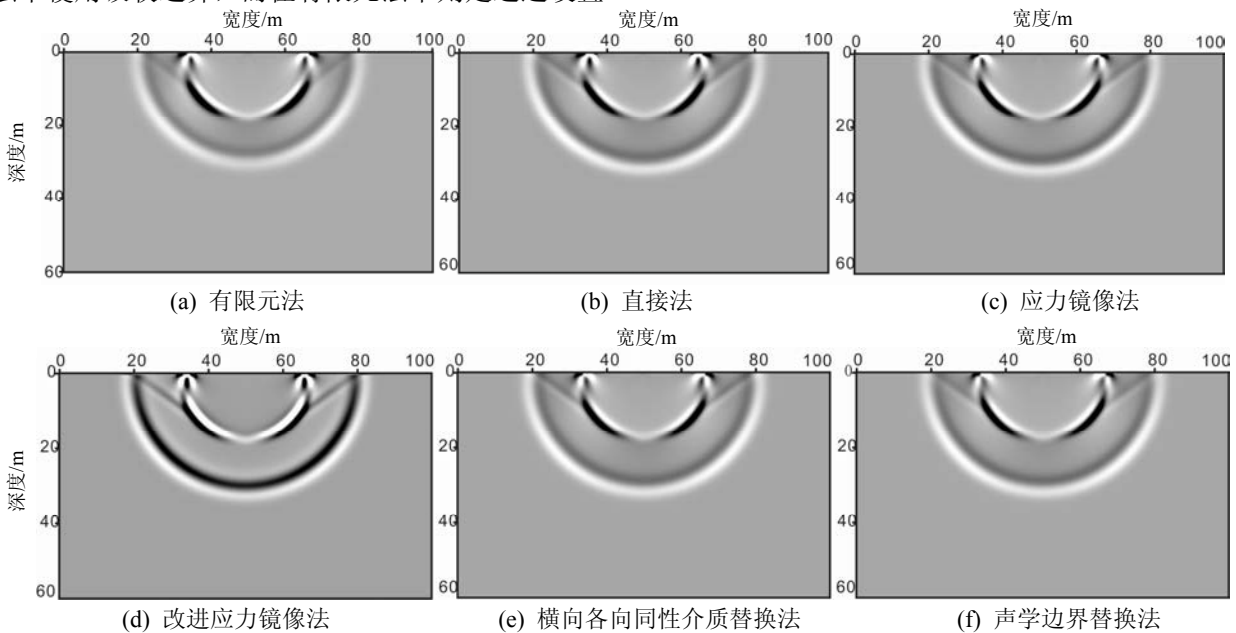


图 5 有限元法以及分别采用 5 种自由边界处理方法的有限差分法模拟得到的应力分量波场快照

Fig.5 Snapshots of stress component computed by the finite element method and the finite-difference method with five implementations of free-surface boundary

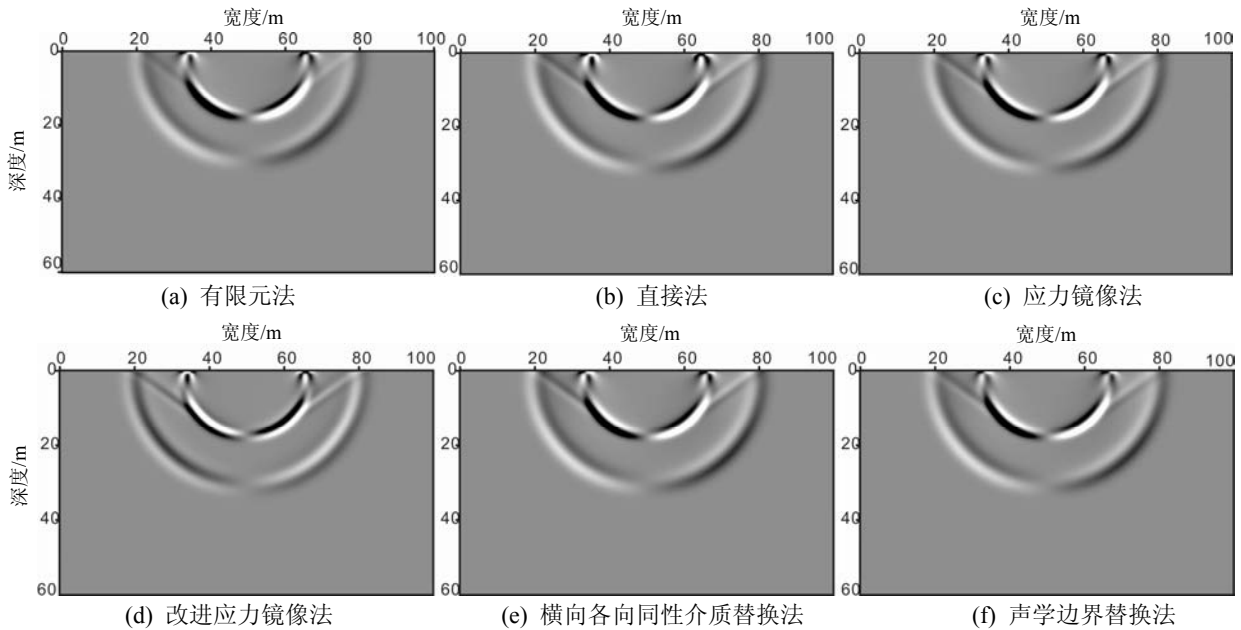


图6 有限元法以及分别采用5种自由边界处理方法的有限差分法模拟得到的速度分量波场快照
Fig.6 Snapshots of velocity component computed by the finite element method and the finite-difference method with five implementations of free-surface boundary

由图5和图6可以看出,分别采用5种自由边界处理方法的有限差分法与有限元法的模拟结果基本一致,在自由边界上存在直达波与面波,在自由边界以下存在纵波、横波和纵横转换波。然而,波场快照只能显示弹性波传播状态,要想比较各种自由边界处理方法的准确性和可靠性,必须比较波形曲线。在有限元法中,自由边界条件可以通过不加约束来自动满足,不需要任何边界处理方法,因此,本文将以有限元模拟结果为基准来比较5种有限差分自由边界处理方法模拟结果。有限元法和分别采用5种自由边界处理方法的有限差分法模拟得到的第4道检波器(距震源25m)波形曲线分别如图7和图8所示。

如图7和图8所示,直接法波形及波幅与有限元法相比差异非常大,其波幅小的可以忽略;改进应力镜像法波形及波幅与有限元法相比差异也非常大,且直达波波幅与面波相近,明显不符合实际;声学边界替换法波形与有限元法相比差异较大,主要是时间提前;应力镜像法波形与有限元法相近,但波幅差异较大;横向各向同性介质替换法的模拟结果与有限元法比较,波形与波幅均符合良好。

上述结论是依据波形曲线直观比较得出的,更为准确的是以波幅比和波形相关系数来定量判断波形波幅接近程度和波形相似程度。波幅比和波形相关系数越接近于1,则波形的相近程度越高。以有限元法模拟结果为基准,分别采用5种自由边界

处理方法的有限差分法模拟得到的检波器应力与速度分量波形波幅比及相关系数如表1~表4所示。

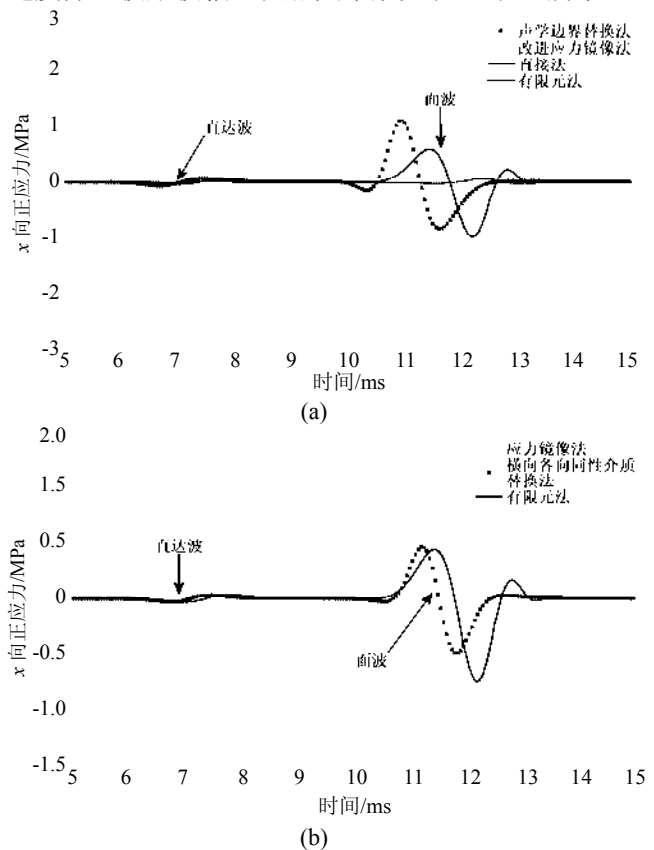


图7 有限元法和分别采用5种自由边界处理方法的有限差分法模拟得到的应力分量波形曲线

Fig.7 Waveform curves of stress component computed by the finite-element method and the finite-difference method with five implementations of free-surface boundary

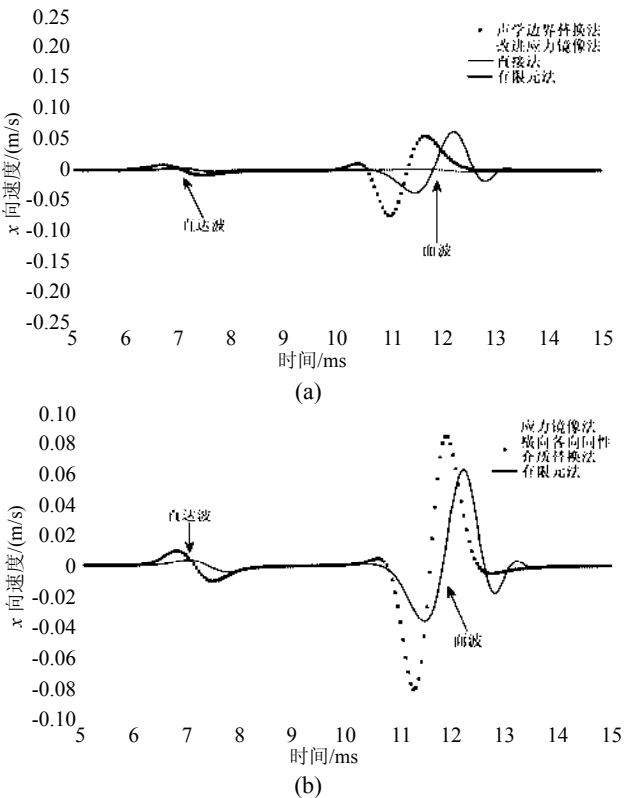


图 8 有限元法和分别采用 5 种自由边界处理方法的有限差分法模拟得到的速度分量波形曲线

Fig.8 Waveform curves of velocity component computed by the finite-element method and the finite-difference method with five implementations of free-surface boundary

表 1 应力波形波幅比						
Table 1 Amplitude ratio of stress waveform						
自由边界处理方法	第 1 道	第 2 道	第 3 道	第 4 道	第 5 道	平均
直接法	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
应力镜像法	2.32	2.50	2.66	2.84	3.02	2.67
改进应力镜像法	4.33	4.26	4.22	4.27	4.35	4.29
横向各向同性介质替换法	0.84	0.91	0.97	1.05	1.12	0.98
声学边界替换法	1.44	1.56	1.71	1.87	2.11	1.74

表 2 应力波形相关系数						
Table 2 Correlation coefficients of stress waveform						
自由边界处理方法	第 1 道	第 2 道	第 3 道	第 4 道	第 5 道	平均
直接法	-0.91	-0.86	-0.81	-0.75	-0.69	-0.81
应力镜像法	0.87	0.77	0.66	0.56	0.45	0.66
改进应力镜像法	0.00	-0.03	-0.10	-0.16	-0.21	-0.10
横向各向同性介质替换法	0.86	0.74	0.62	0.50	0.39	0.62
声学边界替换法	0.66	0.43	0.23	0.09	-0.01	0.28

表 3 速度波形波幅比						
Table 3 Amplitude ratio of velocity waveform						
自由边界处理方法	第 1 道	第 2 道	第 3 道	第 4 道	第 5 道	平均
直接法	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02
应力镜像法	1.46	1.45	1.44	1.44	1.45	1.45
改进应力镜像法	3.63	3.74	3.81	3.87	3.90	3.79
横向各向同性介质替换法	1.40	1.38	1.36	1.35	1.35	1.37
声学边界替换法	1.08	1.00	0.94	0.89	0.84	0.95

表 4 速度波形相关系数						
Table 4 Correlation coefficients of speed waveform						
自由边界处理方法	1 道	2 道	3 道	4 道	5 道	平均
直接法	-0.77	-0.71	-0.64	-0.58	-0.51	-0.64
应力镜像法	0.93	0.85	0.75	0.64	0.53	0.74
改进应力镜像法	0.10	0.06	-0.01	-0.08	-0.15	-0.02
横向各向同性介质替换法	0.93	0.83	0.70	0.58	0.46	0.70
声学边界替换法	0.73	0.50	0.29	0.13	0.02	0.34

如表 1~表 4 所示,直接法、改进应力镜像法与声学边界替换法的应力分量与速度分量波形波幅比与相关系数均与 1 相差很大。应力镜像法应力分量波形波幅比平均值为 2.67,误差太大。综合衡量,横向各向同性介质替换法的波形波幅比与相关系数指标最优,误差在可接受范围之内。因此,本文认为横向各向同性介质替换法是一种准确、可靠的自由边界处理方法。

3 应用实例

本文采用横向各向同性介质替换法,运用交错网格有限差分法模拟了层状介质模型的二维弹性波场。介质参数如表 5 所示,在自由边界上共设置 24 道检波器,偏移距为 10m,道间距为 1m,其它计算条件同上。

表 5 层状介质模型参数				
Table 5 Parameters of layered medium model				
层号	层厚/m	密度/(kg/m ³)	纵波波速/(m/s)	横波波速/(m/s)
第 1 层	10	2000	2500	1450
第 2 层	∞	2660	4770	2700

图 9 是弹性波场检波器记录信号,在信号中可以明显区分出直达波与面波,以及介质分界面反射的纵波、横波与纵横转换波,符合物理事实,能真实表征地表介质中的地震波传播。

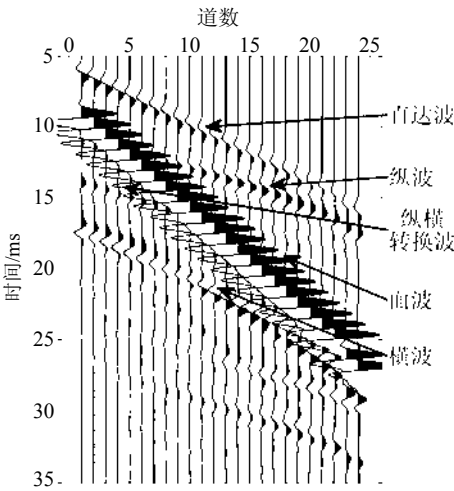


图 9 弹性波场检波器记录信号

Fig.9 Surface record of elastic wave field

4 结论

本文评估了交错网格有限差分法中 5 种常用的自由边界处理方法:直接法^[6,14]、应力镜像法^[6,15-16]、改进应力镜像法^[6]、横向各向同性介质替换法^[12]、声学边界替换法^[13],运用交错网格有限差分法来模拟了这 5 种边界处理情况下半无限均匀介质中弹性波的传播过程,并与有限元法模拟结果比较。结果表明,5 种方法的波场快照基本一致,都符合物理规律,但无法从中区分优劣;波形曲线明显显示出 5 种方法的差异,经过直观比较,发现横向各向同性介质替换法的模拟结果与有限元法很一致,波形与波幅均符合良好;进一步的波形波幅比与相关系数比较定量的指出,在 5 种自由边界处理方法中,横向各向同性介质替换法最优,是最准确、最可靠的自由边界处理方法。

最后,本文采用横向各向同性介质替换法,运用交错网格有限差分法模拟了层状介质模型的二维弹性波场,波场信号记录符合物理事实,能真实表征地表介质中的地震波传播。下一步工作可在三维半无限区域弹性介质中,继续以有限元法模拟结果为基准,来比较验证上述 5 种自由边界处理方法。

参考文献:

- [1] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method [J]. *Geophysics*, 1986, 51(4): 889—901.
- [2] Graves R W. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1996, 86(4): 1091—1106.
- [3] 董良国, 马在田, 曹景忠, 等. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分分解法[J]. *地球物理学报*, 2000, 43(3): 411—419.
Dong Liangguo, Ma Zaitian, Cao Jingzhong, et al. A staggered-grid high-order difference method of one-order elastic wave equation [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2000, 43(3): 411—419. (in Chinese)
- [4] 宋爽. 时域有限差分方法用于浅地层弹性波场模拟[D]. 北京: 北京大学, 2008.
Song Shuang. Numerical simulation of elastic wave propagation in shallow strata using FDTD method [D]. Beijing: Peking University, 2008. (in Chinese)
- [5] 汪利民. 三维带地形瑞雷面波交错网格有限差分法正演技术研究[D]. 武汉: 中国地质大学, 2009.
Wang Limin. Modeling of rayleigh-wave propagation in three-dimensional media with topography using staggered-grid finite difference scheme [D]. Wuhan: China University of Geosciences, 2009. (in Chinese)
- [6] 王秀明, 张海澜. 用于具有不规则起伏自由表面的介质中弹性波模拟的有限差分算法[J]. *中国科学(G 辑)*, 2004, 34(5): 481—493.
Wang Xiuming, Zhang Hailan. Modeling the seismic wave in the media with irregular free interface by the finite-difference method [J]. *Science in China (Series G)*, 2004, 34(5): 481—493. (in Chinese)
- [7] 裴正林. 任意起伏地表弹性波方程交错网格高阶有限差分法数值模拟[J]. *石油地球物理勘探*, 2004, 39(6): 629—634.
Pei Zhenglin. Numerical modeling using staggered-grid high-order finite-difference of elastic wave equation on arbitrary relief surface [J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2004, 39(6): 629—634. (in Chinese)
- [8] 唐圣松. 起伏二维地表模型瑞雷波场正演研究[D]. 长沙: 中南大学, 2009.
Tang Shengsong. Study on Rayleigh-wave field forward of two-dimensional rolling ground model [D]. Changsha: Central South University, 2009. (in Chinese)
- [9] 周竹生, 刘喜亮, 熊孝雨. 弹性介质中瑞雷面波有限差分法正演模拟[J]. *地球物理学报*, 2007, 50(2): 567—573.
Zhou Zhusheng, Liu Xiliang, Xiong Xiaoyu. Finite-difference modeling of Rayleigh surface wave in elastic media [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2007, 50(2): 567—573. (in Chinese)
- [10] 王雪秋, 孙建国. 地震波有限差分数值模拟框架下的起伏地表处理方法综述[J]. *地球物理学进展*, 2008, 23(1): 40—48.
Wang Xueqiu, Sun Jianguo. The state-of-the-art in numerical modeling includingsurface topography with finite-difference method [J]. *Progress in Geophysics*, 2008, 23(1): 40—48. (in Chinese)
- [11] 张华, 李振春, 韩文功. 起伏地表条件下地震波数值模拟方法综述[J]. *勘探地球物理进展*, 2007, 30(5): 334—339.
Zhang Hua, Li Zhenchun, Han Wengong. Review of seismic wave numerical simulation from irregular topography [J]. *Progress in Exploration Geophysics*, 2007, 30(5): 334—339. (in Chinese)
- [12] Mittet R. Free-surface boundary conditions for elastic staggered-grid modeling schemes [J]. *Geophysics*, 2002, 67(5): 1616—1623.
- [13] Xu Yixian, Xia Jianghai, Richard D Miller. Numerical investigation of implementation of air-earth boundary by acoustic-elastic boundary approach [J]. *Geophysics*, 2007, 72(5): SM147—SM153.
- [14] Kosloff D, Kessler D, Filho A Q, et al. Solution of the equation of dynamic elasticity by a Chebychev spectral method [J]. *Geophysics*, 1990, 55(6): 734—748.
- [15] Robertsson J O. A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography [J]. *Geophysics*, 1996, 61(6): 1921—1934.
- [16] Levander A R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms [J]. *Geophysics*, 1988, 53(11): 1425—1436.
- [17] 牟永光, 裴正林. 三维复杂介质地震波数值模拟[M]. 北京: 石油工业出版社, 2005.
Mou Yongguang, Pei Zhenglin. Seismic numerical modeling for 3-D complex media [M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 2005. (in Chinese)