文章编号：1000-4750(2009)12-0012-05

用无网格 LRPIM 分析中厚板的自由振动

*夏　平[1,2]，龙述尧[1]，崔洪雪[1]

(1. 湖南大学力学与航空航天学院，湖南，长沙 410082；2. 湖南工程学院机械工程系，湖南，湘潭 411101)

摘　要：利用局部加权残值法推导出了中厚板的离散系统方程。采用径向基函数耦合多项式基函数构造无网格点插值法的形函数，用四次样条函数作为权函数。插值函数具有 Kronecker delta 函数性质，可以很方便地施加本质边界条件。利用无网格局部径向点插值法对几种边界条件下中厚板的自由振动进行了分析。该方法不需要任何形式的网格划分，所有的积分都在规则形状的子域及其边界上进行。对于求解中厚板的问题，可以克服剪切自锁问题。算例表明，用无网格局部径向点插值法分析中厚板的自由振动问题所得结果与已有文献解以及有限元解都十分地吻合。并且具有高效率、高精度和收敛性好等优点。

关键词：无网格法；中厚板；局部径向点插值法；径向基函数；自由振动

中图分类号：O326; O241.82　　**文献标识码：**A

FREE VIBRATION ANALYSIS FOR THE PLATE OF MODERATE THICKNESS BY THE MESHLESS LRPIM

*XIA Ping[1,2]，LONG Shu-yao[1]，CUI Hong-xue[1]

(1. College of Mechanics and Aerospace Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China;

2. Department of Mechanical Engineering, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan, Hunan 411101, China)

Abstract: The meshless local radial point interpolation method (LRPIM) for the free vibration analysis of a plate of moderate thickness under several boundary conditions is presented. The discretized system equations are obtained using a locally weighted residual method. It uses a radial basis function coupled with a polynomial basis function as a trail function, and uses the quartic spline function as a test function of the weighted residual method. The shape functions obtained in the trail function have the Kronecker delta function property, and the essential boundary conditions can be easily imposed. The present method does not need any grids，and all integrals can be easily evaluated over regularly shaped domains and its boundary. The present method can also avoid the shear locking when it is used to solve the problem for the plate of moderate thickness. Examples show that results obtained by the presented method are found to agree well with the exiting solutions in the literature and with the results obtained by the finite element method, and the presented method has a number of advantages, such as the high efficiency and the quite good accuracy and high rate of convergence.

Key words: meshless method; moderately thick plate; local radial point interpolation method; radial basis function; free vibration

无网格方法是在有限元法等传统数值方法基础上，针对其网格单元存在的问题而提出的一类新的数值方法，其本质是对所考虑的问题域内采用一系列随机分布的无网格节点排列和一种与权函数

收稿日期：2008-07-22；修改日期：2008-10-23

基金项目：国家自然科学基金项目(10672055)；湖南省教育厅科研项目(08C230)

作者简介：*夏　平(1968—)，男，湖南邵阳人，副教授，博士生，从事计算固体力学研究(E-mail: xiapinglx@yahoo.com.cn)；
龙述尧(1945—)，男，湖南湘潭人，教授，硕士，博导，从事计算力学及其工程应用研究(E-mail: sylong@hnu.cn)；
崔洪雪(1983—)，男，山东烟台人，硕士生，从事计算固体力学研究(E-mail: hxuecui@163.com).

有关的近似，使某个域上的节点可以影响研究对象上任何一点的力学特性。这种在离散模型中仅基于节点点阵而不需要划分单元或网格的数值方法，使分析问题的前处理过程变得简单，在涉及网格畸变、网格移动和不定边界等问题中显示出明显的优势。所以，无网格方法被认为是一种很有发展前途的数值分析方法。无网格方法目前已有数十种之多，其中无网格 Galerkin 法[1]和无网格 Petrov Galerkin 法[2−4]是最常用的两种无网格方法。它们大都是利用移动最小二乘法构造形函数，但这种形函数不具有 Kronecker delta 函数的特性，因此很难直接施加本质边界条件，需要进行特殊处理。

后来，Liu 和 Wang 等提出了局部径向点插值法(LRPIM)[5]，并将该方法应用于平面弹性力学问题。LRPIM 形函数具有 Kronecker delta 函数的特性，从而使得本质边界条件的施加变得简单。LRPIM 利用局部子域上的积分方程的等效弱形式和采用径向基函数进行插值，所有的积分都在规则形状的子域及其边界上进行，而不需要任何有限元或边界元网格。而且节点可以任意布置，不需要背景网格，处理问题更显灵活和方便。对于求解中厚板问题，可以克服用有限元法求解时出现的剪切自锁问题。

中厚板在工程实际中有着十分广泛的应用。但是，要想得到较为精确的结果，则必须考虑横向剪切变形的影响。孙建东等用无网格 Galerkin 法对中厚板的模态进行了分析[6]。本文将无网格局部径向点插值法(LRPIM)用于中厚板的自由振动分析。

1　中厚板的基本方程

在图 1 所示笛卡尔坐标系中，取 xy 为板的中面，取 z 轴与 xy 轴垂直向上，设板厚度为 h、x 方向和 y 方向的长度分别为 a、b。板内任一点在变形后沿 x 轴、y 轴、z 轴方向的位移分量记为 u、v 和 w，用 3 个广义位移 $\theta_x(x,y)$、$\theta_y(x,y)$、$w(x,y)$ 来表示 3 个位移分量，存在关系：

$$\begin{cases} u(x,y,z)=-z\theta_x \\ v(x,y,z)=-z\theta_y \\ w(x,y,z)=w(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

其中：θ_x、θ_y 分别是垂直中面的直法线在 xz 平面和 yz 平面内的转角；$w(x,y)$ 为中面挠度。考虑中面区域为 Ω，边界为 Γ 的中厚板问题，只考虑横向振动且不考虑阻尼和载荷影响板的自由振动方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_x}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_y}{\partial y}-\rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \\ \dfrac{\partial M_x}{\partial x}+\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x-\rho J\dfrac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}=0 \\ \dfrac{\partial M_y}{\partial y}+\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x}-Q_y-\rho J\dfrac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}=0 \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中：ρ、h 分别为板的密度和厚度；J 为中厚板的截面惯性矩；Q_x、Q_y、M_x、M_y 和 $M_{xy}=M_{yx}$ 分别为板横截面上单位宽度的剪力、弯矩和扭矩。

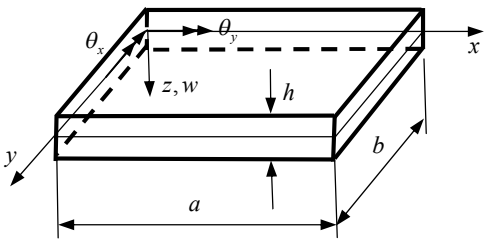


图 1　矩形板

Fig.1　A rectangular plate

2　中厚板的局部径向点插值公式

将式(2)写成指标形式为：

$$M_{ij,j}-Q_i-\rho J\ddot{\theta}_i=0,\quad i,j=1,2 \tag{3}$$

$$Q_{i,i}-\rho h\ddot{w}=0,\quad i=1,2 \tag{4}$$

对中厚板中面域 Ω 内的任一节点 I，以 I 为中心，局部边界 Γ_q 所围成的局部积分域 Ω_q 内的自由振动方程式(3)的局部加权残值表达式为：

$$\int_{\Omega_q} W_I(M_{ij,j}-Q_i-\rho J\ddot{\theta}_i)\,\mathrm{d}\Omega=0 \tag{5}$$

利用散度定理得：

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j}M_{ij}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_q} W_I M_{ij}n_j\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega_q} W_I(Q_i+\rho J\ddot{\theta}_i)\,\mathrm{d}\Omega=0 \tag{6}$$

式(6)写成矩阵形式为：

$$\int_{\Omega_q}\begin{bmatrix} W_{I,x} & 0 & W_{I,y} \\ 0 & W_{I,y} & W_{I,x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy}\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_q} W_I\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy}\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega_q} W_I\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_q} W_I\rho J\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{7}$$

利用式(4)同样可得：

$$\int_{\Omega_q}[W_{I,x}\quad W_{I,y}]\begin{Bmatrix}Q_x\\Q_y\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Omega-$$

$$\int_{\Gamma_q}W_I[n_x\quad n_y]\begin{Bmatrix}Q_x\\Q_y\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega_q}W_I\rho h\ddot{w}\,\mathrm{d}\Omega=0 \quad (8)$$

将式(7)和式(8)两式合并后可表示为：

$$\int_{\Omega_q}\begin{bmatrix}W_{I,x}&0&W_{I,y}&W_I&0\\0&W_{I,y}&W_{I,x}&0&W_I\\0&0&0&W_{I,x}&W_{I,y}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\\Q_x\\Q_y\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Omega-$$

$$\int_{\Gamma_q}W_I\begin{bmatrix}n_x&0&n_y&0&0\\0&n_y&n_x&0&0\\0&0&0&n_x&n_y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\\Q_x\\Q_y\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Omega_q}W_I\begin{Bmatrix}\rho J\ddot{\theta}_x\\\rho J\ddot{\theta}_y\\\rho h\ddot{w}\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Omega=0 \quad (9)$$

式(9)写成算子和矩阵形式变为：

$$\int_{\Omega_q}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_I\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_q}\boldsymbol{W}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega_q}\boldsymbol{W}_I\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\Omega=0 \quad (10)$$

式中，局部积分域Ω_q的边界Γ_q由3部分组成，即$\Gamma_q=\Gamma_{qi}\cup\Gamma_{qu}\cup\Gamma_{qt}$。其中，$\Gamma_{qi}$是局部积分域$\Omega_q$完全位于整体域$\Omega$内部的边界，它不与整体边界$\Gamma$相重叠；$\Gamma_{qu}$是局部积分域的边界$\Gamma_q$与整体边界$\Gamma$上给定广义位移边界$\Gamma_u$相重叠的部分，即$\Gamma_{qu}=\Gamma_q\cap\Gamma_u$；$\Gamma_{qt}$是局部积分域的边界$\Gamma_q$与整体边界$\Gamma$上给定广义力边界$\Gamma_t$相重叠的部分，即$\Gamma_{qt}=\Gamma_q\cap\Gamma_t$；对于自由振动分析，没有面力作用，所以式(10)中的边界积分项只包含Γ_{qi}和Γ_{qu}上的积分。

式(10)中算子$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$为：

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\partial/\partial x&0&\partial/\partial y&1&0\\0&\partial/\partial y&\partial/\partial x&0&1\\0&0&0&\partial/\partial x&\partial/\partial y\end{bmatrix} \quad (11)$$

$\boldsymbol{n}$为边界外法线分量所组成的矩阵：

$$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}n_x&0&n_y&0&0\\0&n_y&n_x&0&0\\0&0&0&n_x&n_y\end{bmatrix} \quad (12)$$

在式(10)中，广义内力向量$\boldsymbol{\sigma}$为：

$$\boldsymbol{\sigma}=[M_x\quad M_y\quad M_{xy}\quad Q_x\quad Q_y]^{\mathrm{T}} \quad (13)$$

对广义位移$\boldsymbol{u}$，利用局部径向点插值法进行插值，在(x,y)点的近似广义位移试函数为：

$$\boldsymbol{u}^h_{(3\times1)}=\begin{Bmatrix}\theta_x\\\theta_y\\w\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{\Phi}_{(3\times3n)}\boldsymbol{u}_{(3n\times1)} \quad (14)$$

其中$\boldsymbol{\Phi}$为由 MQ 径向基函数附加二次多项式所构造的形函数组成的形函数矩阵，形函数构造的详细过程参见文献[7]。

将式(14)对时间求二次导数可得：

$$\ddot{\boldsymbol{u}}^h_{(3\times1)}=\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_x\\\ddot{\theta}_y\\\ddot{w}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}_i\ddot{\boldsymbol{u}}_i=\boldsymbol{\Phi}_{(3\times3n)}\ddot{\boldsymbol{u}}_{(3n\times1)} \quad (15)$$

式中n是点(x,y)的支持域内的节点数。

将式(13)—式(15)代入式(10)，得到I节点的离散方程组，即：

$$\int_{\Omega_q}\boldsymbol{V}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{qi}+\Gamma_{qu}}\boldsymbol{W}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Omega_q}\boldsymbol{W}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}\Omega=0 \quad (16)$$

式中$\boldsymbol{D}$为板的弹性矩阵：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}D&D\mu&0&0&0\\D\mu&D&0&0&0\\0&0&\dfrac{1-\mu}{2}D&0&0\\0&0&0&C&0\\0&0&0&0&C\end{bmatrix} \quad (17)$$

式中：

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},\quad C=\frac{Gh}{k}$$

其中：E、G和μ分别是板的弹性模量、切变模量和泊松比；k是横向剪切系数，对于矩形截面，$k=1.2$。

$\boldsymbol{B}$是广义应变矩阵：

$$\boldsymbol{B}_{(5\times3n)}=\begin{bmatrix}-\phi_{1,x}&0&0&\cdots&-\phi_{n,x}&0&0\\0&-\phi_{1,y}&0&\cdots&0&-\phi_{n,y}&0\\-\phi_{1,y}&-\phi_{1,x}&0&\cdots&-\phi_{n,y}&-\phi_{n,x}&0\\-\phi_1&0&\phi_{1,x}&\cdots&-\phi_n&0&\phi_{n,x}\\0&-\phi_1&\phi_{1,y}&\cdots&0&-\phi_n&\phi_{n,y}\end{bmatrix} \quad (18)$$

对于式(16)，选取不同的局部权函数会得到不一样的整体刚度矩阵。本文采用矩形支持域，并采用四次样条函数作为方程中的权函数，定义：

$$W_I(x,y)=W_{Ix}(x,y)\cdot W_{Iy}(x,y)=W(r_{Ix})\cdot W(r_{Iy}) \quad (19)$$

其中：

$$W(r_{Ix})=\begin{cases}1-6r_{Ix}^2+8r_{Ix}^3-3r_{Ix}^4 & 0\leqslant r_{Ix}\leqslant 1\\ 0 & r_{Ix}>1\end{cases} \quad (20)$$

$$W(r_{Iy})=\begin{cases}1-6r_{Iy}^2+8r_{Iy}^3-3r_{Iy}^4 & 0\leqslant r_{Iy}\leqslant 1\\ 0 & r_{Iy}>1\end{cases} \quad (21)$$

式中：

$$r_{Ix}=\frac{|x-x_I|}{d_{sx}},\quad r_{Iy}=\frac{|y-y_I|}{d_{sy}} \quad (22)$$

其中 d_{sx} 和 d_{sy} 分别为支持域 x 方向和 y 方向的长度。

式(16)中，$\boldsymbol{W}_I$ 为节点 I 的权函数矩阵：

$$\boldsymbol{W}_I=\begin{bmatrix}W(x,y;x_I,y_I) & 0 & 0\\ 0 & W(x,y;x_I,y_I) & 0\\ 0 & 0 & W(x,y;x_I,y_I)\end{bmatrix} \quad (23)$$

$\boldsymbol{V}_I$ 为权函数 W_I 的导数所形成的矩阵：

$$\boldsymbol{V}_I=\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_I=\begin{bmatrix}W_{,x}(x,y;x_I,y_I) & 0 & 0\\ 0 & W_{,y}(x,y;x_I,y_I) & 0\\ W_{,y}(x,y;x_I,y_I) & W_{,x}(x,y;x_I,y_I) & 0\\ W(x,y;x_I,y_I) & 0 & W_{,x}(x,y;x_I,y_I)\\ 0 & W(x,y;x_I,y_I) & W_{,y}(x,y;x_I,y_I)\end{bmatrix} \quad (24)$$

选择式(20)和式(21)的四次样条函数后，由于在边界 Γ_{qi} 上 $W_I=0$，所以在式(16)中边界 Γ_{qi} 上的积分为零。式(16)可以表示为：

$$\boldsymbol{K}_I\boldsymbol{U}+\boldsymbol{M}_I\ddot{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{0} \quad (25)$$

式中 $\boldsymbol{K}_I$ 为节点 I 的刚度矩阵，其表达式为：

$$\boldsymbol{K}_I=\int_{\Omega_q}\boldsymbol{V}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{qu}}\boldsymbol{W}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Gamma \quad (26)$$

$\boldsymbol{M}_I$ 为节点 I 的质量刚度矩阵，其表达式为：

$$\boldsymbol{M}_I=\int_{\Omega_q}\boldsymbol{W}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\Omega \quad (27)$$

$$\boldsymbol{m}=[\rho J\quad \rho J\quad \rho h]^{\mathrm{T}} \quad (28)$$

对节点 I，式(25)给出 3 个线性方程，对于整个求解域内的 N 个场节点利用式(25)，就得到 $3N$ 个独立的线性方程。按照整体编号，总装 $3N$ 个方程，就得到系统离散方程组，为：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}=0 \quad (29)$$

其解可以假定为如下形式：

$$\boldsymbol{u}(x,y,t)=\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{u}\sin\omega(t-t_0) \quad (30)$$

其中：$\boldsymbol{\Phi}(x,y)$ 是位移插值型函数矩阵；ω 是板的固有频率；t_0 是初相位；$\boldsymbol{u}$ 是节点位移幅值向量。将式(30)代入式(29)，得到自由振动的离散系统方程：

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{U}=0 \quad (31)$$

式中 $\boldsymbol{U}$ 为所有节点位移的幅值向量。

式(31)可以写成如下典型的特征值方程：

$$(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})\boldsymbol{q}=0 \quad (32)$$

利用子空间迭代法求解式(32)的特征值问题，可得 N 个特征解 $(\lambda_1,\boldsymbol{q}_1)$，$(\lambda_2,\boldsymbol{q}_2)$，…，$(\lambda_N,\boldsymbol{q}_N)$，结构或系统的固有频率为 $\omega_i=\sqrt{\lambda_i}$ $(i=1,2\cdots N)$，振动模态或振型与特征向量 $\boldsymbol{q}_i$ 相对应。

3　算例分析

本文采用矩形域进行数值积分，x 方向和 y 方向节点间距分别为 d_{cx} 和 d_{cy}，局部影响域的大小分别由 x 方向和 y 方向的 r_{ix} 和 r_{iy} 确定：

$$\begin{cases}r_{ix}=\alpha_{ix}d_{cx}\\ r_{iy}=\alpha_{iy}d_{cy}\end{cases} \quad (33)$$

式中，α_{ix} 和 α_{iy} 分别为控制局部影响域大小的控制参数，计算中都取为 3.0。

局部积分域的大小同样分别由 x 方向和 y 方向的 r_{qx} 和 r_{qy} 确定：

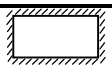
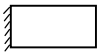
$$\begin{cases}r_{qx}=\alpha_{qx}d_{cx}\\ r_{qy}=\alpha_{qy}d_{cy}\end{cases} \quad (34)$$

式中，α_{qx} 和 α_{qy} 分别为控制局部积分域大小的控制参数，计算中都取为 2.0。为了保证积分精度，将每一积分子域进一步分为 4 个小的子块，在每一小的子块里采用 4×4 高斯点，对于边界积分，在边界上采用 4 个高斯点积分。

算例.　对于矩形中厚板，边长为 a=10m、b=5m，板厚 h=0.5m，弹性模量 E=30MPa，泊松比 μ=0.3，密度 $\rho=1.0\mathrm{kg/m^3}$，在这个例子中只考虑板的横向振动。采用29×15个规则节点分布，径向基函数形状参数取为 $C=1.42$ 和 $q=1.03$ [8]。表1中列出6种边界条件下板的第一阶固有频率，从表1中可以看出本文方法计算结果与有限元结果以及文献[9－10]的结果都十分地接近，说明本文方法具有较高的精度。表中有限元结果的计算网格为28×14，当本文方法计算节点数增加到29×15与有限元法的节点数相同时，本文方法结果介于有限元结果和文献[9－10]的结果之间，说明本文方法具有好的收敛性。

表 1 几种边界条件下基频 $\omega(\times a^2\sqrt{\rho h/D})$ 的收敛性和其他方法结果的比较

Table 1 Convergence and comparison of the fundamental frequencies under various boundary conditions

方法	节点数	SSSS	 CCCC	 CFFF	SCSC	SSSF	SFSF
本文方法	11×7	48.540	91.957	3.475	89.205	15.968	9.767
	15×9	48.529	91.793	3.448	89.021	15.938	9.635
	29×15	48.523	91.482	3.437	88.897	15.916	9.576
有限元法		48.501	91.608	3.424	88.871	15.893	9.466
文献[9－10]		48.696	89.758	3.473	88.945	16.062	9.804

注：S 表示简支，C 表示固支，F 表示自由。

表 2 中列出了矩形中厚板在四边简支和四边固支边界条件下前六阶固有频率。从表 2 中可以看出本文方法计算结果与有限元结果以及文献[9－10]的结果也都十分地接近。表 2 中本文方法计算的节点数和有限元法的节点数都为 29×15，简支边界条件下本文方法计算结果介于有限元结果和文献[9－10]的结果之间。

表 2 简支和固支边界下前六阶固有频率 $\omega_n(\times a^2\sqrt{\rho h/D})$ 和其它方法结果的比较

Table 2 Comparison of the first six natural frequencies for plates with other solutions

阶数	简支			固支	
	本文方法	有限元	文献[9－10]	本文方法	有限元
1	48.522	48.501	48.696	91.482	91.608
2	76.620	76.824	76.272	117.253	117.386
3	122.424	122.806	121.247	162.237	162.473
4	158.071	158.569	156.204	222.424	222.739
5	184.162	184.809	181.562	224.235	224.680
6	226.427	227.508	222.759	244.952	245.340

4 结论

本文将无网格局部径向点插值法应用于计算中厚板的自由振动问题，得到具有较高精度的解。在径向基函数的基础上，附加多项式大大提高了插值精度。该方法的形函数具有 Kronecker delta 函数性质，易于施加位移边界条件，大大地提高了计算效率。无网格 LRPIM 不需要任何形式的网格。相对于有限元法等传统数值方法处理问题更显灵活和方便，是一种真正的无网格方法。实现起来比较简单，在工程实际中具有广阔的应用前景。

参考文献：

[1] Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. A new implementation of the element-free Galerkin method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 113: 397－414.

[2] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. Computational Mechanics, 1998, 22: 117－127.

[3] Atluri S N, Zhu T. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics [J]. Computational Mechanics, 2000, 25: 169－179.

[4] 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. 力学学报, 2001, 33(4): 508－518.
Long Shuyao. A local Petrov-Galerkin for the elasticity problem [J]. Acta Mechanical Sinica, 2001, 33(4): 508－518. (in Chinese)

[5] Liu G R, Yan L, Wang J G. Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2002, 14(6): 713－732.

[6] 孙建东, 张伟星, 童乐为. 无单元法在中厚板模态分析中的应用[J]. 土木工程学报, 2006, 39(10): 29－33.
Sun Jiandong, Zhang Weixing, Tong Lewei. Modal analysis of moderately thick plates by element-free method [J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(10): 29－33. (in Chinese)

[7] Xiao J R, Batra R C, Gilhooley D F. Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions [J]. Computer Methods Applied Mechanics Engineering, 2007, 196: 979－987.

[8] Wang J G, Liu G R. On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods [J]. Computer Methods Applied Mechanics Engineering, 2002, 191: 2611－2630.

[9] 曹志远, 杨昇田. 厚板动力学理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1983.
Cao Zhiyuan, Yang Shengtian. Dynamic theory and application of thick plates [M]. Beijing: Science Press, 1983. (in Chinese)

[10] 成祥生. 应用板壳理论[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.
Cheng Xiangsheng. Application of plates and shells [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1989. (in Chinese)