文章编号：1000-4750(2010)03-0001-05

一类随机非光滑振动系统相空间中不同吸引域边界的随机分形

雷　华，*甘春标，谢潮涌

(浙江大学航空航天学院应用力学研究所，杭州 310027)

摘　要：由于复杂动力学行为而导致非线性振动系统相空间中不同吸引子的吸引域边界出现分形的情况比较普遍。该文数值研究一类受周期与有界噪声激励联合作用的碰振系统的全局动力学特征。通过改进胞映射方法，并给出庞卡莱映射的一种特殊形式，以对此类系统的全局动力学行为进行了模拟。结果表明：通过调整参数值，系统相空间里也可出现多个随机吸引子，不同吸引域的边界将呈现随机分形形状。

关键词：非光滑振动；有界噪声；胞映射；随机吸引子；随机分形

中图分类号：O324; O175　　**文献标识码**：A

RANDOM FRACTAL BOUNDARIES OF DIFFERENT ATTRACTING DOMAINS IN THE PHASE SPACE OF A STOCHASTIC NON-SMOOTH OSCILLATORY SYSTEM

LEI Hua , *GAN Chun-biao , XIE Chao-yong

(Institute of Applied Mechanics, SAA, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: It is common for many oscillatory systems to encounter incursive fractal boundaries between different attracting domains in their phase spaces due to their complex dynamical behaviors. This study is focused on the global dynamics of a nonlinear oscillator with rigid constraints under multiple harmonic and bounded-noise excitations. The well-known cell mapping method is developed, and a specific Poincare map is then introduced to simulate the global dynamics of the system. It is shown that several kinds of stochastic attractors may coexist in the space of such system by adjusting the parameters' values. In addition, random fractal boundaries will arise between different attracting domains of stochastic attractors.

Key words: non-smooth oscillation; bounded noise; cell mapping; random attractor; random fractal

具有刚性约束的质量-弹簧系统在外加不同激励下有着不同的全局动力学特性，特别是在随机激励下其动力学特性更加复杂。文献[1]利用胞映射方法[2−4]并通过在刚性边界附近采取拉回积分的方式，讨论了有阻尼或无阻尼的此类系统受周期激励作用后的吸引子及其相应吸引域的变化情况，指出不同吸引域之间的边界可具有分形形状，且当参数满足一定条件时，系统内部将出现混沌运动。

在对工程结构动力学行为的研究过程中，我们往往不能忽略来自外界的随机激励作用(如狂风、凹凸不平的路面、地震和海面波浪等)的影响，因此有必要分析系统受随机激励作用后的动力学特征。由文献[5－8]可知，噪声可诱发混沌，且系统的样本响应也可出现规则占优和随机占优等非混沌运动

收稿日期：2008-10-24；修改日期：2009-02-26
基金项目：国家自然科学基金项目(10672140)
作者简介：雷　华(1974－)，男，四川人，讲师，博士，从事结构抗震研究(E-mail: hualei@zju.edu.cn)；
*甘春标(1971－)，男，江西人，教授，博士，从事随机非线性动力学研究(E-mail: cb_gan@zju.edu.cn)；
谢潮涌(1975－)，男，浙江人，讲师，硕士生，从事随机非线性动力学研究(E-mail: lsxcy@hotmail.com).

形式。噪声诱发的动力学现象非常丰富，有待于今后作更深入的研究。

一般说来，在对振动系统的全局动力学行为进行模拟时，通过胞映射方法得出来的往往是周期吸引子。随着胞元数目的增加，最大周期胞元的周期数也相应增大，所描绘出的吸引子虽具有混沌的相应表象，但除非事先已利用其他方法知道此吸引子是混沌的，不然仅凭胞映射方法得出来的结果是很难确定的。此外，由于系统受随机激励的作用，胞映射方法采样周期的选择也值得进一步考虑。

本文结合胞映射方法和庞卡莱映射的一种特殊形式[9]，讨论随机激励对非光滑振动系统的吸引子及其相应吸引域的影响。首先，给出现有庞卡莱映射方法的推广形式，使其能应用于随机非光滑振动系统的动力学研究；其次，通过胞映射方法粗略估计此类系统的不同类别胞元及相应吸引域；最后，以已确定的不同类别胞元或其相应吸引域中的点作为初值，通过随机庞卡莱映射方法，揭示不同类别吸引子的更深层次特点及其吸引域边界的分形结果，并观察随机吸引子的移动及其相应吸引域边界分形的变化情况。

1 随机吸引子的模拟方法

在文献[10－11]中，有关吸引子的概念被推广应用于随机动力系统理论。作为受随机激励作用的动力学模型，一个随机吸引子是一平稳集，取值为随机变量。然而随机动力系统的吸引子通常随时间发生移动，故我们很难了解随机吸引子的结构及其中的动力学特征，更多的信息还应从数值计算方面获得。

在大多数的实际工程应用中，我们只对某时间范围内系统的动力学行为感兴趣，确定性动力系统的有关理论结果也相应的仅应用于某给定时间段内的分岔、混沌及其吸引域等复杂动力学行为的分析。此时，随机动力系统在某时间段($[0,T_0]$)内的限时不变性条件可描述为：起始深刻从系统相空间的某集合内出发的轨线经时间T_0后再次返回此集合，且轨线在演化过程中不必重合。由此，我们可类似于确定性情形进一步讨论随机动力系统在此时间段内样本响应的分岔、混沌及其吸引域等复杂动力学行为。此外，当系统所受的激励为一平稳的随机过程时，由我们以往的研究结果[7－8]以及文献[9]可知，系统在任何给定的时刻，其相空间内经长期演化后的稳定吸引域同样是存在的，且在给定的参数条件下的系统经不同样本激励作用后其相空间的拓扑结构基本是相同的。正如现象学方法所述，随机非线性动力系统发生 Hopf 分岔的表征是系统响应的二维联合概率密度函数图中出现火山口形状，即系统基于不同随机样本可识化激励的运动是随机步行于某闭轨的小邻域内的，此也即说明我们可以用其中的一个样本激励下的运动来描述所发生的 Hopf 分岔现象。因此，对某一给定的随机激励过程，在相同的强度条件下，我们并不需要重复分析和演算大量的不同样本响应，只需通过 Monte-Carlo 模拟或三角级数合成法得到随机激励过程的一个在时间段$[0,T_0]$内的样本可识化，以进行随后的迭代演算。

通过时间步和随机数发生器的调节，可使得基于某平稳的随机过程的随机样本可识化在时间段$[0,T_0]$内充分遍历，从而我们可预期在此时间段内的不同样本可识化激励对系统的动力学行为的影响基本类似，由此可重复观察已经产生的单一样本可识化激励对系统的动力学的作用结果，也即是说，可将经时间T_0后庞卡莱截面上的点作为庞卡莱映射下一次迭代的初值，且冻结此时已经生成的样本可识化激励并进行周期处理：

$$\bar{\eta}(t+mT_0)=\eta(t),\qquad t\in[0,T_0] \tag{1}$$

其中m为正整数。对于随机向量过程，也可以类似处理。由式(1)，我们把原随机动力系统转换成为一个受周期激励作用的系统。需要指出的是，经式(1)变换后的系统的动力学分析范围是限于时间段$[0,T_0]$内的，也即，对每个胞元仅作用在时间$[0,T_0]$内的的随机样本可识化激励，其首次样本映射的位置正是胞映射方法的应用结果。此外，由于无扰系统的双曲平衡点的稳定与不稳定流形所包围的区域是由周期分布于$(0,\infty)$的闭轨集合，故通过选取不同的T_0值，可观察限带噪声或有界噪声作用对具有不同周期T_0的运动影响。而对于激励函数显含时间t且周期为T的情形，通常人们关注的是随机激励对所围区域内周期为T的运动的共振效应，对此情形，只须将T_0取为T即可。

基于以上的讨论，对随机非线性动力系统的全局动力学分析过程进行：

1) 对已经生成的样本可识化激励按式(1)进行周期处理。

2) 随机选取由胞映射方法记录的不同类别吸

引子对应的部分胞元，对每一选取的胞元按庞卡莱映射方法迭代多次(比如 200 个周期)，记入数据文件并绘图观察由不同胞元中心点迭代后吸引子的全貌，如果所得吸引子的结构类似，则完成了对相应类别吸引子的全貌模拟。

3) 按 Monte-Carlo 模拟或三角级数合成方法产生$[0,T_0]$内的多个(比如 32)随机样本可识化，并按式(1)进行周期化处理。

4) 随机选取由胞映射方法记录的不同类别吸引子对应的部分胞元，对所选中的每一胞元施加由3)产生的样本激励作用，按庞卡莱映射方法迭代多次，以观察吸引子的变化情况。

5) 调整随机激励过程的强度或谱宽，重复步骤3)，对不同吸引子对应的胞元进行庞卡莱映射迭代，以观察由随机激励所诱发的动力学新现象。

6) 记录下已经由步骤 5)诱发新现象所对应的系统参数，按第一阶段的过程，定位新的不同吸引子及其相应吸引域。

通过以上步骤，我们可进一步了解动力学噪声对系统的动力学行为的作用机制。在本文的下一节，我们通过一些模拟结果来说明以上过程并对所得出的结果进行分析。

2　实例分析

考虑图 1 所示受周期和随机激励共同作用的质量-弹簧系统[1]：

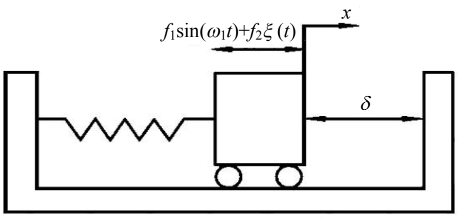


图 1　简谐激励和随机激励共同作用下的质量-弹簧系统

Fig.1　Mass-spring system under multiple harmonic and random excitations

描述图 1 中振子运动的微分方程可表示如下：

$$\ddot{x}+x+\delta\dot{x}=f_1\sin(\omega_1 t)+f_2\xi(t) \tag{2}$$

其中：f_1 为周期激励幅值；ω_1 为其激励频率。随机激励$\xi(t)$采用如下有界噪声形式：

$$\xi(t)=\sin(\omega_2 t+\varphi) \tag{3a}$$

$$\varphi=\sigma B(t)+\gamma \tag{3b}$$

式(3)中：$B(t)$ 为单位维纳过程；γ 为$[0,2\pi)$之间均匀分布的随机变量；f_2、ω_2、σ 为常数，f_2 为有界噪声激励的幅值，ω_2 为激励的平均频率，σ 为噪声的强度；$\xi(t)$ 是一个广义平稳随机过程，均值为 0。鉴于$|\xi(t)|\leqslant f_2$，故$\xi(t)$是一个有界的随机过程，改变σ的值可使$\xi(t)$有不同的宽带。当$\sigma\to 0$时$\xi(t)$为窄带过程；当$\sigma\to\infty$时$\xi(t)$趋向于一个具有常数功率的白噪声。另外，适当选取 f_2 与σ的值，$\xi(t)$可具有大气湍流的 Drydon 谱和 von Karman 谱[12]，可模拟风中湍流与地震的地面运动。本文对有界噪声激励$\xi(t)$的样本可识化采用文献[13]中的模拟方法。

在图 1 中，当位移条件满足：

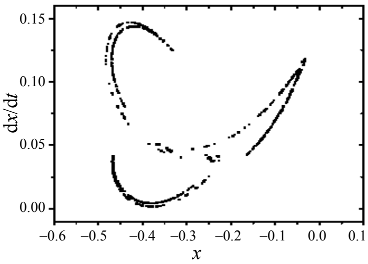
$$x(t^*)=\delta \tag{4}$$

时发生碰撞。假定碰撞是瞬间完成的，只有速度分量发生变化：

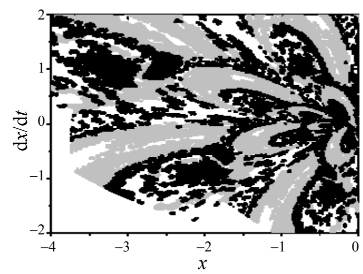
$$y^+(t^*)=-\gamma y^-(t^*) \tag{5}$$

其中：$y^+=\dot{x}^+$、$y^-=\dot{x}^-$分别表示碰撞后与碰撞前的速度分量；γ 为恢复系数。对于具有刚性约束的系统式(2)，系统的相轨线与刚性约束面接触时将发生跳跃，以至于第 1 节所描述的方法不能直接应用于系统式(2)的积分计算中。本文在对系统式(2)的全局动力学行为按上节的步骤进行模拟时，结合了文献[1]所提出的拉回积分方法，在此不再重述。

图 2 为系统式(2)在仅受周期激励作用时的混沌



(a) 混沌吸引子



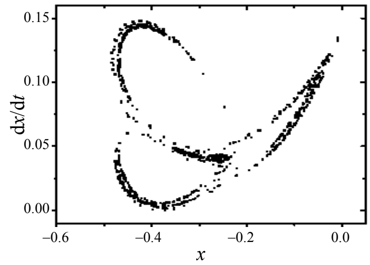
(b) 图 2(a)中混沌吸引子的吸引域(灰色)和 2 碰周期-2 吸引子的吸引域(黑色)

图 2　确定性情形下系统相空间中混沌吸引子和不同吸引域的分形边界，其中 $f_1=0.5,\ \omega_1=2.67,\ \delta=0.1,\ \gamma=0.8,\ f_2=0$

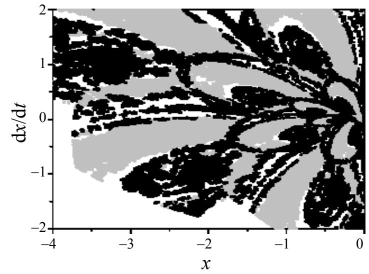
Fig.2　The chaotic attractor and fractal boundaries between different attracting domains in the deterministic case, in which $f_1=0.5,\ \omega_1=2.67,\ \delta=0.1,\ \gamma=0.8,\ f_2=0$

吸引子(见图 2(a))、混沌吸引子和 2 碰周期-2 吸引子的相应吸引域(见图 2(b))。不难发现，系统相空间中不同吸引子的吸引域边界出现了分形形状，其中的空白部分为陷胞和 1 碰单周期吸引子的相应吸引域。

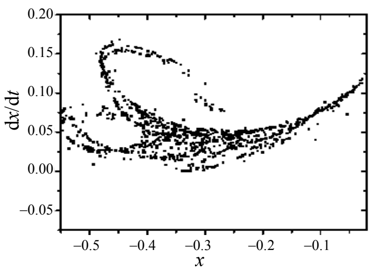
当系统受周期和有界噪声激励联合作用时，我们假设周期激励的强度远比有界噪声激励的强度大，这样可视后者为更小的扰动而将采样时间间隔取为周期激励的周期。图 3 给出部分数值结果，由这些结果不难发现，当有界噪声激励的强度非常小时，吸引子和相应吸引域的形状(见图 3(a)－图 3(b))和确定性情形下的基本相同(对比图 2)，因此我们仍然称图 3(a)中吸引子为混沌吸引子；而随着随机激励强度的增大，吸引子的形状将发生很大变化(图 3(c)－图 3(d))，其类别有待于结合以往的研究结果[5−8]作进一步的分析。图 3 的结果也表明，即使系统还受到随机激励的作用，其相空间中不同随机吸引子的边界也可出现分形形状，且在附加随机激励作用后，吸引子将发生移动，在庞卡莱截面上表现为更粗更模糊的点轨迹，随着随机激励的强度的增加，此怪引子将完全不同于确定性情形的混沌吸引子。



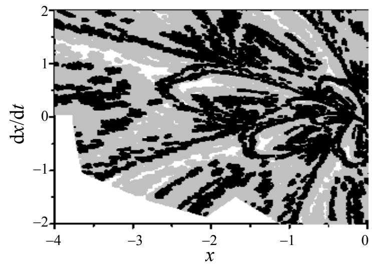
(a) 混沌吸引子($f_2 = 0.03$)



(b) 图 3(a)中混沌吸引子的吸引域(灰色)和 2 碰周期-2 吸引子(黑色)的吸引域($f_2 = 0.03$)



(c) 随机怪引子($f_2 = 0.08$)

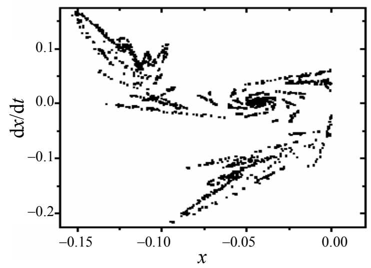


(d) 图 3(c)中随机怪引子的吸引域(灰色)和单碰周期-1 吸引子的吸引域(黑色)($f_2 = 0.08$)

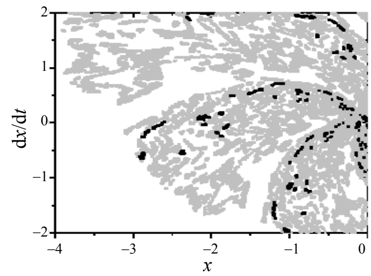
图 3 周期和有界噪声激励联合作用下系统相空间中随机怪引子和不同吸引域的随机分形边界，其中 $f_1 = 0.5,\ \omega_1 = 2.67,\ \delta = 0.1,\ \gamma = 0.8,\ \omega_2 = 2,\ \sigma = 1$

Fig.3 The stochastic strange attractors and fractal boundaries between different attracting domains when the system is acted by the multiple periodic and bounded-noise excitations, in which $f_1 = 0.5,\ \omega_1 = 2.67,\ \delta = 0.1,\ \gamma = 0.8,\ \omega_2 = 2,\ \sigma = 1$

最后，我们给出系统式(2)在仅受有界噪声激励时的模拟结果(见图 4)。此时，取采样时间间隔为激励的平均周期($2\pi / \omega_2$)，而 ω_2 的取值参考 ω_1 的情况。由图 4 可知，系统式(4)的庞卡莱截面上同样可



(a) 随机怪引子



(b) 图 4(a)中随机怪引子的吸引域(灰色)和单碰类周期-1 吸引子的吸引域(黑色)

图 4 有界噪声激励单独作用下系统相空间中随机怪引子和不同吸引域的随机分形边界，其中 $f_1 = 0,\ \delta = 0.1,\ \gamma = 0.8,\ f_2 = 0.1,\ \omega_2 = 2.67,\ \sigma = 1$

Fig.4 The stochastic strange attractor and fractal boundaries between different attracting domains when the system is acted by single bounded-noise excitation, in which $f_1 = 0,\ \delta = 0.1,\ \gamma = 0.8,\ f_2 = 0.1,\ \omega_2 = 2.67,\ \sigma = 1$

出现怪引子，且形状和确定性系统的完全不同，除此吸引子外，庞卡莱截面上还可出现在某个点的小邻域附近密集分布的点集合，在此称为类单碰类周期-1 的随机吸引子。随机怪引子和类周期-1 的随机吸引子的相应吸引域见图 4(b)，其中的空白部分为陷胞和类周期 2 等随机吸引子的相应吸引域。

3 结论

本文结合以往的胞映射理论、随机吸引子的处理方式以及新近发展的随机庞卡莱映射，针对所讨论的随机非光滑振动系统，通过选定系统相空间的某一有界区域，给出了系统在此有界区域存在的确定性或随机吸引子，分析了系统在附加有界噪声激励作用后吸引子与相应吸引域的变化情况。由本文所提方法，可了解到噪声能诱发系统更为复杂的动力学现象。此外，由本文的分析过程，首先选取系统可能拥有丰富动力学行为的某有界区域，给出系统在此区域内的吸引子及相应吸引域，通过对不同吸引子或在相应吸引域内选取初值进行迭代，并同时调整系统的参数，由此观察吸引子的移动与新吸引子的产生以及相应吸引域的变化情况，这可为今后对随机非线性系统的动力学控制提供借鉴。

参考文献：

[1] 李健, 张思进. 非光滑动力系统胞映射计算方法[J]. 固体力学学报, 2007, 28(1): 93－96.
Li Jian, Zhang Sijin. Cell-mapping computation method for non-smooth dynamical systems [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2007, 28(1): 93－96. (in Chinese)

[2] Hsu C S, Guttalu R S. An unracelling algorithm for global analysis of dynamical systems: An application of cell-to-cell mappings [J]. Journal of Applied Mechanics, 1980, 47: 940－948.

[3] Hsu C S. Global analysis by cell mapping [J]. International Journal of Bifurcations and Chaos, 1992, 2: 727－771.

[4] Tongue B H, Gu K. Interpolated cell mapping of dynamical systems [J]. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 1988, 55: 461－466.

[5] Frey M, Simi E. Noise-induced chaos and phase space flux [J]. Physica D, 1993, 63: 321－340.

[6] Lin H, Yim S C S. Analysis of a nonlinear system exhibiting chaotic, noisy chaotic, and random behaviors [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1996, 63: 509－516.

[7] Gan C. Noise-induced chaos and basin erosion in softening Duffing oscillator [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25: 1069－1081.

[8] Gan C. Noise-induced chaos in Duffing oscillator with double wells [J]. Nonlinear Dynamics, 2006, 45(3-4): 305－317.

[9] Makarov D, Uleysky M. Specific Poincare map for a randomly-perturbed nonlinear oscillator [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39: 489－497.

[10] Crauel H, Flandoli F. Attractors for random dynamical systems [J]. Probab Theory Relat Fields, 1994, 100: 365－393.

[11] Arnold L, SchmalfuB B. Fixed points and attractors for random dynamical systems [C]// Naess A, Krenk S. IUTAM Symposium on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics, 19-28, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[12] Lin Y K, Cai G Q. Probabilistic structural dynamics-advanced theory and applications [M]. Singapore: McGraw-Hill, 1995.

[13] Shinozuka M. Digital simulation of random processes and its applications [J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 25: 111－128.