

文章编号: 1000-4750(2010)04-0095-10

砂土强度和剪胀性的颗粒力学分析

常 在,*杨 军,程晓辉

(清华大学土木工程系, 清华大学结构工程与振动教育部重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 砂土强度和剪胀性一直是土力学强度和变形研究的难点和重点, 对其进一步认识的关键取决于对砂土颗粒状微观结构的洞察。砂土的颗粒性和散碎性使其适合采用颗粒力学来研究。该文从颗粒力学角度出发, 利用平面离散元模拟砂土变形, 建立并标定了砂土单元实验的一个颗粒力学模型。在此基础上, 通过颗粒力学参数影响分析, 研究了砂土无侧限双轴试验的三种表观强度指标(临界状态强度、峰值强度和特征应力强度)、剪胀性及剪切模量的颗粒力学影响因素。研究结果表明: 砂土临界状态强度仅受砂土颗粒摩擦系数的影响, 是材料属性, 符合临界状态土力学理论; 砂土峰值强度和特征应力强度不但与砂土颗粒摩擦系数相关, 还与围压水平和相对密实度有关。峰值强度不受砂土颗粒自身刚度性质的影响, 而特征应力强度受颗粒刚度性质的影响较大, 但后者的影响规律不是简单的正比或反比的关系。砂土剪切模量主要受其颗粒自身刚度性质的影响, 就目前研究来看, 它与砂土相对密实度的关系并不显著。用颗粒力学方法对剪胀性的深入研究比较困难, 主要是因为诸多颗粒力学参数(砂土颗粒摩擦系数和刚度、砂土样品的孔隙率及围压水平)均与之相关。该文尝试研究了砂土剪胀性与其颗粒转角的关系。最后, 用该文标定的颗粒力学模型, 研究了无重地基极限承载力普朗德尔-瑞斯纳问题, 通过颗粒力学计算结果与普朗德尔-瑞斯纳解的对比, 深化了对砂土地基极限承载力的理解, 也为计算颗粒力学方法在岩土工程尺度上的应用提供了参考。

关键词: 无侧限双轴试验; 颗粒力学; 离散元方法; 砂土; 强度; 剪胀性

中图分类号: TU441 **文献标识码:** A

GRANULAR MECHANICAL ANALYSIS OF THE STRENGTH AND DILATANCY OF SANDS

CHANG Zai,*YANG Jun, CHENG Xiao-hui

(Key Laboratory of Structure Engineering and Vibration of China Education Ministry,

Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The strength and dilatancy of sands are continuously the research focus of soil mechanics. Further understanding of these mechanical properties depends on the insight view of the granular fabric of sands. The granular and discrete properties of materials make sands feasible to be studied by granular mechanics. Three strength indices including the critical state strength, the peak strength and the characteristic stress strength, dilatancy and shear modulus of sands in unconfined biaxial tests were investigated using the approach of granular mechanics. Micromechanical insights were obtained for the phenomenological behavior of sands observed in 2D discrete element simulations. The results presented in this paper indicated the friction coefficient of sand particles was crucial to the critical state strength of sands. This conformed to the theory of critical state soil mechanics. The other two strength indices correlated not only to the friction coefficient of sand particles but also the confining

收稿日期: 2008-10-20; 修改日期: 2009-12-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(50608041)

作者简介: 常 在(1983—), 女, 北京人, 硕士生, 从事岩土工程研究(E-mail: changzai1@126.com);

*杨 军(1974—), 男, 四川人, 副研究员, 博士, 从事岩土工程研究(E-mail: junyang@tsinghua.edu.cn);

程晓辉(1971—), 男, 陕西人, 副教授, 博士, 从事岩土力学研究(E-mail: chengxh@tsinghua.edu.cn).

stress that sands were subject to and the relative density. The peak strength of sands was found to be irrespective of the stiffness of sand particles. A definite correlation of the characteristic stress strength with the stiffness of sand particles was unable to determine. The shear modulus of sands primarily correlated with the stiffness of sand particles, but its correlation with the relative density of sands was insignificant as far as the present situations were considered. The dilatancy of sands remained difficult to be understood as it correlated with many parameters such as the friction coefficient of sand particles, the mean stress that sands were subject to, the relative density, the Poisson's ratio of sand particles as well as the stiffness of sand particles. At last, the calibrated model of granular mechanics developed was employed to investigate the Prandel problem in which a limit equilibrium solution was obtained for the bearing capacity of weightless foundations subject to surcharges. Agreements and disagreements of these two solutions were observed which enriched the understanding of bearing capacity of foundations.

Key words: unconfined biaxial test; granular mechanics; discrete element analysis; sand; strength; dilatancy

砂土可能是自然界和土木工程建设中最常见和最具有代表性的颗粒体材料。其物理力学及工程性质受到物理、岩土力学专家和岩土工程师的共同关注。一方面,对物理、岩土力学研究人员而言,砂土经常被用来作为载体,进行颗粒集合体物理力学性质的实验研究和理论分析,这其中比较典型的研究包括:1) 砂土在土工离心机缩尺物理模型中的力学性质以及相似性和颗粒尺寸效应分析^[1-2],砂土液化机理的研究等^[3];2) 为空间科学而进行的砂土颗粒体在微重力环境下的力学实验研究^[4-5]。而对于岩土工程师来说,各种密实度砂土的表观(宏观)强度指标及其剪胀性的准确量测与确定是一个重要问题。正是由于砂土的颗粒本质(非连续性),以上两方面的研究和实践经常相互交叉与促进,成为土力学与基础工程研究中一个体现基础科学(物理学,颗粒力学)和岩土工程实践相结合的重要课题。该课题近年来在国际土力学与岩土工程界内被称为土的微观力学研究(Soil micromechanics or Mechanics of granular materials),或岩土的多尺度分析(Geomechanics from micro to macro)^[6-8]。国际土力学和岩土工程委员会(ISSMGE)也有一个专业委员会 IC35 (Geotechnics of Particulate Media)来促进这方面研究工作的开展。国内多称为岩土的结构或组构的研究,尤以已故教授沈珠江院士的研究工作最为突出^[9]。以上研究人员一致认为,要对颗粒性质明显的岩土类材料基本性质有深入和正确的理解,只能通过土的微观(颗粒)力学的研究来实现。

20 世纪 80 年代以来,粗粒土和岩石的计算颗粒力学方法得到迅速发展^[10-11]。其中最为著名的计算程序当属 PFC^{2D/3D}(Particle flow code, Itasca[®])。虽然国内外目前利用这一手段对岩土类材料的一些

复杂问题进行了不少的讨论^[2,12],但本文仍试图从颗粒力学基本原理出发,分析土力学和基础工程中的一个基本问题——砂土在单元试验中表观强度和剪胀性。其目的在于呈现给读者和其他研究人员计算颗粒力学的核心部分,即用离散单元的数值方法,研究岩土类材料颗粒力学指标与其表观性质的定性与定量关系。本文认为岩土计算颗粒力学才起步不久,只有深入了解其核心部分,才有可能针对土力学和岩土工程中一些前沿及热点问题进一步探讨。

到目前为止,岩土工程研究人员基于临界状态土力学理论和常规剪切实验提出了砂土 3 种表观强度指标,即临界状态强度、峰值强度、特征应力强度及相应的剪胀性指标。

砂土临界状态强度只与砂土的矿物成分相关^[13],此时的应变水平约在 8%—15%,剪胀性为零。该状态的强度指标虽是材料的本质属性,而非状态参数,但大变形下强度指标的量测受试样软化机制及边界条件的影响,量测困难重重^[14],砂土的临界状态是否存在也曾受到质疑^[15]。

砂土峰值强度一般用于基础工程的正常使用极限状态和容许应力法设计中。20 世纪 80 年代的研究^[13]表明:峰值强度及此时的剪胀性均与平均有效应力、土相对密实度和临界状态强度密切相关。除经实验量测而拟合得到的经验公式之外,峰值强度和剪胀性的数值计算及理论分析模型,尤其是反映砂土颗粒本质的模型并未发展。这一工作现在也受到包括一些岩土有限元计算软件,如 Plaxis 的关注。

20 世纪 90 年代以来,在砂土的特征应力强度方面有了不少研究^[16-17]。特征应力强度是在砂土单

元测试中, 其体积应变率首次为零时的动摩擦角 (mobilized friction angle), 该强度被认为更适用于三轴压缩实验下的强度指标^[14]。但特征应力状态对应的应变水平很小, 一般约小于 2%, 这使得其准确量测也有一定困难。

密砂和松砂的以上三种强度指标可以表示在图 1 所示的常规三轴实验的典型偏应力和体积应变与轴向应变的关系曲线上。

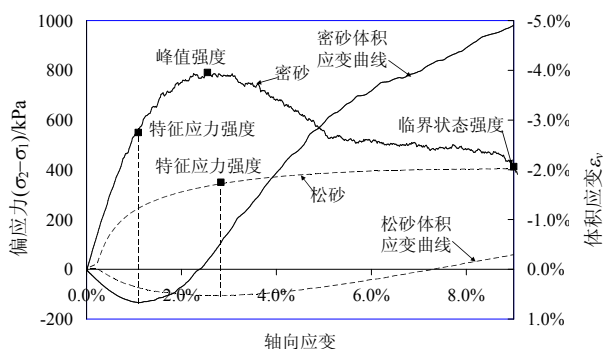


图 1 典型三轴实验砂土强度和剪胀性指标

Fig.1 The strength and dilatancy indices of sands in conventional triaxial compression tests

本文利用 PFC^{2D} 建立砂土的颗粒力学模型, 定量研究砂土颗粒集合体的表观强度和剪胀性(砂土样品在单元应力-应变测试中的性质)与颗粒力学性质的关系。分析在三种不同的强度指标下, 影响砂土内摩擦角和剪胀角的颗粒力学因素。将颗粒力学分析结果与已有的砂土强度与剪胀性的经验公式相比较, 提出砂土表观强度和剪胀性的颗粒力学解释。最后用颗粒力学方法分析了土力学中无重地基的极限承载力及其相应的变形机制。

1 砂土颗粒力学模型建立

1.1 “样品”制备和加载机制

用颗粒集合体研究砂土力学性质的数值试验多采用侧限双轴试验。目前已有关于砂土在循环荷载下力学性质的侧限双轴试验的研究^[12]。侧限双轴试验的刚性边界条件, 与实验室中研究砂土强度和变形常用的常规三轴实验有很大区别。所以本文尝试建立有围压的无侧限双轴试验 (Unconfined Biaxial Test, UBT) 的颗粒力学模型, 并用颗粒组成的“薄膜”来模拟实际样品周围的乳胶薄膜, 最大程度上模拟砂土颗粒集合体的岩土工程性质。

平面应变的 UBT 实验装置与加载机制及其数值模型如图 2 所示。图 2(b)中数值“砂土样品”生成及位移和力的边界条件的模拟步骤如下: 1) 在高

为 H 和宽为 L 的平面内, 用 2300 个在一定粒径范围内的颗粒按照粒径均匀分布的规律, 形成具有一定孔隙率的“试样”。颗粒集合体形成方法利用 PFC^{2D} 手册中所给出的“膨胀法”^[18]: 即在四面“墙”预先设定的区域中生成一定数量的颗粒, 而后这些颗粒膨胀直至四面“墙”所围成区域被填充, 且“样品”满足一定孔隙率的要求; 2) 将两侧的刚性边界 (“墙”) 替换为由较小直径的颗粒连接起来的“薄膜”, 如图 2(b)所示; 3) 在“薄膜”的颗粒上施加水平集中力, 水平集中力的大小之和与试样高度的比值恒定且为真实试样测试围压值; 4) “样品”首先进行双轴等向压缩固结, 而后采用位移控制加载, 而保持“样品薄膜”外围压 σ_2 恒定, 至轴向应变为 10% 时停止加载。这种加载方法的可行性能通过图 2(b)中的量测圆来验证。PFC 所提供的量测圆手段, 给出了所包围颗粒体的平均应力, 如下式定义, 来检查“样品”所受到的应力水平。

$$\bar{\sigma}_{ij} = - \left(\frac{1 - n_{m,2D}}{\sum_{N_p} V^{(p)}} \right) \sum_{N_p} \sum_{N_c} |x_i^{(c)} - x_i^{(p)}| n_i^{(c,p)} F_j^{(c)} \quad (1)$$

其中: $n_{m,2D}$ 为量测圆量测的平面孔隙率; N_p 为量测圆中颗粒的数量; N_c 为量测圆中颗粒接触的数量; $x_i^{(c)}$ 为接触的位置; $x_i^{(p)}$ 为颗粒中心的位置; $n_i^{(c,p)}$ 为接触到颗粒中心的方向; $F_j^{(c)}$ 为颗粒间沿 $n_i^{(c,p)}$ 方向的接触力。

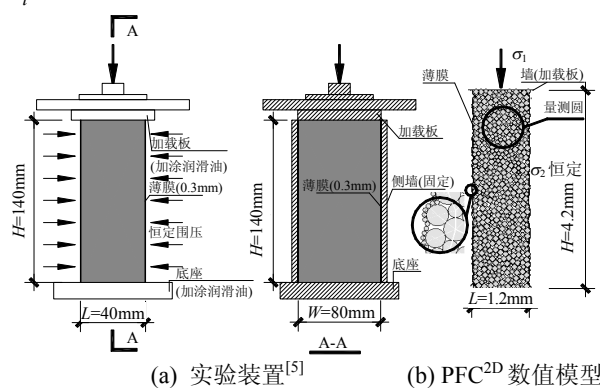


图 2 UBT 实验装置与加载机制及其数值模型

Fig.2 Schematized equipment of UBT, loading scheme & Numerical experimental models by PFC2D

1.2 颗粒力学模型及参数

砂土的颗粒力学模型可以反映砂土颗粒的几何形状及接触属性。组成砂土的单个颗粒或多个颗粒的集合体用一个单位厚度的圆盘或球心在同一平面的圆球来模拟。圆盘或圆球的直径随机分布, 颗粒间接触模型分为线性接触模型和非线性接触

模型(Hertz-Mindlin 模型)。砂土颗粒力学参数与砂土表观岩土参数一同列在表 1 中。本文比照 UBT 实验的结果, 标定了一组基本颗粒力学参数, 通过大量参数影响分析, 研究了砂土表观岩土工程性质的颗粒力学本质, 总结于表 2 中。这种从颗粒层次到宏观的分析过程是颗粒力学中重要而复杂的过程。

表 1 颗粒力学参数与砂土表观岩土参数表

Table 1 Granular mechanics parameters and apparent geotechnical parameters of sands

砂土的表观岩土参数		砂土颗粒力学参数	
ϕ_{crit}	临界状态摩擦角	ϕ_{gg}	颗粒的摩擦角
μ	$\mu = \tan \phi_{crit}$	μ_{gg}	颗粒的摩擦系数
ϕ_{peak}	峰值摩擦角	k_n	颗粒的法向刚度
ϕ_{ccs}	特征应力摩擦角	k_s	颗粒的剪切刚度
ψ_{max}	剪胀角	G_{gg}	颗粒的剪切模量
G	1/2 峰值强度时的割线剪切模量	ν_{gg}	颗粒的泊松比
ε_p	峰值应变	ρ_{gg}	颗粒密度
γ_c	容重	n_{2D}	平面孔隙率
D_r	相对密实度	$n_{2D,max}$	最大平面孔隙率
n	孔隙率	$n_{2D,min}$	最小平面孔隙率
d_{50}	平均粒径	$\bar{R}$	平均粒径(半径)
d_{60}/d_{10}	不均匀系数	r_{max}/r_{min}	最大最小粒径比

表 2 颗粒力学参数与砂土表观岩土参数相互影响表

Table 2 Correlations of Granular mechanics parameters and apparent geotechnical parameters of sands

	ϕ_{crit}	ϕ_{peak}	ϕ_{ccs}	ψ_{max}	G	ε_p	D_r	n	γ_c	d_{50}	d_{60}/d_{10}
ϕ_{gg}	**	**	**	**	-	**	-	-	-	-	-
k_n	-	-	^	^	**	**	-	-	-	-	-
k_n/k_s	-	-	^	*	*	**	-	-	-	-	-
ρ_{gg}	-	-	-	-	-	-	-	-	**	-	-
n_{2D}	-	**	**	**	**	**	**	**	**	-	-
$n_{2D,max}$	-	-	-	-	-	-	**	-	-	-	-
$n_{2D,min}$	-	-	-	-	-	-	**	-	-	-	-
$\bar{R}$	-	*	-	-	*	-	-	-	-	**	-
r_{max}/r_{min}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**

注: **表示影响较大, *表示有一定影响, -表示无影响, ^表示有影响但规律不明确。

从表 2 中看出: 1) ϕ_{crit} 仅受 ϕ_{gg} 的影响。 ϕ_{peak} 和 ϕ_{ccs} 受 ϕ_{gg} 、 n_{2D} 的影响较大, ϕ_{peak} 、 ϕ_{ccs} 与“样品”的围压水平相关。 ϕ_{peak} 不受 k_n 、 k_s 取值的影响。 ϕ_{ccs} 受 k_n 、 k_s 的影响, 但影响规律不是简单的正比或反比的关系; 2) “样品”的剪切模量 G 受 k_n 、 k_s 或 G_{gg} 、 ν_{gg} 的影响, 就目前研究来看, 它

们与“样品”相对密实度的关系不是很显著; 3) 剪胀角 ψ_{max} 受 ϕ_{gg} 、 n_{2D} 、围压水平影响较大。 k_n 、 k_n/k_s 对其也有一定影响。

1.3 砂土颗粒力学参数标定

本文颗粒力学参数的标定, 采用一种名为 Karlsruhe 细砂的无侧限双轴实验结果^[13]。这种细砂的岩土工程指标如表 3 所示。

表 3 Karlsruhe 细砂的基本参数

Table 3 Geotechnical parameters of Karlsruhe fine sand

n	d_{50}/mm	ϕ_{crit}	ψ_{max}	D_r
0.383	0.20	34°	16.32°	0.712

该砂土无侧限双轴实验结果的应力-应变关系采用以下回归公式^[21]:

$$\sin \phi_m = \frac{\gamma}{2d_1 + (2d_2 + 1)\gamma} \quad (2)$$

$$\sin \psi_m = d_4 + \frac{d_5 d_6}{(1 + d_6)\gamma} \quad (3)$$

其中: ϕ_m 为动摩擦角; ψ_m 为动膨胀角; γ 为工程剪应变; ε_1 和 ε_2 分别为试样轴向和横向应变; d_i ($i=1-6$) 为回归参数。

在参数标定过程中, 颗粒为圆盘, 采用线性接触模型。标定过程最大程度地保证了数值计算与实测结果一致, 所得到的初始弹性模量、特征应力强度与实验测试结果的吻合较好, 但在特征应力状态以后, 计算结果与实测结果有明显差别, 如图 3 所示。而非线性接触模型的标定结果在特征应力状态以后的差别较线性模型更明显, 且体积-剪应变曲线与实测结果也差别更大。所以本文选用了线性接触模型。图 3 中 σ_1 为轴向应力, σ_2 为围压。标定的颗粒力学参数结果见表 4。

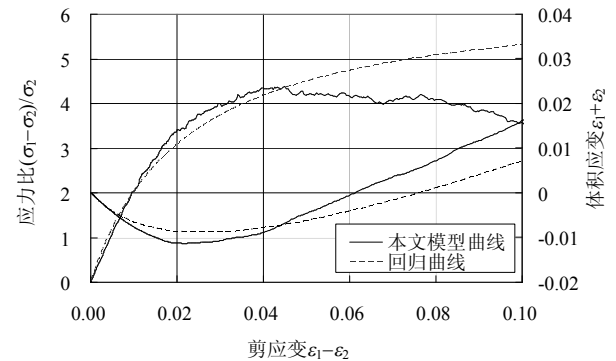


图 3 Karlsruhe 细砂的应力比应变及剪胀曲线

Fig.3 Stress ratio-shear strain -dilatancy relationship of Karlsruhe fine sand

表4 Karlsruhe 细砂的颗粒力学参数

Table 4 Granular mechanics parameters of Karlsruhe fine sand

$\rho_{gg}(\text{kg/m}^3)$	$\bar{R}/\text{m}$	$k_n/(\text{N/m})$	$k_s/(\text{N/m})$	σ_2/kPa	μ_{gg}	n_{2D}	$r_{\max}/r_{\min}$
2650	0.02	1.5×10^8	2.06×10^8	300	3	0.179	2.2

1.4 相对密度 D_r 的模拟

砂土相对密度 D_r 在很大程度上影响砂土的强度和剪胀性。实验中生成均匀的松砂、密砂样品比较困难,准确测定砂土的相对密度并非易事^[3]。若已知实际砂土的 D_r ,正确地用平面颗粒集合体模型来模拟“砂土”,其相对密实状态也是一个需要解决的问题。本文采取如下步骤实现“砂土”相对密度的模拟。

1) 确定“砂土”颗粒集合体的最大平面孔隙率 $n_{2D,\max}$ 。首先生成初始孔隙率 $n_{2D}=0.4$ 的“砂土样品”,在较小的“样品”围压(0.05MPa)和较大颗粒间的摩擦($\mu_{gg}=5.0$)的条件下,形成处于平衡状态“样品”。再将 μ_{gg} 减小至 $\mu_{gg}=\mu=\tan\phi_{crit}$,使“样品”经过伺服机制达到平衡后,即得到平面最大孔隙率 $n_{2D,\max}$ 。数值试验表明: $n_{2D,\max}$ 主要受到 μ_{gg} 的影响,而 $r_{\max}/r_{\min}$ 和 $\bar{R}$ 的影响很小,所以拟合得到 $n_{2D,\max}$ 与 μ 的关系:

$$n_{2D,\max} = 0.0468\mu^3 - 0.1389\mu^2 + 0.1368\mu + 0.1784 \quad (4)$$

2) 确定最小平面孔隙率 $n_{2D,\min}$ 。方法与 1) 中类似,只是“样品”的初始孔隙率设为 $n_{2D}=0.1$,最初将 μ_{gg} 调整为零,再将 μ_{gg} 调整至 $\mu=\tan\phi_{crit}$,得到平面最小孔隙率 $n_{2D,\min}$ 。数值试验表明无论如何变化 μ_{gg} ,“样品”的最小平面孔隙率始终为 $n_{2D,\min} \approx 0.168$ 。

图4示意了上述1)和2)的步骤。

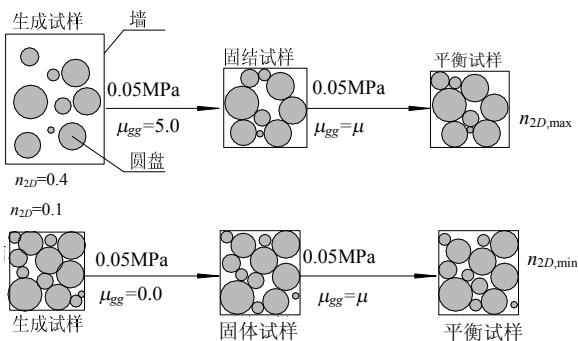


图4 “砂土样品”最大和最小孔隙率的确定

Fig.4 Numerical scheme of obtaining $n_{2D,\min}$ and $n_{2D,\max}$

3) 根据砂土相对密度 D_r 的计算公式得到:

$$n_{2D} = n_{2D,\max} - D_r \cdot (n_{2D,\max} - n_{2D,\min}) \quad (5)$$

2 砂土强度和剪胀性的颗粒力学分析

砂土三种强度指标和剪胀角与颗粒力学参数相关,下面分析在无侧限双轴平面应变试验中颗粒力学参数对“砂土”强度和变形的影响。颗粒间接接触为线性模型,试样装置与加载机制如图2所示,所使用的基本颗粒力学参数见表4。

2.1 峰值强度的尺寸效应

本文的尺寸效应是指 $L/\bar{R}$ 变化引起“砂土”峰值强度的变化。标准化后的“砂土”峰值强度 (ϕ_{peak}/ϕ_{gg}) 受 $L/\bar{R}$ 的影响,如图5所示。当 $L/\bar{R} < 30$ 时, $L/\bar{R}$ 增加, ϕ_{peak}/ϕ_{gg} 增大;当 $L/\bar{R} \geq 30$ 时,峰值强度几乎不受 $L/\bar{R}$ 的影响。“样品”的剪切模量 G 也存在类似的关系。因此,本文以下分析计算均采用 $L/\bar{R} \geq 30$,也即模型中颗粒数不宜太少。

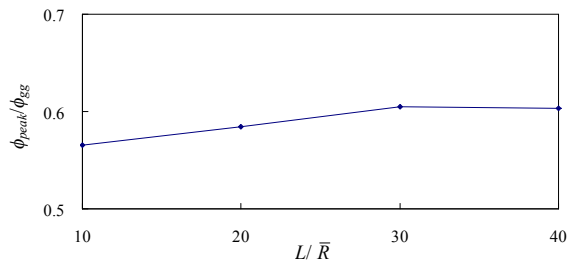


图5 峰值强度与尺寸效应的关系

Fig.5 Influence of $L/\bar{R}$ on the normalized strength of samples2.2 三种强度指标与颗粒摩擦系数 μ_{gg} 的关系

三种强度指标均受颗粒摩擦系数 μ_{gg} 的影响。如图6所示,表观临界状态摩擦角 ϕ_{crit} 仅受颗粒摩擦系数 μ_{gg} 的影响, μ_{gg} 增大, ϕ_{crit} 也增大,与“样品”的围压水平和相对密度无关。如图7所示, ϕ_{peak} 随 μ_{gg} 、“样品”相对密度增加而增大,随“样品”的围压增大而减小。如图8所示, ϕ_{ccs} 随 μ_{gg} 、“样品”密实度增加而增大,随围压水平增大而增加。

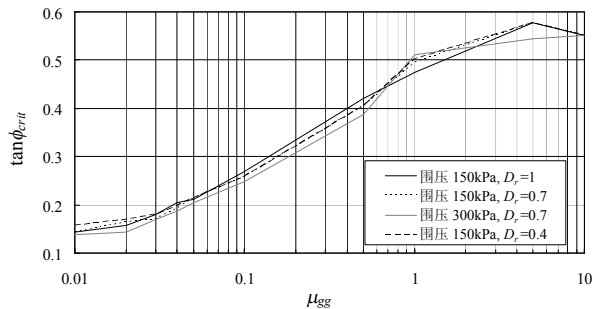


图6 表观临界状态摩擦角与颗粒摩擦系数的关系

Fig.6 Influence of μ_{gg} on ϕ_{crit}

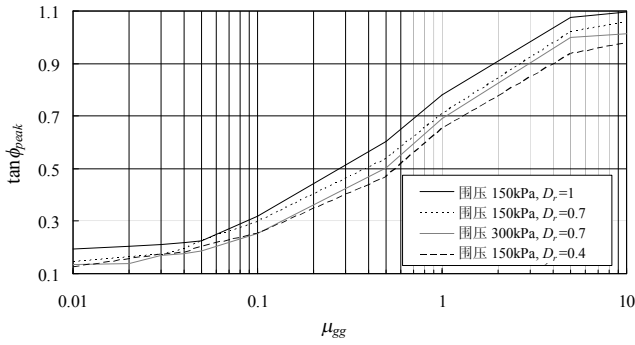


图7 表观峰值摩擦角与颗粒摩擦系数的关系

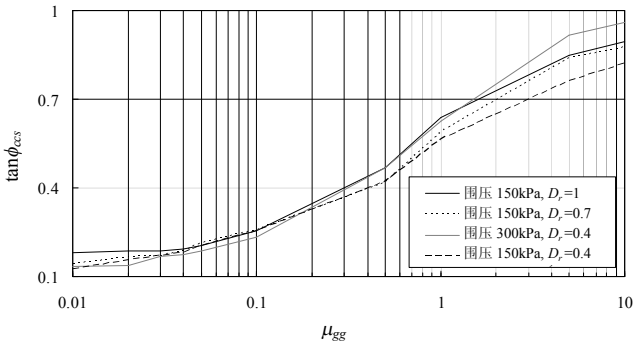
Fig.7 Influence of μ_{gg} on ϕ_{peak} 

图8 表观特征摩擦角与颗粒摩擦系数的关系

Fig.8 Influence of μ_{gg} on ϕ_{ccs}

通过以上分析,可以看出“样品”的表观强度均随颗粒的摩擦系数 μ_{gg} 增加而增大。表观强度间大小关系为: $\phi_{peak} > \phi_{ccs} > \phi_{crit}$ 。特征应力强度受到了“样品”的密实度和围压水平的影响,在颗粒摩擦系数较大的时候与临界状态强度有较大差别(比较图6和图8的结果)。

根据以往的实验研究工作,表观峰值摩擦角与表观临界状态摩擦角的关系为^[13]:

$$\phi_{peak} = \phi_{crit} + 5(D_r(10 - \ln p') - 1) \quad (6)$$

其中, p' 为砂土的平均有效应力。

从式(6)可以看出 ϕ_{peak} 不仅与 ϕ_{crit} 有关,还受 D_r 、 p' 的影响,随砂土的 D_r 增加而增大,随 p' 增大而减小。因而, ϕ_{peak} 是砂土一个典型的状态参数。本文利用所建立的颗粒力学模型研究了 D_r 、 p' 对 ϕ_{peak} 的影响,结果如图9、图10所示。图9给出了在 $D_r=0.7$ 时, $\phi_{peak} - \mu_{gg}$ 的关系,而图10则给出了在围压为 150kPa 时, $\phi_{peak} - D_r$ 的关系。两图中一个显著特点是本文模型在 $\mu_{gg} \approx 1$ ($\phi_{crit} = 26.4^\circ$) 时,“样品”峰值强度出现了转折点。在“样品”的临界状态强度 $\mu_{gg} < 1$ 时,与实验值比较,本文模型所给出的 ϕ_{peak} 过低估计了峰值强度,而当 $\mu_{gg} > 1$ 时,

则过高估计了峰值强度。然而,在 ϕ_{crit} 一定的条件下(也即 μ_{gg} 一定),本文模型计算表明随“样品”的围压水平增加或平均有效应力增大, ϕ_{peak} 减小;“样品”的峰值强度随砂土的相对密实度 D_r 增大而增大。这些与式(6)给出的规律是相同的。

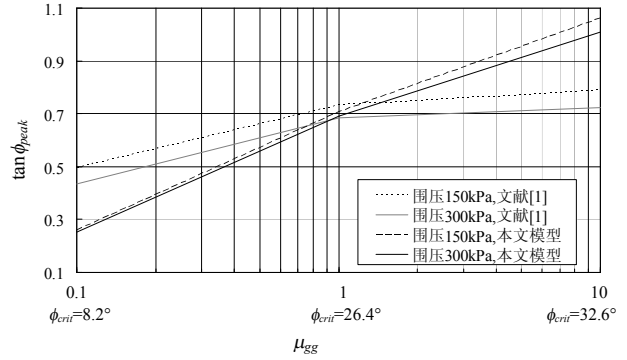
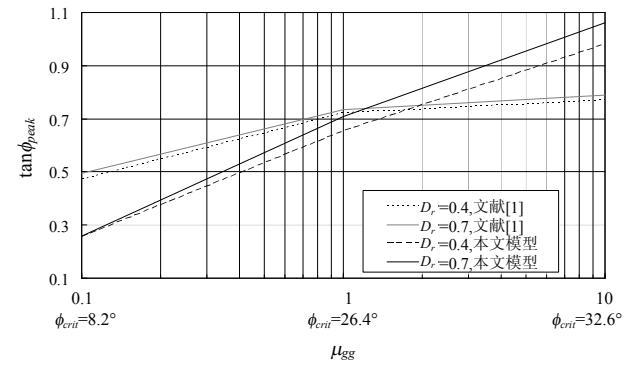
图9 表观峰值摩擦角与平均有效应力的关系($D_r=0.7$)Fig.9 Influence of p' on ϕ_{peak} 

图10 表观峰值摩擦角与相对密实度的关系(围压 150 kPa)

Fig.10 Influence of D_r on ϕ_{peak}

2.3 “砂土样品”剪切模量与颗粒刚度性质的关系

如图11所示,“砂土样品”的剪切模量 G 与颗粒的法向刚度 k_n 成正比,相同 k_n 下, k_n/k_s 增大,剪切模量 G 变小。从该图注意到“砂土样品”剪切模量受其相对密实度影响很小,其原因可能是在围压 300kPa 下,剪切之前的均匀压缩过程,使原本相差较大的初始孔隙率变得相差无几的缘故。

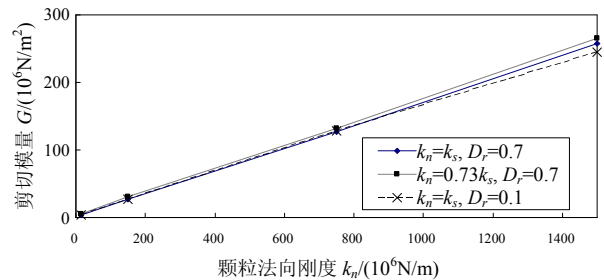


图11 剪切模量与颗粒法向刚度的关系(围压 300 kPa)

Fig.11 Influence of normal stiffness of particles on shear modulus

针对“砂土样品”剪切模量的颗粒力学分析,本文除用线性模型,还用非线性模型进行了研究。仍选用 Karlsruhe 细砂实验进行参数标定,这些颗粒力学参数见表 5。

表 5 Karlsruhe 细砂的非线性颗粒力学参数

Table 5 Granular mechanics parameters of Karlsruhe fine sand (nonlinear contact model)

$\rho_{gg}/(\text{kg/m}^3)$	$\bar{R}/\text{m}$	D_r	v_{gg}	σ_2/kPa	μ_{gg}	n_{2D}	$r_{\max}/r_{\min}$
2650	0.2	0.712	0.01	300	4	0.179	2.2

分析结果如图 12 所示。图 12 表明“砂土样品”的剪切刚度 G 与颗粒的剪切刚度 G_{gg} 、 v_{gg} 成正比。

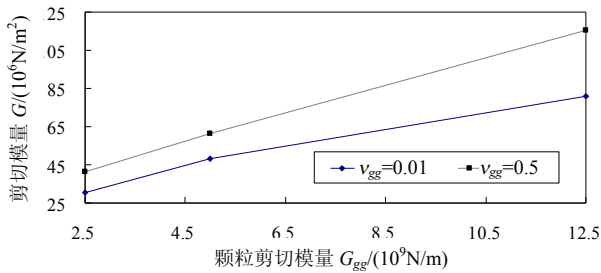


图 12 剪切模量与颗粒剪切模量的关系(非线性接触模型)

Fig.12 Influence of normal stiffness of G_{gg} on G

综合线性和非线性模型分析结果,“砂土样品”的剪切刚度 G 主要受颗粒的刚度 k_n (线性模型)或 G_{gg} 和 v_{gg} (非线性模型)的影响;同时也会受到 k_n/k_s 及 D_r 的影响。

2.4 砂土剪胀角与颗粒力学参数的关系

本文定义砂土剪胀角 $\psi_{\max}$ 为体积-轴向应变曲线对应其峰值强度处切线与水平轴的夹角。根据本文模型计算结果,剪胀角与颗粒的摩擦系数、围压和相对密度 D_r 显著关联,如图 13 所示。从图 13 中可见 $\psi_{\max}$ 随 μ_{gg} , D_r 增大而增大,随围压增大而减小。

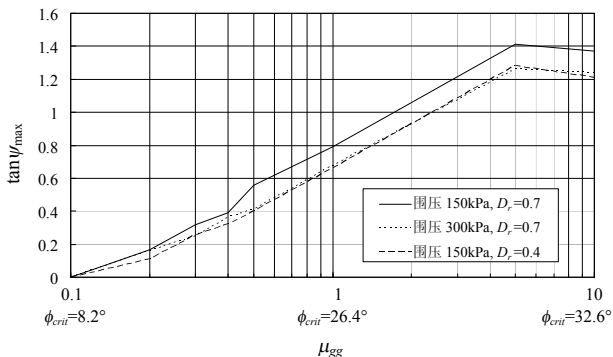


图 13 剪胀角与颗粒摩擦系数的关系

Fig.13 Influence of μ_{gg} on $\psi_{\max}$

μ_{gg} 增大会导致 $\psi_{\max}$ 增大,这一点与土力学文

献中著名的剪胀角经验公式^[13]不同,该经验公式中并未包含 μ_{gg} 或 ϕ_{crit} 的影响。该经验公式如下:

$$\tan \psi_{\max} = 0.3(D_r(10 - \ln p') - 1) \quad (7)$$

进一步分析表明:如果给定一个 ϕ_{crit} 或 μ_{gg} , 对于 $D_r=0.7$ 条件下, p' 增加, $\psi_{\max}$ 减小;对于围压 150kPa 情况下, D_r 增加, $\psi_{\max}$ 增大,如图 13 所示。这与经验公式给出的影响规律相一致。

关于 μ_{gg} 引起 $\psi_{\max}$ 的显著影响本文进行了详细讨论。模型计算结果表明:当其它参数不变, μ_{gg} 增大会引起一个颗粒力学参数,即平均颗粒转角的显著变化。这个颗粒力学参数定义为所有颗粒在一次剪切试验中转角的平均值 δ , 其计算公式如下:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^N |\delta_i|}{N} \quad (8)$$

其中: N 为“样品”的颗粒数量; $|\delta_i|$ 为每个颗粒累计转角。

μ_{gg} 显著影响 δ 和 $\psi_{\max}$, μ_{gg} 增大, δ 也增加,而 $\psi_{\max}$ 也增大。 $\psi_{\max}$ - δ 的关系如图 14 所示。这一有趣的观察与以往对砂土剪胀性的微观解释不一致,值得以后进一步研究。

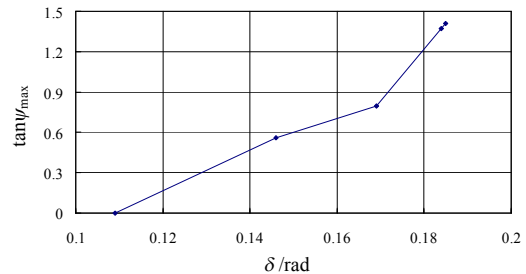


图 14 剪胀角与平均颗粒转角 δ 的关系

Fig.14 Influence of δ on $\psi_{\max}$

“砂土样品”的剪胀角还或多或少受到颗粒刚度性质 k_n 的影响,如图 15 所示。但影响规律不确定,这说明颗粒与颗粒接触的变形也会影响“砂土样品”的 $\psi_{\max}$ 。

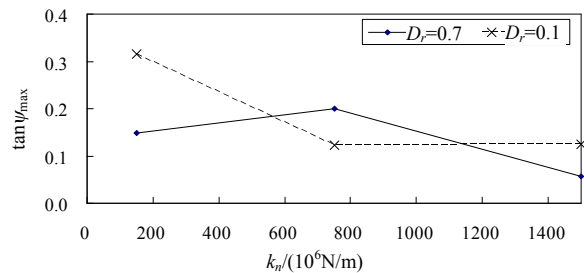


图 15 剪胀角与颗粒刚度的关系

Fig.15 Influence of k_n on $\psi_{\max}$

3 地基极限承载力颗粒力学计算

砂土在无侧限双轴试验中强度和变形的上述研究表明:颗粒力学方法可以用于砂土的单元试验研究中,但需要注意的是,标定时数值结果与实验结果无法完全一致,尤其是特征应力状态后计算结果与实测结果有明显差别。为了进一步检查颗粒力学方法能否对实际岩土工程方面的使用,本文用第1节标定的线性模型,对土力学中著名的普朗德尔-瑞斯纳(Prandtl-Reissner)地基承载力问题进行了计算。这主要是考虑到,用于无重地基承载力计算的砂土临界状态强度仅与 ϕ_{gg} 有关,选取普朗德尔-瑞斯纳问题会使问题简单一些。

普朗德尔-瑞斯纳地基承载力问题的基本假定是^[22]:地基土为无重介质;基底完全光滑;对于埋置深度 D 小于基础宽度 B 的基础,可以把基底当作地基表面,滑裂面只延伸到这一假定的地基表面。两侧土体自重以荷载方式作用于基础两侧;滑移体过渡区滑裂线为对数螺旋线。在此基本假定下,极限平衡方法(Coulomb wedge method)得到的无粘性土的地基极限承载力为:

$$p_u = qN_q = q \cdot \tan^2(45^\circ + \phi_{crit}/2) e^{\pi \tan \phi_{crit}} \quad (9)$$

其中, q 为地面超载。

为模拟无重地基,将 PFC 模型中重力加速度取为 0。基础两侧均布荷载 $q=60\text{kPa}$, 基础宽度为 14m, 模型的高和宽分别为 65 m 和 120 m, 颗粒的平均粒径为 0.3 m, 颗粒数为 25101 个, 其颗粒力学参数取表 4 中数据, 此为计算模型 1。

如果按图 16(a)的方法确定地基极限承载力, 计算模型 1 给出的地基极限承载力为 181kPa, 而式(9)在 $\phi_{crit}=29^\circ$ 时, 给出 $p_u=986.5\text{kPa}$, 两者相距甚远。计算模型 1 在地基发生较大变形时, 与普朗德尔-瑞斯纳解假定的滑移面不同, 其地基变形破坏模式是冲剪破坏, 如图 16(b)所示。

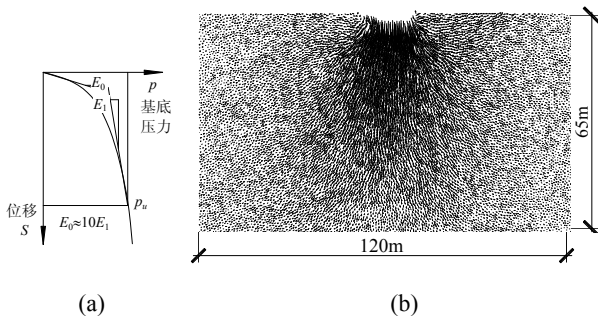


图 16 无重地基破坏形式($D_r=0.7$, $\mu_{gg}=3$)

Fig.16 Failure model 1 of weightless sand foundation ($D_r=0.7$, $\mu_{gg}=3$)

在计算模型 1 基础上,调整颗粒力学参数 D_r 和 μ_{gg} 来研究本文模型在何种情况下与普朗德尔-瑞斯纳解基本一致。结果表明当地基土的相对密实度由 $D_r=0.7$ 增大至 $D_r \approx 1$, 颗粒摩擦系数由 $\mu_{gg}=3$ 减小至 $\mu_{gg}=0.04$ ($\phi_{crit}=11^\circ$) 时(计算模型 2), 计算所得的地基极限承载力与普朗德尔解-瑞斯纳解相近, 分别为 161.7kPa 和 162.6kPa。破坏时位移场如图 17 所示, 出现了明显的滑移面。

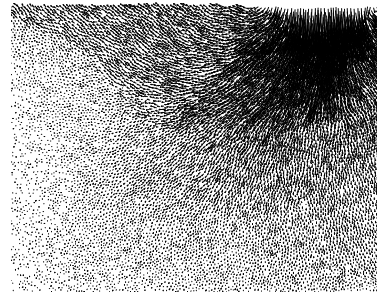


图 17 无重地基破坏形式($D_r=1$, $\mu_{gg}=0.04$,)

Fig.17 Failure model 2 of weightless sand foundation ($D_r=1$, $\mu_{gg}=0.04$,)

在计算模型 2 的基础上,又增大 $q=100\text{kPa}$, 普朗德尔-瑞斯纳解为 271kPa, 本文模型计算出的结果为 220kPa, 数值解小于极限平衡解, 两者相差 18%。

分析上述情况, 本文有如下结论:

1) 普朗德尔解为极限平衡解, 并非实际问题的真实解, 更接近于极限分析的上限解。从计算结果看普朗德尔-瑞斯纳解在上述 3 种情况下, 均比颗粒力学解大, 符合其上限解特点。

2) 本文模型采用的颗粒力学参数由 Karlsruhe 细砂的 UBT 标定得到。标定时数值结果与实验结果无法完全一致, 尤其是接近破坏的应力和剪胀性。另外考虑应力路径不同, ϕ_{crit} 的取值也不相同。本文进行了简单剪切试验的数值模拟, 并与无侧限双轴试验进行对比, 如图 18 所示。可以看出, 简

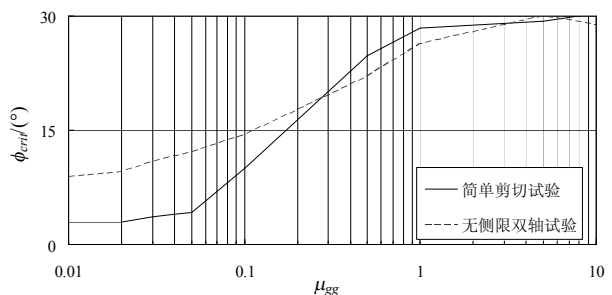


图 18 简单剪切试验与无侧限双轴试验数值模拟结果对比

Fig.18 Comparisons of the results obtained in simple shear and unconfined biaxial tests

单剪切试验与无侧限双轴试验得到的 ϕ_{crit} 并不相同。这可以用来解释颗粒力学解与极限平衡解之间的差异。

4 结论

基于砂土的颗粒性和散碎性,本文针对一组细砂的平面应变无侧限双轴实验,建立了一个“砂土样品”的颗粒力学模型,并进行了参数标定。在此基础上,通过参数分析,研究了“砂土样品”的3种表观强度指标和剪胀性的颗粒力学影响因素。就本文建立和标定的计算模型而言,主要结论如下:

(1) 根据选定的一种细砂无侧限双轴实验的结果,颗粒力学模型的标定过程虽最大程度地保证了数值计算与实测结果一致,即所得到的初始弹性模量、特征应力强度与实验测试结果的吻合较好,但在特征应力状态以后,计算结果与实测结果有明显差别。颗粒力学模型的选择与参数标定,仍是一个值得研究的问题。

(2) 砂土临界状态强度仅受砂土颗粒摩擦系数影响,是一个材料参数;峰值强度和特征应力强度与砂土颗粒摩擦系数、围压水平和相对密实度均相关,峰值强度不受砂土颗粒自身刚度性质的影响,特征应力强度与颗粒自身刚度性质相关,并与临界应力强度不相吻合。

(3) 砂土剪胀性与很多颗粒力学参数均相关。剪胀性受砂土颗粒摩擦系数、相对密实度和围压水平影响较大。砂土颗粒的泊松比对剪胀性也有一定影响。砂土的剪胀性也受砂土颗粒刚度性质影响,但影响规律不是简单的正比或反比关系。因此,剪胀性的颗粒力学本质仍需进一步研究。

(4) 峰值强度与颗粒的粗糙程度(μ_{gg})密切相关,本文模型能基本反映砂土峰值强度经验公式的趋势。在 $\phi_{crit} < 26.4^\circ$ 时,本文模型低估了峰值强度;在 $\phi_{crit} > 26.4^\circ$ 时,则高估了峰值强度。

(5) 本文模型与砂土剪胀性的经验公式有一定差距。 ϕ_{gg} 影响出现在本文模型中,而经验公式并没有涉及该因素。本文尝试分析了剪胀角与一个颗粒力学参数即平均颗粒转角关系,但该方面需要深入研究。

(6) 对比了无重地基极限承载力普朗德尔-瑞斯纳解与颗粒力学数值解。有一定理论价值,对于在工程尺度上应用和检验颗粒力学方法提供了参考。

参考文献:

- [1] Bolton M D, Gui M W. Centrifuge cone penetration tests [J]. Géotechnique, 1999, 49(4): 543—552.
- [2] Stuit H G. Sand in the geotechnical centrifuge [D]. Netherlands: Delft University of Technology, 1995.
- [3] Ishihara K. Liquefaction and flow failure during earthquakes [J]. Géotechnique, 1993, 43(3): 351—415.
- [4] Alshibli K A, Swanson R A, Costes N C, Sture S, Batiste S N, Lankton M R. Mechanics of granular materials under very low effective stresses in a microgravity environment [C]// Proceeding of American Geophysical Union, Boston, Massachusetts, 1998: T21B-8.
- [5] Sture S, Costes N C, Batiste S N, Lankton M R, Alshibli K A, Jeremic B, Swanson R A, Frank M. Mechanics of granular materials at low effective stresses [J]. Journal of Aerospace Engineering, 1998, 11(2): 67—72.
- [6] Oda M, Iwashita K. Mechanics of granular materials: an introduction [M]. Rotterdam: A.A. Balkema, 1999.
- [7] Bolton M D. The role of micro-mechanics in soil mechanics [C]// Hyodo M, Nakata Y. Proceedings of International Workshop on Soil Crushability, Yamaguchi University, Japan: 1999: 1—24.
- [8] McDowell G R, Bolton M D. On the micro-mechanics of crushable aggregates [J]. Geotechnique, 1998, 48(5): 667—679.
- [9] 沈珠江. 土体结构性的数学模型-21 世纪土力学的核心问题[J]. 岩土工程学报, 1996, 18(1): 95—97.
Shen Zhujiang. The mathematics model of soil structure—the key problem of soil mechanics for the 21 century [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 18(1): 95—97. (in Chinese)
- [10] Cundall P A, Strack O D L. The distinct element method as a tool for research in Granular media: Part II [R]. Report to the National Science Foundation, Minnesota: University of Minnesota, 1979.
- [11] Achmus M, Abdel-Rahman K. The influence of ‘up-scaling’ on the results of particle method calculations of non-cohesive soils [C]. Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, Netherlands: A.A. Balkema Publishers, 2002: 183—187.
- [12] 刘洋, 周健, 吴顺川. 循环荷载下砂土变形的细观数值模拟 I: 松砂试验结果[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(7): 1035—1041.
Liu Yang, Zhou Jian, Wu Shunchuan. Micro-numerical simulation of cyclic biaxial test: results of loose sand [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(7): 1035—1041. (in Chinese)
- [13] Bolton M D. The strength and dilatancy of sands [J]. Geotechnique, 1986, 36(1): 65—78.

- [14] Cheng X H. Localization in dutch dune sand and organic clay [D]. Netherlands: DUP Science, 2004: 10—30.
- [15] Mooney M A, Finno R J, Viggiani M G. A unique critical state for sand? [J] Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998, 124(11): 1100—1108.
- [16] Lade P V, Pradel D. Instability and plastic flow of soils. I: Experimental observations [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, 116(11): 2532—2550.
- [17] Luong M P. Stress-strain aspects of cohesiveless soils under cyclic and transient loading [C]. Proceedings of International Symposium on Soils under Cyclic and Transient loading. Swansea: 1982: 315—324.
- [18] Itasca Consulting Group Inc. User's guide [M]. Minneapolis: Version 3.1, 2004: 3-12—3-13.
- [19] Vardoulakis I, Graf B. Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments [J]. Géotechnique, 1985, 35(3): 299—317.
- [20] Itasca Consulting Group Inc. Theory and background [M]. Version 3.1, Minneapolis, 2004: 1—2.
- [21] Mühlhaus H-B, Vardoulakis I. The thickness of shear bands in granular materials [J]. Géotechnique, 1987, 37(3): 271—283.
- [22] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994: 280—281.
- Chen Zhongyi, Zhou Jingxing, Wang Hongjin. Soil mechanics [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994: 280—281. (in Chinese)

(上接第 94 页)

- [7] 陈骥. 《钢结构稳定理论与设计》[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- Chen Ji. Theory and design of stability of steel structures [M]. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese)
- [8] 陈绍番. 钢结构设计原理[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- Chen Shaofan. Design principle of steel structure [M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)
- [9] 何录武, 程昌钧. 矩形薄板的屈曲状态[J]. 应用数学和力学, 1992, 13(5): 401—405.
- He Luwu, Cheng Changjun. The buckled states of rectangular plates [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1992, 13(5): 401—405. (in Chinese)
- [10] 王国周, 瞿履谦. 钢结构原理与设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993.
- Wang Guozhou, Qu Luqian. Principle and design of steel structures [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993. (in Chinese)